MAT 104 — CÁLCULO I

GABARITO LISTA DE EXERCÍCIOS 4

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: RENATO GHINI BETTIOL

Exercício 1.

(1) f tem dois pontos críticos no intervalo $[0, 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Temos $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. Segue que, no intervalo dado, o máximo da f é $\sqrt{2}$ e o mínimo é $-\sqrt{2}$.

(2) f tem dois pontos críticos no intervalo $[-2, 7]$: $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$. Temos $f(-2) = 2$, $f(-1) = 25$, $f(6) = -318$ e $f(7) = -295$. Segue que, no intervalo dado, o máximo da f é 25 e o mínimo é -318.

(3) f tem um ponto crítico no intervalo $[0, 1]$: $x_1 = \frac{20-\sqrt{376}}{6} \cong 0,1015$. Temos $f(0) = 0$, $f(x_1) \cong 0,1010$ e $f(1) = -7$. Segue que, no intervalo dado, o máximo da f é (aprox.) $0,1010$ e o mínimo é -7.

Exercício 2. Veja figuras.

Exercício 3. Um ponto P_x da parábola tem coordenadas (x, x^2); seja Q o ponto $(6, 3)$. A distância entre P_x e Q é dada por: $\mathrm{dist}(P_x, Q) = \sqrt{(6-x)^2 + (3-x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 5x^2 - 12x + 45}$. Basta encontrar o mínimo da função: $f(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 - 12x + 45}$ em $\mathbb{R}$. Observe que, para isso, como $y \mapsto \sqrt{y}$ é sempre crescente, basta analizar os extremos locais de $g(x) = [f(x)]^2$. Conclui-se que f tem apenas um ponto crítico, que é um ponto de mínimo absoluto, em $x = 2$; $f(2) = \sqrt{17}$.

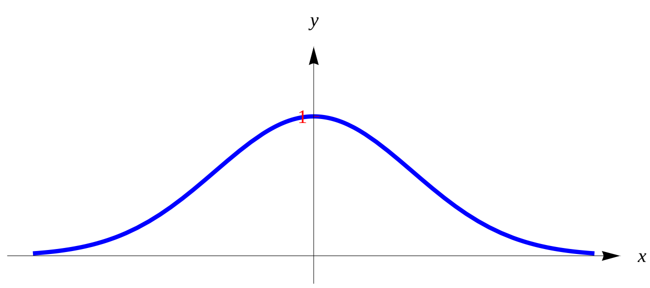

Figura 1. Gráfico de $y = e^{-x^2}$.

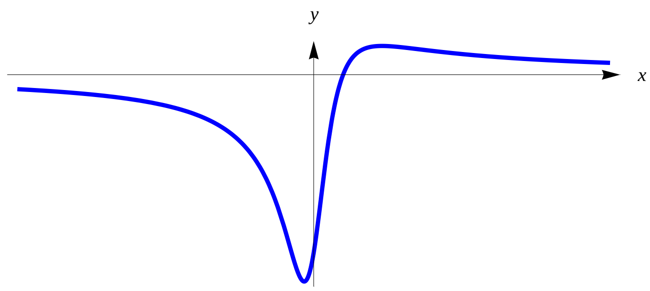

FIGURA 2. Gráfico de $y = \dfrac{x-2}{3+x^2}$.

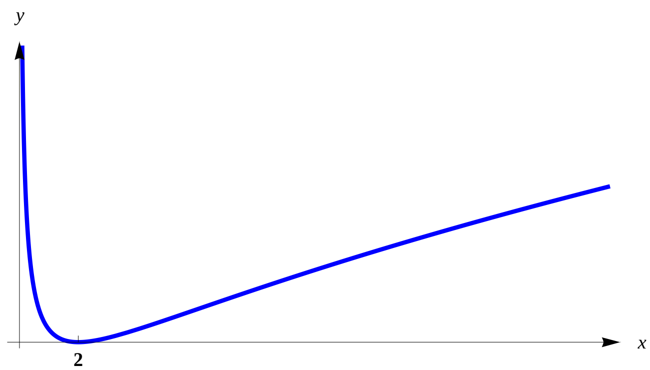

FIGURA 3. Gráfico de $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{2}$.

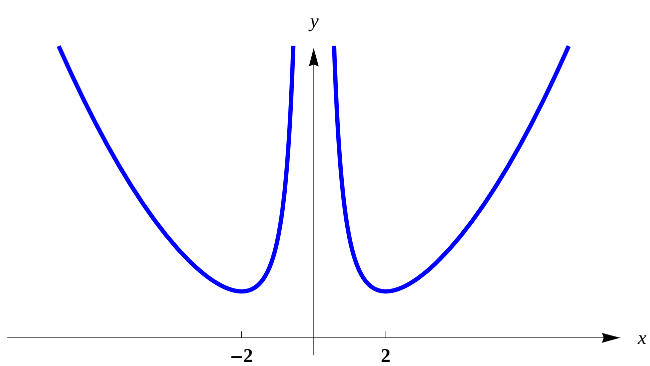

FIGURA 4. Gráfico de $y = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$.

