O básico de geometria riemanniana para cálculo variacional

Leonardo F. Cavenaghi

19 de agosto de 2019

Sumário

1 Prelúdio: métricas riemannianas

Seja M^n uma variedade suve de dimensão n. Denotaremos por (U, φ) uma carta local em M ao redor de um ponto $p \in M$. Isto é,

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi(q) = \left(x^1(q), \dots, x^n(q)\right),\ q \in U,\ x^i : U \to \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\},$$

onde φ é um homeomorfismo tal que $\varphi(p) = \vec{0}$.

O **espaço tangente** a M em p é o espaço vetorial gerado por elementos da forma $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{i=1}^{n}$, tais que se $f : U \to \mathbb{R}$, então

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f \circ \varphi^{-1}\right)(te_i), \; e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

O **fibrado tangente** consiste na variedade TM de dimensão $2n$ definida por

$$TM := \{(p, v) : p \in M, \; v \in T_pM\}.$$

Note que podemos definir um espaço dual a T_pM para cada $p \in M$ da seguinte maneira:

$$T_p^*M := \left\{dx^i, \; i = 1, \dots, n : dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x^i \circ \varphi^{-1}(te_j) = \delta_{ij}\right\}.$$

Pode-se construir uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, chamada de **fibrado cotangente**, que coleciona os espaços **cotangentes** T_p^*M, definida por

$$T^*M := \left\{(p, \theta) : p \in M, \; \theta \in T_p^*M\right\}.$$

Todas as operações que podemos fazer com espaços vetoriais se estendem aos fibrados tangente e cotangente de maneira natural. Em particular, se denotarmos por $\mathrm{Sym}\,(T^*M \otimes T^*M)$ o fibrado cujas **fibras** são um produto simétrico de duas cópias de T_pM para cada $p \in M$, uma **métrica riemanniana** é uma função suave

$$g : M \to \mathrm{Sym}^+\,(T^*M \otimes T^*M)$$

tal que para cada $p \in M$, $g(p)$ é uma forma bilinear simétrica e positiva definida. A maneira correta de pensar numa métrica riemanniana é, portanto, uma regra (suave) que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g(p)$ em T_pM. Dessa maneira, g se escreve em uma carta local ao redor de $p \in M$ como

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j,$$

onde $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves que satisfazem

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij}.$$

Uma variedade suave M munida de uma métrica riemanniana g será chamada de **variedade riemanniana** (M, g).

Proposição 1.1. *Toda variedade suave admite uma métrica riemanniana.*

Demonstração. A prova desse fato, em geral, faz uso de partições da unidade, mas se o leitor é familiar com topologia diferencial há de saber que existe um mergulho $F : M \to \mathbb{R}^N$ para N grande. A variedade $\mathbb{R}^N$ admite uma métrica riemanniana, dada por qualquer escolha de produto interno em $\mathbb{R}^N$[1] visto como espaço vetorial. Pode-se, portanto, definir uma métrica riemanniana g em M por

$$g := F^*(\langle , \rangle),$$

onde F^* denota o pullback por F. $\square$

Observação. *A escolha dessa demonstração é muito natural se pensarmos que em uma superfície, que é o primeiro modelo de variedade riemanniana (e também o mais simples (e não trivial)), as métricas naturais são induzidas por restrições de produtos interno em $\mathbb{R}^3$. Esperamos deixar isso mais claro a seguir nos exemplos.*

1.1 Exemplos

Daremos alguns exemplos muito simples de métricas riemannianas.

1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico $\langle , \rangle$. De fato, se escrevermos um ponto $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$g(\vec{x})(\vec{v}, \vec{w}) := \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij} dx^i(\vec{v}) dx^j(\vec{w}),\ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

2. Um cilíndro $C := \mathbb{R} \times M^2$, onde M^2 é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Lembramos que nesse caso, vetores tangentes a M^2 sempre podem ser vistos em $\mathbb{R}^3$. Assim, uma métrica riemanniana natural a se considerar em M consiste na restrição de uma métrica riemanniana em $\mathbb{R}^3$ a M (como por exemplo, a métrica do primeiro item). Note que $\mathbb{R}$ é uma variedade riemanniana de dimensão 1 e métrica $g_0 = dt^2$, onde o espaço tangente a $\mathbb{R}$ pode ser visto simplesmente como o espaço vetorial de dimensão 1 gerado por $\left\{\frac{d}{dt}\right\}$, $t \in \mathbb{R}$, e $dt^2 := dt \otimes dt$. Assim, podemos introduzir uma métrica riemanniana em C via a fórmula

$$\begin{aligned} g_C &:= g_0 + i^*(\langle , \rangle), \\ g_C &= dt^2 + i^*\left(\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j\right), \end{aligned}$$

onde $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão e i^* denota o pullback por i.

3. Produtos verticais (warped products). Ainda considerando $C := \mathbb{R} \times M^2$, se $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave podemos introduzir uma nova métrica em C, chamada de **métrica de produto vertical** (warped product metric)

$$g_C^\psi := dt^2 + \psi(t) i^*(\langle , \rangle).$$

[1]Veja o primeiro exemplo abaixo.

