OS TEOREMAS DE SINGULARIDADE E APLICAÇÕES

LEONARDO FRANCISCO CAVENAGHI

1. Introdução

A teoria de causalidade em geometria lorentziana surgiu com o intuito de justificar singularidades presentes em vários modelos relativísticos oriundos das soluções das equações de campo de Einstein. Penrose e Hawking fizeram grande progresso fundamentando matematicamente esta teoria, o que culminou numa série de teoremas de incompletude de geodésicas do tipo tempo e luz sob hipóteses físicas minimamente razoáveis para certos modelos físicos. Vide por exemplo [HEL73].

O intuito deste trabalho é apresentar de forma concisa uma demonstração para dois destes teoremas, um de Hawking (incompletude de geodésicas do tipo tempo) e um de Penrose (incompletude de geodésicas do tipo luz). Diferentemente da referência já citada, apresentamos uma demonstração mais geométrica que ainda mais, não utiliza o Teorema do Índice e é de fácil aplicação a determinados modelos físicos, como ilustramos aplicando os resultados no modelo cosmológico (FLRW), para justificar a existência de um Big Bang na origem do universo. A referência base foi [GN14].

2. Preliminares

Definição 1. *Um espaço tempo (M, g) é dito estavelmente causal se existir uma função sobrejetora e suave $t : M \to \mathbb{R}$ tal que ∇t é do tipo tempo e ∇t é orientado no passado. Chamamos t de função temporal.*

Em contrapartida a essa definição, poderíamos omitir o último requerimento para ∇t e nesse caso, (M, g) admiria uma nova orientação no futuro induzida por $-\nabla t$.

Vimos em aula que um espaço tempo (M, g) é dito *globalmente hiperbólico* se (M, g) é cronológica e se os diamantes $J^+(p) \cap J^-(q)$, $p, q \in M$ são compactos. Apresentamos aqui uma caracterização geral destes espaços tempos envolvendo a existência de uma função temporal t. Isto será importante para a versão dos Teoremas de singularidades que apresentaremos.

Teorema 2.1 (Theorem 3.6.3)**.** *Seja (M, g) um espaço tempo. Então, são equivalentes:*

(1) (M, g) *é globalmente hiperbólico;*
(2) (M, g) *admite uma hipersuperfície de Cauchy, isto é, uma hipersuperfície S tal que toda curva inextensível em M cruza S uma única vez;*
(3) (M, g) *é estavelmente causal e $t^{-1}(a) := S_a$ é uma hipersuperfície de Cauchy para todo $a \in \mathbb{R}$;*
(4) (M, g) *admite uma hipersuperfície de Cauchy do tipo espaço;*

(5) *(M,g) é estavelmente causal e $t^{-1}(a) := S_a$ são hipersuperfícies de Cauchy do tipo espaço para todo $a \in \mathbb{R}$, ademais, (M,g) é isométrico a um produto:*

$$S \times \mathbb{R},\ -\beta dt^2 + \bar{g},$$

onde $S = t^{-1}(0), \beta : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e positiva e $\bar{g}$ é uma métrica riemanniana em cada hipersuperfície de Cauchy S_a.

Seja (M,g) um espaço tempo globalmente hiperbólico e seja S uma hipersuperfície de Cauchy de M do tipo espaço. Em cada pontp $p \in S$ temos que $\nabla t \perp S$ é um campo normal do tipo tempo. Sejam $W \ni \{0\} \times S$ e $\tilde{W} \subset T^{\perp}S$ vizinhanças abertas que trivializam o fibrado normal à S, isto é, $T^{\perp}S|_{\tilde{W}} \cong W \subset \mathbb{R} \times S$. Usando esta identificação escrevemos o mapa exponencial normal como:

$$\exp : W \subset \mathbb{R} \times S \to M,$$

$$(s,p) \mapsto c_p(s),$$

onde c_p é a única geodésica com condições iniciais $c_p(0) = p, c'(0) = \nabla t(p)$.

