# Gabarito - Lista 1

April 14, 2012

1. Para provarmos que existe a função inversa de $f$, precisamos mostras que $f$ é bijetiva, ou seja, injetiva **e** sobrejetiva. A condição para que $f$ seja injetiva é $f(x) = f(y) \iff x = y$, ou seja, não existem dois pontos distintos no domínio da $f$ que são levados no mesmo ponto do contra-domínio. Enquanto que a condição de sobrejetividade nos diz que para todo ponto $y \in [c, d]$ (contra-domínio de $f$ ), existe um $x \in [a, b]$ (domínio da $f$), tal que $f(x) = y$. Então:

   (a) A função $f$ está definida no terceiro quadrante do círculo trigonométrico, assim ela leva $-\pi \to 0$ e $-\frac{\pi}{2} \to -2$. Como $f$ é contínua, todos os pontos no intervalo $y \in [-2, 0]$ é tal que $y = f(x)$, com $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ e portanto $f$ é sobrejetora. E ainda, $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x = y$, para quaisquer $x, y \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Temos então que $f$ é inversível e sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right)$.

   (b) Temos que $f(1) = 1$ e está definida em toda reta, como $f$ é contínua, todo ponto $y \in [1, +\infty)$ é tal que $y = f(x)$ para $x \in [1, +\infty)$ e ainda $f(x)$ é crescente (parábola) para $x \geq 1$ então, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ para quaisquer $x, y \geq 1$ . Sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$.

   (c) $f(2) = 0$ e está definida em toda reta, de modo que $f$ é sobrejetora. $f(x) = f(y) \Rightarrow \log\left(\frac{2x-3}{2y-3}\right) = 1 \Rightarrow x = y$, para todos $x, y$ no domínio de $f$. Então $f$ admite inversa, com $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(10^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 3\right)$.

   (d) $f(0) = e$ e $f(-\pi) = \frac{1}{e}$ e então $f$é sobrejetora, pois é contínua. E $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y$ para $x, y \in [0, -\pi]$ e $f$ é injetora. Portanto $f$ admite inversa com $f^{-1}(x) = \arccos(\ln x)$.

2. Procuramos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que as desiqualdades apresentadas sejam satisfeitas, assim:

   (a) É fácil de se convencer que $x^2 + x + 2$ é sempre maior do que 0, para qualquer $x$ real (até porque suas raízes são complexas). Então podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade por esse polinômio e obtemos $x^2 + 2x + 1 \leq 0$, cuja única solução é para $x = -1$, que é raíz do polinômio, pois para qualquer outro valor de $x$ real temos $x^2 + 2x + 1 > 0$, então:

$$S = \{-1\}$$

(b) $|2x - 4| + |8 - 3x| < 3$, analisando os possíveis casos vemos que se $x > \frac{8}{3}$ então $|8 - 3x| = 3x - 8$ **e** $|2x - 4| = 2x + 4$ então $5x - 15 < 0 \Rightarrow x < 3$ de maneira que uma das regiões é o intervalo $A = \left(\frac{8}{3}, 3\right)$. Para $2 < x < \frac{8}{3}$ temos $|8 - 3x| = 8 - 3x$ **e** $|2x - 4| = 2x + 4$ então $-x + 9 < 0 \Rightarrow x > 9$ mas por hipótese $2 < x < \frac{8}{3}$ então nessa região nenhum $x$ real satisfaz a desigualdade. Por último ainda precisamos ver o caso $x < 2$, aqui tem-se $|8 - 3x| = 8 - 3x$ mas $|2x - 4| = -2x - 4$ então $-5x + 1 < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{5}$ de forma que para $x \in B = (\frac{1}{5}, 2)$ a desigualdade é satisfeita e assim, $S = A \cup B$, ou seja

$$S = \left(\frac{8}{3}, 3\right) \cup \left(\frac{1}{5}, 2\right)$$

(c) Se $x > 1 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$ e então $x$ no intervalo $A = (3, 5)$ satisfaz a inequação e se $x < 1 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1$ e $x$ no intervalo $B = (-3, -1)$ também satisfaz. Assim