4. O plano hiperbólico. Considere o espaço

$$\mathbb{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}.$$

Pode-se definir uma métrica riemanniana em $\mathbb{H}$ colocando

$$g := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \ dx^2 := dx \otimes dx, \ dy^2 := dy \otimes dy.$$

2 Conexões, geodésicas e comprimento de arco

2.1 Derivadas covariante

Considere o espaço $\mathbb{R}^3$. Se tomamos duas funções vetoriais $X : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, Y : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, como podemos calcular a *derivada direcional* de X na direção de Y? Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função suave em U, então a derivada direcional de f em relação a Y em um ponto $p \in U$ é dada por

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \varphi_Y),$$

onde φ_Y é o fluxo gerado por Y começando em p. Isto é, é a única solução $\varphi_Y(t)$ *local* do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_Y(t) = Y(\varphi_t), \\ \varphi_Y(0) = p \end{cases}.$$

É fácil verificar, via regra da cadeira, que se $\vec{\nabla} f$ denota o gradiente de f, então

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \varphi_Y) = \langle \vec{\nabla} f, Y(p) \rangle,$$

onde $\langle , \rangle$ é a métrica canônica de $\mathbb{R}^3$.

Podemos estender essa definição e pregar que a derivada de X na direção de Y seja simplesmente

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (X \circ \varphi_Y).$$

Assim, essa conta diz que a derivada de X em relação a Y é a derivada direcional de cada função coordenada de X na direção de Y.

Em uma variedade riemanniana, um campo vetorial é uma aplicação suave $X : M \to TM$, isto é, é uma regra que associa (de maneira suave) a cada ponto p de M, um vetor tangente $X(p)$. Dessa maneira, em coorenadas locais podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde $f^i : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves.

Podemos estender (simplesmente copiando) a definição de derivada covariante em $\mathbb{R}^3$ para variedades. Mas isso gera um problema. A falta de **covariância**, ou simplesmente, essa noção *depende* do sistema de coordenadas.

Entrentanto, se $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ e M está munida de uma métrica riemanniana, existe um único campo de vetores, tal que denotaremos por ∇f, que satisfaz

$$X[f] := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \varphi_X)(t) = g(\nabla f, X),$$

onde φ_X é o fluxo local de X.

Definição 1. *O campo* ∇f *é chamado* ***gradiente*** *de* f *com respeito a* g.

A solução para evitar a falta de covariância consiste em introduzir **conexões**. Denote por $\Gamma(TM)$ o módulo dos campos vetoriais suaves sobre M.

Definição 2. *Uma* ***conexão*** ∇ *em* TM *é uma aplicação*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

tal que

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \Gamma(TM), f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

A princípio não está clara a relação desse mapa com derivação de campos vetoriais, mas a seguinte proposição estabelece a relação.

Proposição 2.1. *Seja* M *uma variedade suave com uma conexão* ∇. *Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo de uma curva suave* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c, *denominada* ***derivada covariante*** *de* V *ao longo de* c *tal que:*

(a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$,

(c) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \Gamma(TM)$, *ou seja,* $V(t) = (Y \circ c)(t)$, *então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y,$$

onde W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função suave em* $I \subset \mathbb{R}$.

A última linha faz sentido pois $\nabla_X Y(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de Y ao longo de uma curva tangente a $X(p)$. De fato, escrevamos

$$X = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} g^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Vamos usar as propriedades da conexão para obter uma expressão em coordenadas locais para $\nabla_X Y(p)$.

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_{j=1}^n g^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n f^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n f^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g^j \frac{\partial}{\partial x^j} + g^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).
\end{aligned}$$

Escrevendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ para algumas funções suaves Γ_{ij}^k concluímos que

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n f^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g^j \frac{\partial}{\partial x^j} + g^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

Rearranjando os índices:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n f^i g^j \Gamma_{ij}^k + X[g^j] \right),$$

onde $X[g^j]$ denota a derivada direcional de g^j na direção de X.

Definição 3. *Os símbolos* $\left\{\Gamma_{ij}^k\right\}$ *são chamados de* ***símbolos de Christoffel****, e eles determinam completamente a conexão.*

Definição 4. *Seja* M *uma variedade suave com uma conexão* ∇*. Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado* ***paralelo*** *quando* $\frac{DV}{dt} = 0 \; \forall t \in I$.

Observação. *Quando falarmos de conexão riemanniana ficará claro que campos paralelos ao longo de uma curva fazem ângulo constante com a curva em todo instante!*

Proposição 2.2. *Seja* M *uma variedade suave munida de uma conexão* ∇*. Seja* $c : I \to M$ *uma curva suave em* M *e* V_0 *um veor tangente a* M *em* $c(t_0)$, $t_0 \in I$*. Então, existe um único campo de vetores paralelo* V *ao longo de* c *tal que* $V(t_0) = V_0$.

Definição 5. $V(t)$ *é chamado de* ***transporte paralelo*** *de* V_0 *ao longo de* c.