Assim, se $q = \exp(s', p)$ é um valor não crítico do mapa exp e $U \ni p$ denota uma vizinhança coordenada de p em S, definimos um sistema de coordenadas numa vizinhaça de q da seguinte maneira: seja

$$(s, \varphi),\ \varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to U,$$

um sistema de coordenadas em $\mathbb{R} \times U$. Então, a composição:

$$\psi : \mathbb{R}^n \ni (s, x^i) \mapsto \exp(s, \varphi(x^i)) \in M,$$

define um sistema de coordenadas locais numa vizinhança de $c_p(s) \in M$, lembrando que $\varphi(0) = p$. Denotaremos:

$$\frac{\partial}{\partial s} := \psi_*(s,0)(e_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} := \psi_*(s,0)(e_i),\ i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Note que

$$\psi(se_1) = \exp(s,p) := c_p(s),$$

de onde,

$$\psi_*(s_0,0)(e_1) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} \psi(se_1) = c_p'(s_0),$$

de onde $\frac{\partial}{\partial s}$ é tangente à geodésica ortogonal saindo de p.

Vamos computar as componentes de g com respeito ao sistema de coordenadas induzidas por ψ. Assumamos que $\frac{\partial}{\partial s}$ seja unitário. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \\
&= g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial s}\right), \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, $g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \equiv 0$ já que em $s = 0$ a geodésica $c_p(s)$ é ortogonal a S. De onde inferimos que a métrica g se escreve na vizinhança de q como:

$$g = -ds^2 + \sum_{i,j} \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde $\gamma_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

Note, entretanto, que os campos $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ sempre podem ser estendidos ao longo de c_p. Em particular, se existir um instante s_0 tal que (s_0, p) seja um ponto crítico de exp, então o determinante da matriz $\gamma = (\gamma_{ij})$ será zero. Nesse caso, o ponto $\exp(s_0, p)$ será dito *ponto focal* de S.

Note que os campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ são campos de Jacboi ao longo de $c_p(s)$ e $\det\gamma = 0$ se e só se o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é linearmente dependente.

Definição 2. *O referencial acima construido ao longo de $c_p(s)$ é chamado de referencial sincronizado.*

Proposição 2.2. *As seguintes fórmulas são verdadeiras:*

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^i_{00} = 0 \quad e \quad \Gamma^i_{0j} = \sum_i \gamma^{ki}\beta_{kj},$$

onde $\gamma^{ki} := (\gamma_{ki})^{-1}$, $\beta_{kj} := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\gamma_{kj}$.

$$R_{00} := \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i,j}\gamma^{ij}\beta_{ij}\right) - \sum_{i,j,k,l}\gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj}.$$

A quantidade,

$$\theta := \sum_{i,j}\gamma^{ij}\beta_{ij}, \tag{1}$$

será chamada de *expansão dos observadores sincronizados.*

A função θ tem uma improtante interpretação:

$$\theta = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left((\gamma_{ij})^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\gamma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\log\det\gamma = \frac{\partial}{\partial s}\log\sqrt{\det\gamma}.$$

Isto é, θ mede a variação medida por observadores sincronizados ao longo de γ do elemento de volume de S.

Observação 1. *Nas igualdades de θ usamos a identidade válida para curvas suaves em $GL(n-1,\mathbb{R})$:*

$$(\log(\det A))' = \mathrm{tr}(A^{-1}A').$$

Relembre que a equação de campo de Einstein é dada por:

$$\mathrm{Ric}(g) - \frac{S}{2}g = \kappa T,$$

onde κ é uma constante física positiva.

Assuma que $\mathrm{Ric}(V,V) \geq 0$ para todo campo unitário do tipo tempo V. Então,

$$\kappa T(V,V) + \frac{S}{2} \geq 0.$$

Tomando o traço na equação de Einstein,

$$(n-1)S - \frac{S}{2}(n-1) = \mathrm{tr}\ \kappa\ T,$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) S = \kappa \text{ tr } T.$$

Daí, $\text{Ric}(V,V) \geq 0$ implica que:

$$\kappa \left(T(V,V) + \frac{1}{n-1} \text{tr } T \right) \geq 0.$$

A condição $\text{Ric}(V,V) \geq 0$ para vetores do tipo tempo, impõe, portanto, restrições no tensor engeria momento.