$$S = (3, 5) \cup (-3, -1)$$

(d) $(x^2 - 4x + 4) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $(x^2 - 9x - 10) \leq 0$ que é satisfeita para $x \in S$ com

$$S = (-1, 10)$$

(e) Se $x^2 - 4 \geq 0$ então $x^2 + 3x - 4 < 0$ e assim $-4 < x < -2$. Se $x^2 - 4 < 0$ então $x^2 + 3x - 4 > 0$ de modo que $1 < x < 2$. Assim,

$$S = (-4, -2) \cup (1, 2)$$

(f) Aqui $x \neq -2$. Então, $\frac{(x^2+2x-3)(x^2+5x+6)}{3x+6} \leq 0$. Seja $f(x) = (x^2 + 2x - 3)$, $g(x) = (x^2 + 5x + 6)$ e $h(x) = 3x + 6$. $f(x) \leq 0$ para $x \in [-3, 1]$ e positiva fora desse intervalo. $g(x) \leq 0$ para $x \in [-3, -2]$ e positiva para $x$ fora desse intervalo. E $h(x) \leq 0$ para $x \leq -2$. Combinando isso vemos que $\frac{(x^2+2x-3)(x^2+5x+6)}{3x+6} \leq 0$ para $x \leq 1$, mas $x \neq -2$, então:

$$S = (-\infty, -2) \cup (-2, 1]$$

3. Para determinar o domínio de uma função precisamos determinar os valores de $x$

para os quais a função faz sentido, ou seja, os valores em que ela está definida, por exemplo, $\frac{1}{x}$ não está definido no ponto $x = 0$ mas está em todo o resto da reta real, sendo assim, temos:

(a) Aqui ambas as funções estão definidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Temos então, $(f \circ g)(x) = \cos(2(1 - x^2) + 3) = \cos(2x^2 - 5)$, pois cosseno é par, e ainda, $(g \circ f)(x) = 1 - \cos^2(2x + 3) = \sin^2(2x + 3)$.

(b) Aqui também as funções estão bem definidas[1] para qualquer valor real de $x$. Com, $(f \circ g)(x) = x^{6030} - 2x^{2010} + 1$ e $(g \circ f)(x) = (x^3 - 2x + 1)^{2010}$.

(c) A função $g(x)$ está bem definida para quarquer $x$ real, porém a função $f$ é logarítmica e portanto o argumento do logarítmo deve ser maior do que zero, de modo que o domínio de $f$ é dado por: $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 1\}$. E $(f \circ g)(x) = \log(2^x - 1)$, cujo domínio é $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$. E $(g \circ f)(x) = 2^{\log(x-1)}$ cujo domínio é igual ao da $f$.

(d) Aqui também a função $g(x)$ está bem definida para quarquer $x$ real, porém a função $f$ está somente bem definida para $x \geq 0$ se quisermos que $f$ assuma valores reais. Então, $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$ e $(f \circ g)(x) = \sqrt[4]{1 - x^4}$ então $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 1 \ ou \ x \leq -1\}$. $(g \circ f)(x) = 1 - \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = 1 - x$, definido para quaquer $x$ real.

4. Defina $f^+(x) = \max[f(x); 0]$ e $f^-(x) = \min[f(x); 0]$, para todo $x \in A$, ou seja, se no ponto $x$, $f$ é positiva ($f(x) > 0$) então $f^+(x) = f(x)$ e $f^-(x) = 0$. Caso contrário ($f(x) < 0$) então $f^-(x) = f(x)$ e $f^+(x) = 0$. De modo que $f = f^+ + f^-$.

5. Seja $g(x) = f(x) + f(-x)$ e $h(x) = f(x) - f(-x)$, então $g(x) + h(x) = 2f(x) \Longrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{h(x)}{2}$. Mas $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$, ou seja, $g$ é par e ainda $h(-x) = f(-x) - f(x) = -h(x)$, ou seja, $h$ é ímpar. Então $f = f^+ + f^-$ com $f^+ = \frac{g(x)}{2}$ que é par e $f^- = \frac{h(x)}{2}$ que é ímpar.

6. Vamos tentar argumentar sobre as proposições.

(a) Verdadeiro, pois se $f(x + \Delta x) > f(x)$ e $g(x + \Delta x) > g(x)$ então, $f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) > f(x) + g(x)$ e portanto $h(x) = f(x) + g(x)$ é crescente.

