MAT 105 – Vetores e Geometria Analítica

PROVA 2 — GABARITO

Prof. Paolo Piccione

29 de junho de 2005

(1) O plano π que é ortogonal à reta r e passante por P tem equação : $x - 3y + z + 2 = 0$. A interseção de π com r é o ponto $Q = (-1, 0, -1)$. A distância entre P e r é, por definição, a distância entre P e Q: $\text{dist}(P, Q) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

(2) A reta r passante por P e ortogonal ao plano π_2 é:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

O ponto Q desejado é a interseção de r com π_1, dada por $Q = (4, 1, 2)$.

(3) O plano π que passa por A, B e C é dado pela equação $x - 2y + z + 1 = 0$. Esse plano contem o ponto D, o que prova que A, B, C e D são coplanares. Os vetores $BA = (1, 1, 1)_E$ e $CA = (2, 1, 0)_E$ não são L.D., o que prova que os pontos A, B e C não são alinhados, e portanto eles são os vértices de um triângulo. A reta r pelos pontos B e C tem equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1, \\ z = t. \end{cases}$$

O plano ρ passante por A e ortogonal a r tem equação cartesiana $\rho :\ x - z - 1 = 0$; a interseção de ρ com r é o proprio ponto B. Isso quer dizer que o triângulo ABC é *retângulo*. A altura desse triângulo relativa ao vértice A é a distância entre A e B: $\text{dist}(A, B) = \sqrt{3}$.

(4) O plano π passante por A, B e C é ortogonal ao vetor $AB \times AC$. A equação cartesiana de π é calculada facilmente: $\pi :\ 2x - y + 2z - 6 = 0$. A reta pela origem do sistema de coordenadas e ortogonal a π tem equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2t, \\ y = -t, \\ z = 2t, \end{cases}$$

e a interseção de r com π é o ponto $Q = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Este é o ponto de π mais próximo à origem do sistema de coordenadas.

(5) O plano π_1 é ortogonal ao vetor $N_1 = (2, -3, 4)_E$ e o plano π_2 é ortogonal ao vetor $N_2 = (1, -1, -1)_E$. Os vetores N_1 e N_2 são L.I., o que prova que π_1 e π_2 não são paralelos. O angulo θ entre π_1 e π_2 é, por definição, o ângulo entre N_1 e N_2, cujo cosseno é calculado usando o produto escalar: $\cos\theta = N_1 \cdot N_2 / \|N_1\|\,\|N_2\| = 1/\sqrt{87}$.