Demonstração. Note que $\frac{DV}{dt} = 0$ consiste em um sistema de n-equações diferenciais lineares de primeira ordem. De fato,

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} \tilde{V},$$

onde $\tilde{V}$ é um campo em M tal que $(\tilde{V} \circ c)(t) = V(t)$. Escrevendo

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\tilde{V} = \sum_{j=1}^{n} g^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

concluímos que

$$\frac{DV}{dt} = 0 \Leftrightarrow 0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} g^k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g^j \frac{dc^i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Dada a condição inicial $V(t_0) = V_0$, a existência e unicidade do transporte paralelo segue do Teorema de Existência e Unicidade de EDO's lineares de primeira ordem. □

2.2 Conexões riemannianas

Definição 6. *Seja* M *uma variedade suave com uma conexão* ∇ *e uma métrica riemanniana* g. *A conexão* ∇ *é dita* ***compatível*** *com* g *quando, para toda curva diferenciável e para quaisuqer pares de campos de vetores paralelos* P *e* $\tilde{P}$ *ao longo de* c, $g(P, \tilde{P}) =$ *constante.*

Para justificar essa definição, lançamos mão da seguinte proposição que mostra ser possível, quando ∇ é compatível com g, derivar $g(P, \tilde{P})$ utilizando a regra de Leibiniz.

Proposição 2.3. *Seja* (M, g) *uma variedade riemanniana. Uma conexão* ∇ *em* M *é compatível com a métrica* g *se, e somente se, para todo par* V, W *de campos de vetores ao longo de uma curva suave* $c : I \to M$ *tenhamos*

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right).$$

Corolário 2.4. *Uma conexão* ∇ *em uma variedade riemanniana* M *é compatível com a métrica se, e só se,*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \ \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Definição 7. *Uma conexão* ∇ *em uma variedade suave* M *é dita* ***simétrica*** *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

A nomenclatura justifica o fato de que se a conexão ∇ é simétrica, então, como $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, e assim,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Teorema 2.5 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade riemanniana* M*, existe uma única conexão* ∇ *em* M *que é simétrica e compatível com* g

Uma conexão ∇ como no teorema anterior é denominada **conexão de Levi-Civita** ou **riemanniana**. A prova desse teorema faz uso da chamada **fórmula de Koszul**

$$g\left(\nabla_Y X, Z\right) = \frac{1}{2}\{Xg(Y, Z) - Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z)\},$$

que tem como interessante aplicação o fato de que os símbolos e Christoffel ficam completamente determinados pela métrica g nesse caso. A saber,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} g^{km} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\}. \tag{1}$$

Terminamos a discussão sobre conexões voltando no assunto derivada covariante. Seja $c : I \to M$ uma curva suave em M e considere a aplicação

$$\tau := P_{c,t_0,t} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t)}M$$

definida por $P_{c,t_0,t}(v), \ v \in T_{c(t_0)}M$ sendo o transporte paralelo do vetor v ao longo da curva c. Então, τ é uma isometria linear entre $T_{c(t_0)}M$ e $T_{c(t)}M$.

Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$. Faça $c(t)$ ser o fluxo de X tal que $c(t_0) = p$. Então, pode-se mostrar que

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\tau\left(Y \circ c\right)(t)\right).$$

2.3 Geodésicas e vizinhanças normais

No que segue M é uma variedade riemanniana munida de uma conexão de Levi-Civita. Ademais, denotaremos $g := \langle , \rangle$.

Definição 8. *Uma curva suave* $\gamma : I \to M, \ I \subset \mathbb{R}$ *é dita geodésica em* $t_0 \in I$ *se*

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = 0.$$

Se essa equação valer para todo $t \in I$ *dizemos que* γ *é uma* ***geodésica****.*

Vale notar que geodésicas tem norma do **vetor velocidade** $\frac{d\gamma}{dt}$ constante. De fato,

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0.$$

O **comprimento de arco** de γ, a partir de uma origem fixa, por exemplo, t_0, é dado por

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'\| dt = c(t - t_0),\ \ c := \|\gamma'\|.$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Se $c = 1$ então diremos que γ está normalizada.

Em coordenadas locais, a equação $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ é escrita como

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d^2}{dt^2}\gamma_i + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = 0.$$

O fato dessa equação ser uma equação em segunda ordem apenas enfatiza que etamos *estudando a equação no espaço de soluções errados*. Essa equação pode ser convertida numa equação de primeira ordem, mas no fibrado tangente de M. De fato, fazendo a substituição

$$\zeta_k \leftrightarrow \frac{d\gamma_k}{dt}$$

obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_k}{dt} = \zeta_k \\ \frac{d\zeta_k}{dt} = -\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\zeta_i\zeta_j,\ \ k \in \{1,\ldots,n\}. \end{cases} \tag{2}$$

Seja portanto $\mathcal{U}$ um aberto coordenado em TM. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais lineares de primeira ordem, existe uma única solução maxial do problema (2). A saber, é o fluxo Φ do campo $\Xi \in \Gamma(TM)$

$$\Xi := \left(\zeta_1,\ldots,\zeta_n, -\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{1}\zeta_i\zeta_j,\ldots,-\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{n}\zeta_i\zeta_j\right).$$

Portanto, se $\pi : TM \to M$ denota a projeção no primeiro fator, dada uma condição inicial (p,v) para o problema (2), existe uma única geodésica partindo de p com velocidade inicial v dada por

$$\gamma(t) = \pi \circ \Phi(t).$$

Definição 9. *O* ***mapa exponencial*** *em* p*,* $\exp_p$ *é a aplicação*

$$\exp_p : T_pM \to M$$

definida por

$$\exp_p(v) := (\pi \circ \Phi)(b),$$

onde b *é o máximo tempo maxial de existência de* Φ.