Exercício 4. Basta calcular o mínimo da diferença: $16x^2 - (-\frac{1}{x^2}) = 16x^2 + \frac{1}{x^2}$. Esta função tem dois pontos de mínimo absoluto: $x = \pm\frac{1}{2}$. O valor mínimo da função é 8.

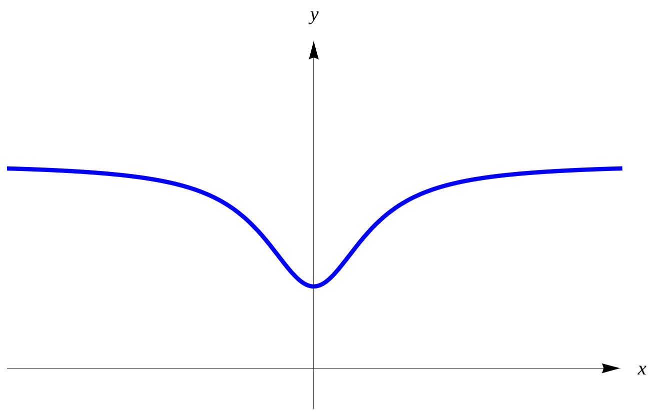

Figura 5. Gráfico de $y = \dfrac{5x^2+2}{x^2+1}$.

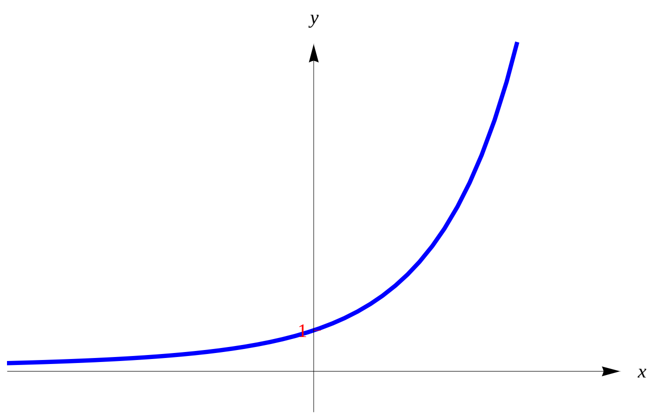

Figura 6. Gráfico de $y = \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercício 5. O valor de a pode ser calculado como o *máximo* da função $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}\,x-1}{x^2}$ em $]0,+\infty[$. Esta função tem um ponto de máximo absoluto em $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e o valor máximo é $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2$.

Exercício 6. A derivada segunda da $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ é dada por:

$$f''(x) = 2\big[(x-a)+(x-b)+(x-c)\big].$$

O ponto de inflexão da f é $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

Exercício 7.

(1) f tem dois pontos críticos, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Como $f''(x_1) < 0$, esse é um ponto de máximo local, e como $f''(x_2) > 0$, esse é um ponto de mínimo local.
(2) f tem um ponto crítico, $x_1 = 1$. Como $f'(x) = (x-1)^2 \geq 0$, f é sempre crescente, e o ponto crítico x_1 é um ponto de sela. Logo f não possui extremos locais.
(3) f tem dois pontos críticos, $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$. Como $f''(\frac{1}{2}) > 0$, esse é um ponto de mínimo local, e como $f''(1) < 0$, esse é um ponto de máximo local.

Exercício 8. A área da sala é dada pela função $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{L^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Basta calcular o máximo desta função para $x \in [0, 2L]$. O ponto de máximo é $x = L\sqrt{2}$, e o valor máximo é $f(L\sqrt{2}) = \frac{L^2}{4}$. Note que essa configuração que maximiza a área do triângulo corresponde àquela em que o triângulo é um triângulo retângulo (o ângulo entre os lados de comprimento L é $\frac{\pi}{2}$).

Exercício 9. O problema é totalmente análogo ao Exercício 8, com $L = 1$.

Exercício 10. Se A é o comprimento da trave, então $x - 2A$ é o comprimento do travessão. A área é dada por $f(A) = A(x - 2A)$. Basta calcular o máximo dessa função para $A \in [0, \frac{x}{2}]$. (Cuidado: aqui a variável é A, e x é uma constante fixada!) O ponto de máximo é $A = \frac{x}{4}$, e o máximo é $f(\frac{x}{4}) = \frac{x^2}{8}$.

Exercício 11.

(1) assíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$.
(2) assíntota horizontal $y = 5$ para $x \to +\infty$
(3) assíntota $y = x$ para $x \to \pm\infty$
(4) assíntota $y = x$ para $x \to \pm\infty$
(5) assíntota $y = 3x - 2$ para $x \to \pm\infty$
(6) assíntota $y = -2x + 1$ para $x \to \pm\infty$