Proposição 2.3. *Seja (M,g) um espaço tempo globalmente hiperbólico. Assuma que $\text{Ric}(V,V) \geq 0$ para todo campo unitário do tipo tempo. (**Condição forte de energia**). Seja $S \subset M$ uma hipersuperfície de Cauhcy e $p \in S$ tal que $\theta(p,0) = \theta_0 < 0$. Então, a geodésica c_p contém pelo menos um ponto focal a p em um instante máximo (medido em um parâmetro afim de tempo) de $-\frac{(n-1)}{\theta_0}$ no futuro de S (assumindo que a geodésica esteja definida pelo menos até este instante).*

Demonstração. Por hipótese $R_{00} \geq 0$. Daí, concluímos que:

$$\frac{\partial}{\partial s}\theta + \sum_{i,j,k,l} \gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj} \leq 0.$$

Assumindo um referencial ortonormal, teremos $\gamma^{ij} = \delta_{ij}$. De onde,

$$\sum_{i,j,k,l} \gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj} = \text{tr}\left((\beta_{ij})\ (\beta_{ij})^t\right) \geq \frac{1}{n-1}\theta^2,$$

onde usamos que:

$$(\text{tr } A)^2 \leq n \text{ tr}(AA^t),\ A \in GL(n,\mathbb{R}).$$

Concluímos portanto que:

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0.$$

Integrando em ambos os lados:

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{s}{3}.$$

Se $\theta \to \infty$, então,

$$s \leq -\frac{3}{\theta_0},$$

de onde θ deve explodir em um instante até $-\frac{3}{\theta_0}$. □

Listamos agora alguns resultados que foram/serão vistos em outros seminários, que podem ter uma apresentação diferente dependendo do material de referência, e que não provaremos mas serão essenciais para provar o Teorema de Singularidade de Hawking.

Proposição 2.4. *Sejam (M,g) um espaço tempo globalmente hiperbólico, S uma hipersuperfície de Cauchy, $p \in M$ e c uma geodésica do tipo tempo que passa por p e atinge S ortogonalmente. Se existir um ponto focal entre p e S, então c não maximiza comprimento (entre todas as outras geodésicas ligando p a S).*

Definição 3. *Seja S uma hipersuperfície de Cauchy. Definimos o domínio de dependência futuro de S por:*

$$D^+(S) := \{p \in M : \text{toda curva inextensível no passado começando em } p \text{ intersecta } S\}.$$

Analogamente, o domínio de dependência passado de S é definido por:

$$D^-(S) := \{p \in M : \text{toda curva inextensível no futuro começando em } p \text{ intersecta } S\}.$$

Observação 2. *Uma hipersuperfície $S \subset (M, g)$ é de Cauchy se, e somente, se $D(S) := D^+(S) \cup D^-(S) = M$.*

Proposição 2.5. *Sejam (M, g) um espaço tempo globalmente hiperbólico, S uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in D^+(S)$. Então, $D^+(S) \cap J^-(p)$ é compacto.*

A proposição acima é usada para provar o importante resultado:

Teorema 2.6 (Avez–Seifert)**.** *Sejam (M, g) um espaço tempo globalmente hiperbólico, S uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in D^+(S)$. Então, dentre todas as curvas do tipo tempo ligando p a S existe uma curva do tipo tempo que maximiza a distância, e esta é uma geodésica do tipo tempo ortogonal a S.*

3. O Teorema de singularidade de Hawking e Cosmologia

Agora estamos em condições de enunciar e provar o Teorema de singularidade de Hawking. Posteriormente aplicaremos este resultado em alguns modelos físicos.

Teorema 3.1 (Hawking)**.** *Seja (M, g) um espaço tempo globalmente hiperbólico satisfazendo a condição forte de energia. Assuma que exista uma hipersuperfície de Cauchy S tal que a expansão θ satisfaça $\theta(p, 0) \leq \theta_0 < 0$, $\forall p \in S$. Então, nenhuma geodésica do tipo tempo orientada no futuro que comece ortogonal a S pode ser estendida ao futuro de S a um tempo próprio τ_0 maior que $-\frac{3}{\theta_0}$.*

Demonstração. Assuma por contradição que a tese seja falsa. Então, existe uma geodésica c que começa ortogonal a S, é orientada no futuro definida em $[0, -\frac{3}{\theta_0} + \epsilon]$, para algum $\epsilon > 0$. Seja $p = c_p(\tau_0 + \epsilon)$, $\tau_0 := -\frac{3}{\theta_0}$. Note que $p \in D^+(S)$. Então, pelo Teorema de Avez–Seifert existe uma geodésica do tipo tempo γ ligando S a p com maior comprimento possível. Neste caso, $\tau(\gamma) \geq \tau_0 + \epsilon$. Entretanto, pela Proposição 2.3, Σ tem um ponto focal ao longo de γ até no máximo τ_0. Pela Proposição 2.4, a geodésica γ não maximizaria o comprimento a partir deste ponto, o que é absurdo. $\square$