Observação. *Existem escolhas apropriadas e reparametrizações que sempre permitem escolher* $b = 1$*. Optamos por omitir os detalhes técnicos por brevidade de tempo. Veja por exemplo [1][Páginas 72, 73.]*

Proposição 2.6. *Para cada* $p \in M$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que o mapa exponencial restrito a* $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ *é um difeomorfismo sobre sua imagem, que será chamada de* ***vizinhança normal de*** p*. Ademais,* $\exp_p(B_\epsilon(0))$ *será chamada de* ***bola normal ao redor de*** p*.*

Definição 10. *Um segmento de geodésica* $\gamma : [a, b] \to M$ *é dito* ***minimizante*** *se* $L(\gamma) \leq L(c)$ *para toda curva* c*, diferenciável (por partes) ligando* $\gamma(a)$ *a* $\gamma(b)$.

Proposição 2.7. *Sejam* $p \in M, U$ *uma vizinhança normal de* p*,* $B \subset U$ *uma bola normal de centro* p*. Seja* $\gamma : [0, 1] \to B$ *um segmento de geodésica com* $\gamma(0) = p$*. Se* $c : [0, 1] \to M$ *é qualquer curva diferenciável ligando* $\gamma(0)$ *a* $\gamma(1)$ *então* $L(\gamma) \leq L(c)$ *e se a igualdade vale, então* $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.

Teorema 2.8. *Para cada* $p \in M$ *existem uma vizinhança* W *de* p *e um número* $\delta > 0$ *tais que, para cada* $q \in W$*,* $\exp_q$ *é um difeomorfismo em* $B_\delta(0) \subset T_qM$ *e* $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$*, ou seja,* W *é uma vizinhança normal de cada um dos seus pontos.*

Como conclusão, para quaisquer dois pontos em W existe uma única geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Vale notar que todos esses resultados são locais, sendo a penúltima seção destas notas a responsável por discutir como obter resultados globais de mesma natureza.

3 Curvatura

Comecemos por lembrar o caso de superfícies. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^3$. Considere M^2 uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com a métrica induzida (vide os exemplos na primeira seção). Seja U um campo suave unitário ao longo de M^2. Definimos o **operador formato** S_U por

$$S_U(V) := -(\nabla_V U)^\top,$$

onde $V \in \Gamma(TM^2)$ e $\top$ denota a projeção ortogonal no espaço tangente a M^2.

Pode-se mostrar que $S_U : T_pM \to T_pM$ define, para cada $p \in M$ um operador linear simétrico (portando diagoanlizável) com autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. A **curvatura gaussiana** em p é portando definida como:

$$\kappa(p) := \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

e a **curvatura média** em p é definida como:

$$H(p) := \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Como definir conceitos análogos para qualquer variedade riemanniana?

Teorema 3.1 (Teorema do Mergulho de Nash)**.** *Seja* (M, g) *uma variedade riemanniana. Então, existe um mergulho* $F : M \to \mathbb{R}^n$ *para* N *grande tal que*

$$g = F^*(\langle , \rangle).$$

Esse teorema é um dos teoremas mais difíceis em geometria riemanniana, que faz uso de técnicas extremamente complicadas de equações diferenciais parciais, mas que mostra que toda métrica riemanniana pode ser vista como pullback da métrica canônica de $\mathbb{R}^N$, para um N grande. Poderíamos nos perguntar, portanto, se utilizar esse teorema e copiar as definições de curvatura gaussiana e média para definir conceito de curvatura em (M^n, g). Entretanto, o primeiro problema é que a codimensão de M em $\mathbb{R}^N$ pode não ser 1, o que não dá uma única escolha de campo normal para definições análogas de curvatura. Mas há outros problemas mais sérios, conforme veremos. Vale ressaltar ainda que historicamente esse resultado veio muito depois das definições de tensores de curvatura que daremos a seguir.

Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(TM^n)$. O **tensor de Riemann** é a aplicação R definida por

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M.

Em $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica $\langle , \rangle$ temos que $R \equiv 0$.

Proposição 3.2. *O tensor* R *de uma variedade riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$,

(ii) $R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, X_2)$, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $X_i, Y_i \in \Gamma(TM)$, $i \in \{1, 2\}$.