(b) Verdadeiro, pois se $f(x+\Delta x) > f(x)$ e $g(x+\Delta x) > g(x)$, então $f(g(x + \Delta x)) > f(g(x))$ e portanto $f \circ g$ é crescente.

(c) Falso, pois $f(x) \geq 0$ mesmo que $x < 0$.

[1] Lembre-se que isso não quer dizer que as funções são injetivas nem sobrejetivas. Estamos somente determinando o domínio delas. Para estudar a sobrejeção e injeção das funções devemos proceder como no primeiro exercício.

(d) Verdadeiro, pois se $g$ é sobrejetiva, então todo ponto $y \in C_g$ é tal que $y = g(x)$ com $x \in D_g$ onde $D_g$ é o domínio da $g$ e $C_g$ seu contra-domínio. E analogamente para $f$, de modo que, $C_g = D_f$ para que $f \circ g$ esteja definida. Então todo ponto $y \in C_f$ é $y = f(x)$, com $x \in D_f = C_g$, de modo que todo $y \in C_{f \circ g} = C_f$ é $y = (f \circ g)(x)$ com $x \in D_{f \circ g} = D_g$.

(e) Verdadeiro, pois se $f$ é injetiva, então $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$ e se $g$ é injetiva, então $g(c) = g(d) \Leftrightarrow c = d$. Então, se $f(g(c)) = f(g(d)) \Rightarrow f(a) = f(b)$, com $a = g(c)$ e $b = g(d)$, mas $f$ é injetiva, então, $a = b$ e como $g$também é injetiva, $c = d$. Mostramos então que se $f(g(c)) = f(g(d))$ então $c = d$. A volta é imediata.

(f) Verdadeiro, pois se $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$ então $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ e portanto $h(x)$ é ímpar.

7. Devemos achar as raízes das equações, ou seja, os valores de $x$ para os quais $f(x) = 0$.

(a) Seja $y = \cos x$, então $5y^2 - 3y + \frac{2}{5} = 0$ e portanto $y = \frac{2}{5}$ ou $y = \frac{1}{5}$. De maneira que $\cos x = \frac{2}{5}$ ou $\cos x = \frac{1}{5}$, então $x = \arccos\left(\pm\frac{1}{5}\right) + 2n\pi$ ou $x = \arccos\left(\pm\frac{2}{5}\right) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Seja $y = \sin^2 x$, então $y^2 - 3y + 2 = 0$ e assim, $y = 2$ ou $y = 1$. Portanto $\sin^2 x = 2$ ou $\sin^2 x = 1$, mas obviamente $\sin^2 x = 2$ não admite solução real, pois $|\sin x| \leq 1$, então $\sin x = \pm 1$ de modo que $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, com $n \in \mathbb{N}$.

(c) Lembrando que $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, temos: $4 - 4\sin^2 x + 2\sin x + 2\sqrt{3}\sin x = 4 + \sqrt{3}$ e definindo $y = \sin x$, tem-se: $y^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ de onde concluímos que $y = \frac{1}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. E finalmente, o conjunto solução é dado por: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ para $x \in [0, 2\pi]$.

(d) Seja $\log(x-4) = y$, $y^2 + 2\log 9y = \log^2 3 + \log^2 9 \Rightarrow y^2 + 4y\log 3 - 3\log^2 3 = 0$. Então $y = -\log 3$ ou $y = -3\log 3$. Portanto, $\log(x-4) = -\log 3 \Rightarrow x - 4 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{13}{3}$ ou $\log(x-4) = -3\log 3 \Rightarrow x - 4 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{109}{27}$.

(e) $e^{\cos x + \sin x} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\cos x - \sin x} = 0 \Rightarrow e^{\cos x + \sin x} - e^{-[\cos x - \sin x]} = e^{\sin x}\left(e^{\cos x} - e^{-\cos x}\right) = 0$, como $e^y \neq 0$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$ então $\left(e^{\cos x} - e^{-\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \cos x = -\cos x$ que só é satisfeito se $\cos x = 0$, então $x = n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$.