Observação 3. *O parâmetro de tempo próprio é definido por: se $c : [a, b] \to M$ é uma curva suave, então,*

$$\tau(c) := \int_a^b |c'(s)| ds,$$

$$|c'(s)| = \sqrt{|g(c'(s), c'(s))|}.$$

Observação 4. *Vale um Teorema análogo trocando $\theta \geq \theta_0 > 0$ em S. Nesse caso, nenhuma geodésica do tipo tempo ortogonal a S pode ser estendida a um tempo próprio maior que $\frac{3}{\theta_0}$ além do passado de S.*

Vamos aplicar este Teorema num importante modelo cosmológico.

Exemplo 1 (Modelo cosmológico de **Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)**). *Seja (Σ, h) uma 3-variedade Riemanniana onde h é escrita localmente nas coordenadas $(r, \theta\, \phi)$ como:*

$$h := a\left(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2\right),\ a > 0,\ k = -1, 0, 1.$$

A fim de considerar possíveis dilatações e contrações do universo fazemos um produto vertical $\mathbb{R} \times \Sigma$ e a fica dependente do tempo, de onde o espaço tempo (FLRW) será $\mathbb{R} \times \Sigma$ com métrica:

$$g = -dt^2 + a(t)\left(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2\right).$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci desta métrica são dadas por:

$$R_{00} = -3\frac{a''}{a},$$
$$R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = \frac{a''}{a} + 2\frac{(a')^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}.$$

Neste modelo assume-se que o espaço se comporta como um fluido sem pressão e pela hipótese de isotropia, pede-se que o tensor energia momento varie só com o tempo. Isto é,

$$T = \rho dt \otimes dt.$$

Daí, a equação de campo de Einstein se torna:

$$\mathrm{Ric}(g) = \kappa\rho\left(dt \otimes dt + \frac{1}{3}g.\right)$$

Assumindo $\rho > 0$ temos que este espaço satisfaz a condição forte de energia. Verifica-se ainda que:

$$\beta_{ij} = \frac{a'}{a}\gamma_{ij} \Rightarrow \theta = 3\frac{a'}{a}.$$

Assuma que o modelo se expanda em um instante t_0, nesse caso, $a'(t_0) > 0$. Daí, $\theta = \theta_0 = 3\frac{a'(t_0)}{a(t_0)} > 0$ na superfície de Cauchy $t = t_0$. Podemos aplicar a Observação 4 para concluir que existe uma singularidade no passado de S, o que se entende fisicamente como um Big Bang.

4. O Teorema de Singularidade de Penrose

Para o Teorema de Pensore pedimos uma condição diferente na energia. A *condição nula de energia* consiste em pedir que $\mathrm{Ric}(V, V) \geq 0$ para todo campo unitário do lipo luz V.

O nosso objetivo é provar o seguinte Teorema:

Teorema 4.1 (Penrose). *Seja (M, g) um espaço tempo globalmente hiperbólico satisfazendo a condição nula de energia que admite uma superfície de Cauchy não compacta S contendo uma hipersuperfície compacta e $(n-2)$-dimensional aprisionada Σ, então (M, g) é singular.*

Para entender o que significa uma hipersuperfície aprisionada passemos a uma discussão similar à realizada na Seção 2. Seremos muito mais sucintos nas próximas linhas, principalmente no que se refere à contas com coordenadas, acreditamos que estas podem ser facilmente reproduzidas.

Sejam $(M,g), S, \Sigma$ como nas hipóteses do Teorema 4.1. Seja η o campo unitário do tipo tempo normal à S e ν o campo unitário normal à Σ e tangente à S. Note que ν é do tipo espaço porque S é do tipo espaço. Ainda mais, o campo $\eta+\nu$ é um campo do tipo luz com domínio em Σ. Consideramos o mapa:

$$\exp : (-\epsilon,\epsilon)\times\Sigma \to M,\ \epsilon>0,$$

$$(r,p)\mapsto \exp(r,p) := c_p(r),$$

onde c_p é a única geodésica do lipo luz com condição inicial $c_p(0)=0, c_p'(0)=\eta_p+\nu_p$.