(iii) Para todo par $X, Y \in \Gamma(TM)$, *o operador* $R(X, Y) : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ *é linear, isto é,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z, \ \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \ \forall Z, W \in \Gamma(TM).$$

Proposição 3.3 (Primeira Identidade de Bianchi)**.**

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \ \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Sejam $X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$. Denote por $R(X, Y, Z, T) := g(R(X, Y)Z, T)$. Então, valem as seguintes propriedades:

(a) $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T)$,

(b) $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$,

(c) $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$.

3.1 Curvatura seccional

Proposição 3.4. *Seja* $p \in M$ *e* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional de* T_pM. *Sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x, y) := \frac{R(x, y, x, y)}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}} \tag{3}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 11. *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real* $K(x, y) := K(\sigma)$ *dado pela equação* (3)*, onde* $\{x, y\}$ *é uma base arbitrária de* σ*, é chamado de* ***curvatura seccional*** *de* σ *em* p.

Considere portanto o plano $\sigma \in T_pM$ e seja S a superfície bi-dimensional imersa em M (suponha que M tenha curvatura zero) gerada pela aplicação exponencial restrita a σ e que codim $S = 1$. Então, a curvatura seccional do plano σ coincide com a "curvatura gaussiana"de S, isto é, com o produto dos autovalores do operador formato, imersa em M! Em particular, a noção de curvatura seccional coincide com a noção de "curvatura gaussiana"quando restrita a uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Note que no parágrafo anterior colocamos o termo *curvatura gaussiana* em aspas, e a razão disso é a seguinte: e se M não tivesse tensor de curvatura zero? Então as noções de cuvatura de subvariedade imersa (com métrica de restrição) e a noção de curvatura dada pelo produto dos autovalores do operador formato **não** coincidiriam, a diferença seria justamente a curvatura do ambiente. Isso é sumarizado pela **fórmula de Gauss** na teoria de imersões, e mostra, portanto, que em ambientes curvados, mesmo em codimensão 1, apelar para estrutura do ambiente pode não ser adequado! Nesse caso, a curvatura seccional da métrica induzida é a noção genuinamente intrínseca, e o produto dos autovalores pode ser visto como uma noção de curvatura extrínseca, não merecendo o nome de curvatura gaussiana.

Exemplo 1.

1. *A curvatura seccional de* $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ *é constante e igual a* 0,
2. *A curvatura seccional de* $\mathbb{H}^2$ *com a métrica introduzida na Seção* 1 *é constante e igual a* -1.

Teorema 3.5 (Synge)**.** *Seja* (M, g) *uma variedade riemanniana compacta com curvatura seccional positiva. Isto é, para todo* $p \in M$ *e todo* $\sigma \in T_pM$, $K(\sigma) > 0$. *Então,*

1. *Se* M *tem dimensão par e é orientável, então* M *é simplesmente conexa,*

2. Se M tem dimensão ímpar, então M é orientável.

Teorema 3.6 (Perelman)**.** *Seja (M, g) uma variedade riemanniana completa*[2]*, conexa e não compacta com curvatura seccional positiva. Então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.7 (Cartan–Hadamard)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional satifazendo $K(\sigma) \leq 0$, $\forall \sigma \in T_pM$, $\forall p \in M$. Então, M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ via aplicação exponencial.*

3.2 Curvaturas de Ricci e escalar

Podemos considerar noções mais fracas de curvatura, todas oriundas do tensor de Riemann.

A primeira delas é o **tensor de Ricci**. Esse é definido pela relação

$$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot) := \mathrm{tr}\ (Z \mapsto R(\cdot, Z)\cdot)\,,$$

onde R é o tensor de Riemann.

Destaca-se a importante relação entre o tensor de Riemann e a topologia de variedades Riemannianas, enfatizadas no seguinte teorema.

Teorema 3.8 (Bonnet–Myers)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de* Ric *de M satisfaça*

$$\mathrm{Ric}(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0,\ \forall p \in M,\ \forall v \in T_p^1 M,$$

então, M é compacta e o diâmetro[3] *de (M, g) depende de r.*

Exemplo 2. *Considere o paraboloide*

$$\mathcal{P} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\right\}.$$

Com a métrica de subvariedade de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}$ tem curvatura seccional positiva, e portanto, curvatura de Ricci positiva. Entretanto, $\mathcal{P}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2$, não sendo compacto. Mas não há contradição com o teorema anterior, pois a curvatura de $\mathcal{P}$ fica arbitrariamente próxima de zero, de onde não existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Ric}(v) \geq \frac{1}{r^2}.$$

A **curvatura escalar** $s(p)$ é definida via relação

$$s(p) : \mathrm{tr}\ (X \mapsto \mathrm{Ric}_p(X))\,.$$

Equações de Einstein:

[2]Na próxima seção explicaremos o significado de completude.
[3]Na seção seguinte definiremos o conceito de diâmetro.

Em relatividade geral, as equações de campo de Einstein tem como incógnita um tensor métrico que descreve a configuração geométrica de uma quantidade de matéria no espaço tempo. A saber,

$$\mathrm{Ric} + \frac{s}{2} g + \Lambda g = \frac{8\pi G}{c^4} T, \tag{4}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e G é a constante de gravitação universal. Aqui, T é um tensor simétrico que contém toda a distribuição de energia e massa da matéria e $\Lambda \in \mathbb{R}$. Em geral, para encontrar soluções dessa equação considera-se uma variedade riemanniana compacta (M^3, g) e se propõe uma métrica de warp,

$$g := dt^2 + \psi(t) g,$$

encontrando uma variedade solução $\tilde{M}^4 := \mathbb{R} \times_\psi M^3$.

Mais geralmente, se $T \equiv 0$, isto é, na ausência de matéria, a equação (4) se reduz a

$$\mathrm{Ric} + \frac{s}{2} g + \Lambda g = 0.$$

Tomando o traço em g[4] obtemos:

$$s + (n-1)\frac{s}{2} + (n-1)\Lambda = 0,$$

de onde,

$$s = \frac{2(1-n)}{n+1}\Lambda,$$

de onde, as equações de Einstein se tornam

$$\mathrm{Ric} = -\Lambda g + \frac{1-n}{n+1} g = \left(\frac{-\Lambda(n+1) + (1-n)\Lambda}{n+1}\right) g = -\frac{2n\Lambda}{n+1} g.$$

Pregando $\tilde{\Lambda} := -\left(\frac{2n\Lambda}{n+1}\right)$, temos que as equações de Einstein se reduzem a

$$\mathrm{Ric} = \tilde{\Lambda} g.$$

Em particular, se $n = 4$, então

$$\tilde{\Lambda} = -\frac{8}{5}\Lambda.$$

Uma variedade riemanniana (M, g) tal que existe uma constante $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Ric}_g = \Lambda g,$$

é chamada de **variedade de Einstein**.

[4] Com um pequeno adendo que em geral, no contexto de relatividade geral, a métrica g tem traço $n-1$ pois é uma métrica *semi-riemanniana*.

As métricas de Einstein são pontos críticos do funcional

$$\mathcal{F}(g) := \int_M s_g \, dM_g,$$

onde, em coordenadas locais,

$$dM_g = \sqrt{g} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$g := \det(g_{ij}).$$

4 Completude de métricas riemannianas: o teorema de Hopf–Rinow e comprimento de curvas divergentes

Um dos aspectos mais fundamentais de geometria riemanniana consiste no entendimento das relações entre propriedades locais e propriedades globais. Por exemplo, os teoremas enunciados no capítulo de curvatura destacam como curvatura e topologia são conceitos interligados. Cabe notar também, que em todos os teoremas o termo *completude* foi necessário. O objetivo dessa seção consiste em explicar precisamente essa terminologia.

Ademais, quando queremos estudar propriedades globais de uma variedade diferenciável M, devemos exigir que M não seja uma subvariedade própria, aberta, de uma variedade M'. A condição usual para assegurar esta não–estendabilidade é a compacidade. Em alguns casos, porém, gostaríamos de usar uma condição mais fraca (principalmente no âmbito de cálculo variacional). O que motiva a nossa primeira definição.

Definição 12. *Uma variedade riemanniana M é dita* ***estendível*** *se existe uma variedade riemanniana M' tal que M é isométrica a um subconjunto aberto e próprio de M'. Do contrário, dizemos que M é* ***não-estendível****.*

Poderíamos nos perguntar *quão grande* é a classe de variedades riemannianas nãoe estendíveis. Lançamos mão da seguinte definição.

Definição 13. *Uma variedade riemanniana M é* ***geodesicamente completa*** *se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_pM$. Ou seja, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Proposição 4.1. *Se M é completa então M é não estendível.*

Demonstração. Assuma por contradição que M seja estendível. Então, M é isométrica a um subconjunto aberto e próprio de uma variedade riemanniana M'. Assumindo M' conexa (como todas as variedades desse texto), a fronteira ∂M de M em M' é não vazia. Tome $p \in \partial M$ e seja $U' \subset M'$ uma vizinhança normal de p em M'. Seja $q \in U' \cap M$ e $\tilde{\gamma}(t)$ uma geodésica em M' com

$\tilde{\gamma}(0) = p,\ \tilde{\gamma}(1) = q$. Então, $\gamma(t) := \tilde{\gamma}(1-t),\ |t| < \delta$ é uma geodésica em M com $\gamma(0) = q$. Mas como $\gamma(1) \in \partial M$ deve existir $t \leq 1$ tal que γ não esteja definida, de onde M não pode ser completa. □