Seja $q=\exp(r_0,p)$ um valor não crítico de exp. Vamos construir um sistema de coordenadas numa vizinhança de q da mesma forma que fizemos na Seção 2. Assuma que $\varphi:\mathbb{R}^{n-2}\to U\ni p$ é um sistema de coordenadas locais para uma vizinhança de p. Então, podemos induzir um sistema de coordenadas em q fazendo:

$$\psi:\mathbb{R}^n\ni(u,r,x^i)\mapsto \exp(r,\phi_u(\varphi(x^i))),\ i\in\{3,\dots,n\},$$

onde $\exp:(-\epsilon,\epsilon)\times\phi_u(\Sigma)\to M$ é definido como acima e ϕ_u é o fluxo gerado pelo campo do tipo tempo $\frac{\partial}{\partial u}$ unitário e normal a S.

Note que:

$$\psi(u,r,0)=\exp(r,\phi_u(p)) := c_{\phi_u(p)}(r),$$

de onde vemos que $\frac{\partial}{\partial r}$ são os campos tangentes às geodésicas do tipo luz. Daí, $g\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)$ e computando $\frac{\partial}{\partial r}g_{r\mu}$, onde $\mu\in\{u,3,\dots,n\}$, verifica-se que neste sistema de coordenadas a métrica g se escreve como:

$$g=\alpha du^2-dr^2-dr\otimes du+\sum_{i=3}^{n}\beta_i\left(du\otimes dx^i+dx^i\otimes du\right)+\sum_{i,j=3}^{n}\gamma_{ij}dx^i\otimes dx^j,$$

onde γ_{ij} e β_{ij} são como antes, isto é, $i,j\in\{3,\dots,n\}$.

Uma conta direta verifica que:

$$\det g=-\det(\gamma_{ij}),\ i,j\in\{3,\dots,n\}$$

Dessa maneira, recuperamos a mesma interpretação de antes e diremos que um ponto $q=\exp(r_0,p)$ é focal ao longo de $c_p(r)$ se $\det\gamma(s_0)=0$.

De maneira completamente análoga, $\theta=\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{\det\gamma}$. Ou seja, θ indica a variação do volume da hipersuperfícine $(n-2)$-dimensional dada pela imagem $\exp(r,\phi_u(\Sigma))$.

Proposição 4.2. *As seguintes fórmulas são verdadeiras:*

$$\Gamma^u_{ur}=\Gamma^u_{rr}=\Gamma^u_{ri}=\Gamma^r_{rr}=\Gamma^i_{rr}=0\quad e\quad \Gamma^i_{rj}=\sum_{k=3}^{n}\gamma^{ik}\beta_{kj}.$$

$$R_{rr}=\mathrm{Ric}(\partial_r)=-\frac{\partial}{\partial r}\sum_{i,j=3}^{n}\gamma^{ij}\beta_{ij}-\sum_{i,j,k,l=3}^{n}\gamma^{jk}\gamma^{il}\beta_{ki}\beta_{lj}.$$

Proposição 4.3. *Seja (M,g) um espaço tempo globalmente hiperbólico satisfazendo a condição nula de energia, $S\subset M$ uma hipersuperfície de Cauchy, $\Sigma\subset S$ uma hipersuperfície compacta de dimensão $(n-2)$ com campo unitário normal ν tangente a S. Seja $p\in\Sigma$ um ponto tal que $\theta(p,0)=\theta_0<0$. Então, a geodésica nula c_p contém pelo menos um ponto focal a Σ a um instante até no máximo $-\frac{(n-2)}{\theta_0}$ no futuro de Σ. (Assumindo que a geodésica se estenda pelo menos até tal instante).*

Demonstração. Como (M, g) satisfaz a condição fraca de energia temos que:

$$R_{rr} \geq 0,$$

de onde,

$$\frac{\partial}{\partial r} \sum_{i,j=3}^{n} \gamma^{ij} \beta_{ij} + \sum_{i,j,k,l=3}^{n} \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj} \leq 0.$$

Podemos utilizar exatamente o mesmo argumento que na Proposição 2.3 para deduzir a EDO:

$$\frac{\partial}{\partial r}\theta + \frac{1}{2}\theta^2 \leq 0.$$

Integrando nós obtemos:

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{r}{n-2},$$

o que conclui a demonstração. □

Lembremos que:

$$I^+(\Sigma) := \bigcup_{p \in \Sigma} I^+(p) \quad \text{e} \quad I^-(\Sigma) := \bigcup_{p \in \Sigma} I^-(p).$$

Ainda mais, $J^+(\Sigma), J^-(\Sigma)$ são definidos de maneira análoga e ainda,

$$J^+(\Sigma) \subset \overline{I^+(\Sigma))}, \; I^+(\Sigma) = \text{int} J^+(\Sigma),$$
$$\partial I^+(\Sigma) = \partial J^+(\Sigma) = J^+(\Sigma) \setminus I^+(\Sigma).$$

Em particular, cada ponto em $\partial J^+(\Sigma)$ pode ser atingido por uma geodésica nula partindo de um ponto interior a Σ. Acontece que essa geodésica é ortogonal a Σ.

A próxima Proposição dá uma condição suficiente para que uma geodésica do tipo luz inicialmente ortogonal à Σ entrar em $I^+(\Sigma)$.

Proposição 4.4. *Seja (M, g) um espaço globalmente hiperbólico satisfazendo a condição nula de energia, S uma hipersuperfície de Cauchy contendo uma hipersuperfícine $(n-2)$-dimensional compacta Σ. Sejam η, ν os campos unitários normais a S e Σ, respectivamente. Seja $p \in \Sigma$ e denote por c_p a única geodésica do tipo luz com condições iniciais $p, \eta_p + \nu_p$. Seja $q = c_p(r)$, $r > 0$. Se c_p tem um ponto focal a Σ entre p e q, então $q \in I^+(p)$.*

Definição 4 (Hipersuperfície aprisionada)**.** *Sejam (M, g) um espaço globalmente hiperbólico e S uma hipersuperfície de Cauchy contendo uma hipersuperfície $(n-2)$-dimensional Σ. Sejam η, ν os campos normais a S e Σ, respectivamente. Defina por $\theta^{\pm}$ as expansões associadas às geodésicas definidas com condição $\eta \pm \nu$. Dizemos que Σ é aprisionada se $\theta^{\pm}$ for estritamente negativo em Σ, isto é, $\theta^{\pm}(p, 0) < 0$, $\forall p \in \Sigma$.*

Demonstração do Teorema 4.1. Seja S a hipersuperfície de Cauchy não compacta da hipótese e assuma que $S = t^{-1}(0)$ para alguma função temporal t no espaço tempo globalmente hiperbólico. Seja Σ a hipersuperfície aprisionada em S. Note que as curvas integrais geradas por ∇t cruzam S uma vez e cruzam $\partial I^+(\Sigma)$ no máximo uma vez. Em particular, isto permite definir um mapa contínuo, injetivo e aberto:[1]

$$\pi : \partial I^+(\Sigma) \to S.$$

[1]Verifique que é aberto!

Como Σ é compacta e aprisionada existe $\theta_0 < 0$ tal que $\theta^{\pm}(p, 0) \leq \theta_0$, $\forall p \in \Sigma$. Vamos mostrar que existe uma geodésica nula saindo de Σ que não pode ser estentida mais que um instante $r_0 = -\frac{n-2}{\theta_0}$. Suponha por absurdo que este não seja o caso. Mas então, *toda* geodésica começando em Σ teria um ponto focal pelo menos a partir de r_0 (Veja a Proposição 4.3). Nesse caso, a proposição 4.4 diz que estas geodésicas entram em $I^+(\Sigma)$. Assim,

$$\partial I^+(\Sigma) \subset \exp^+([0, r_0] \times \Sigma) \cup \exp^-([0, r_0] \times \Sigma),$$

onde $\exp^{\pm}$ são as exponenciais normais a depender da convenção $\eta \pm \nu$.

Mas note que $\partial I^+(\Sigma)$ é um subconjunto fechado de um compacto, de onde é compacto. Como π é contínua, então a imagem deste conjunto por π é fechada. Mas M e S são conexos, daí $\partial I^+(\Sigma)$ é homeomorfo a S, o que é absurdo pois S é não compacta. $\square$

Referências

[GN14] L. Godinho and J. Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity.* Universitext. Springer International Publishing, 2014.

[HEL73] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, and P.V. Landshoff. *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge Monographs on Mathem. Cambridge University Press, 1973.