Observação. *A recíproca desse teorema não é verdadeira, o que mostra que a classe de variedades não estendíveis é maior do que a classe de variedades completas. Por exemplo, considere o recobrimento universal*

$$\pi : M \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

do plano euclidiano sem a origem. M *não é completa e nem estendível. Para ver que* M *não é estendível, suponha o contrário. Isto é, seja (por absurdo)* M' *uma extensão de* M. *Tome* $p' \in M'$ *um ponto na fronteira de* M *e seja* W' *uma vizinahnça convexa de* p' *em* M'. *Note que* $W' - \{p'\} \subset M$. *De fato, para cada ponto* $p \in M$ *passa uma única geodésica em* M *que não pode ser estendida para todos os valores de* $t \in \mathbb{R}$. *Tome* $x \in W' \cap M$ *e ligue* x *a* p' *com uma geodésica* $\tilde{\gamma}$ *de* M'. $\tilde{\gamma}$ *coincide com uma geodésica dem* M, *e portanto, é a única geodésica passando por* x *que não pode ser estendida para todos os valores de* t. *Da unicidade e do fato que* p' *é um ponto da fronteira, segue que todos os pontos de* $\tilde{\gamma} \cap W$, *exceto* p', *pertencem a* M, *pois* $\tilde{\gamma}$ *se aproxima arbitrariamente da fronteira de* M. *Assim, se* $z \in W'$ *e* $z \notin \tilde{\gamma}$, *a geodésica ligando* z *a* x *está, pela unicidade acima, inteiramente em* M, *de onde* $z \in M$.

Por fim, note que $\pi(W' - \{p'\}) = U$ *é uma vizinhança de* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. *Considerando o círculo fechado em* U *com centro em* $(0,0)$ *poderíamos levantá-lo num círculo fechado em* M, *o que é absurdo pos* M *é simplesmente conexa.*

Definição 14. *A distância* $d(p,q)$ *entre dois pontos* $p, q \in M$ *é definida por,*

$$d(p,q) := \inf_{c \in \Omega_{p,q}} \int_0^1 \|c'\| dt,$$

onde $\Omega_{p,q} := \{c : [0,1] \to M : c(0) = p,\ c(1) = q\}$ *e* c *é uma curva suave.*

Proposição 4.2. *Com a distância* d *da definição anterior* M *se torna um espaço métrico, isto é,*

1. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r),\ \forall p, q, r \in M,$
2. $d(p,q) = d(q,p)$
3. $d(p,q) \geq 0$ *e* $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Proposição 4.3. *A topologia induzida por* d ***coincide*** *com a topologia de* M *como variedade suave.*

Corolário 4.4. *Se* $p_0 \in M$, *então a função* $f(p) := d(p, p_0)$ *é contínia em* M.

Agora que podemos ver M como um espaço métrico, o conceito de diâmetro de variedades riemannianas é facilmente definível:

Definição 15. *Seja* (M, g) *uma variedade riemanniana. Então, o* ***diâmetro*** *de* (M, g)*, denotado por* $\operatorname{diam}(g)$ *é definido como*

$$\operatorname{diam}(g) := \sup_{p,q \in M} d(p, q).$$

Teorema 4.5 (Hopf–Rinow)**.** *Seja* M *uma variedade riemanniana e seja* $p \in M$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está definida em todo* T_pM*,*

(b) Os limitados e fechados de M *são compactos,*

(c) M *é completa como espaço métrico,*

(d) M *é geodesicamente completa,*

(e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$*,* $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$ *tais que se* $q_n \notin K_n$*, então* $d(p, q_n) \to \infty$*,*

(f) Para todo $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $L(\gamma) = d(p, q)$*.*

Demonstração. [1][Página 162, Teorema 2.8] □

Corolário 4.6. *Toda variedade compacta é completa.*

Corolário 4.7. *Uma subvariedade fechada de uma variedade riemanniana completa é completa na métrica induzida. Em particular, as subvariedades fechadas de um espaço euclidiano são completas.*

Para terminarmos essa seção provaremos o seguinte resultado:

Definição 16. *Uma* ***curva divergente*** *em uma variedade riemanniana* M *é uma aplicação diferenciável* $\alpha : [0, \infty) \to M$ *tal que, para todo compacto* $K \subset M$*, existe um* $t_0 \in (0, \infty)$ *com* $\alpha(t) \notin K$ $\forall t > t_0$*. Ou seja,* α *sai de qualquer compacto.*

O comprimento de uma curva divergente é definido por

$$\lim_{t \nearrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds.$$

Proposição 4.8. M *é completa se, e só se, o comprimento de toda curva divergente é ilimitado.*

Demonstração. Assuma que M seja completa. Então, existe uma sucessão de compactos $\{K_n\}$ como no teorema de Hopf–Rinow. Seja α uma curva divergente em M. Então, para cada n, existe $t_n \in [0, \infty)$ tal que $\alpha(t) \notin K_n$ $\forall t > t_n$. Seja $p = \alpha(0)$. Então, pelo item (e) do Teorema de Hopf–Rinow segue que $d(p, \alpha(t_n)) \to \infty$, de onde $L(\alpha)$ é ilimitado.

A recíproca fica como exercício, mas a ideia consiste em utilizar o mesmo item (e) do Teorema de Hopf–Rinow. □

5 Primeira de variação para energia de uma curva em uma superfície

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de geodésica em uma superfície bidimensional, regular, em $\mathbb{R}^3$, como sendo o ponto crítico do *funcional de energia.*

5.1 Preliminares

Uma superfície parametrizada por um único sistema de coordenadas é um par $(S, \mathbf{x})$ onde $S \subset \mathbb{R}^3$ tem a topologia induzida e $\mathbf{x} : U \to S$ é uma aplicação diferenciável do aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Lembremos que se $(DV/dy)(p)$ denota a derivada covariante do campo V, no ponto p, na direção do vetor y, então

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Lembramos que uma curva $\gamma : [0, a] \to S$ é dita **geodésica** se $\frac{D}{dt}\gamma'(t) = 0 \, \forall t \in [0, a]$. Note que apenas curvas parametrizadas por comprimento de arco podem ser geodésicas.

Iniciamos definindo precisamente o conceito de "curvas vizinhas" a uma curva dada.

Definição 17. *Seja* $c : [0, a] \to S$ *uma curva diferenciável por partes em uma superfície* S*. Uma* ***variação*** *de* c *é uma aplicação contínua* $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to S$ *tal que:*

1. $f(0, t) = c(t), \ t \in [0, a]$.
2. *Existe uma subdivisão de* $[0, a]$ *por pontos* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = a$*, tal que a restrição de* f *a cada* $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \ldots, k$*, é diferenciável.*

Uma variação é dita ***própria*** *se* $f(s, 0) = c(0)$ *e* $f(s, a) = c(a)$*, ou seja, se os extremos são fixados.*

Para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, a curva parametrizada $f_s : [0, a] \to M$ dada por $f_s(t) = f(s, t)$ é chamada de curva da **variação**. Deste modo, uma variação determina uma família $f_s(t)$ de curvas vizinhas de modo que $f_0(t) = c(t)$.

É conveniente chamar **curva transversal** da variação à curva parametrizada, que é diferenciável, $f_t : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, t fixado, dada por $f_t(s) = f(s, t)$. O vetor velocidade de uma curva transversal $s = 0$, ou seja, $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é um campo vetorial (diferenciável por partes) ao longo de $c(t)$, chamado de *campo variacional* de f.

Proposição 5.1. *Dado um campo* $V(t)$*, diferenciável por partes, ao longo de uma curva diferenciável por partes* $c : [0, a] \to M$*, existe uma variação* $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ *de c, tal que* $V(t)$ *é o campo variacional de* f*. Além disto, se* $V(0) = V(a) = 0$*, é possível escolher* f *como uma variação própria.*

Demonstração. Uma prova para este resultado pode ser encontrada em: [1] página 213. □

Para comparar o comprimento de arco de c com o comprimento de arco das curvas vizinhas de uma variação $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \to M$ de c, é conveniente estudar a seguinte função, chamado **comprimento**:

$$L : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}$$
$$L(s) = \int_0^a \|\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)\| dt.$$

$L(s)$ é o comprimento da curva $f_s(t)$.

Observação. *É imprescindível notar que* $\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)$ *é o vetor velocidade ao longo da curva* $f_s(t)$. *Logo, faz sentido calcular sua norma usando a métrica da superfície, a qual denotamos por* $\|.\|$.

Definiremos o **funcional energia**, que facilitará alguns cálculos, e mostraremos sua relação com o funcional comprimento.

Definição 18. *Considerando* $f(s, t)$ *como acima, definimos o funcional energia por:*

$$E(s) = \int_0^a \|\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)\|^2 dt.$$

Estamos interessados em um problema de minimizar o funcional comprimento de arco, mas, para tanto, afirmamos ser mais conveniente trabalhar com o funcional energia. Como garantir que isto não afeta as conclusões que queremos tirar?

Proposição 5.2. *Seja* $c : [0, a] \to S$ *uma curva diferenciável em uma superfície. Sejam ainda*

$$L(c) = \int_0^a \|\frac{dc}{dt}\| dt,$$
$$E(c) = \int_0^a \|\frac{dc}{dt}\|^2 dt,$$

o comprimento de arco e a energia da curva c. *Então,*

$$L(c)^2 \leq aE(c).$$

Demonstração. Lembramos da desigualdade de Schwarz,

$$(\int_0^a fg\ dt)^2 \leq \int_0^a f^2 dt. \int_0^a g^2 dt.$$

Tomando $f \equiv 1$ e $g = \|\frac{dc}{dt}\|$, o resultado segue. □

Observação. *Note que a igualdade ocorre se e só se* g *é constante, uu seja, se e só se* c *tem parâmetro proporcional ao comprimento de arco.*

Definição 19. *Uma curva* c *que liga os pontos* p *e* q *em* S *é dita* ***minimizante*** *se, para qualquer variação* f *de* c*, o funcional* L *atinge seu menor valor para* $s = 0$*, ou seja, para a curva* c*. Note que, neste caso,* $dL(0)/ds = 0$*.*

Lema 1. *Sejam* $p, q \in S$ *e* $\gamma : [0, a] \to S$ *uma geodésica minimizante ligando* p *a* q*. Então, para toda curva* $c : [0, a] \to M$ *ligando* p *a* q*,*

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

e vale a igualdade se, e só se, a curva c *é geodésica minimizante.*

Demonstração. Das considerações acima, segue que:

$$aE(\gamma) = (L(\gamma))^2 \leq (L(c))^2 \leq aE(c).$$

A primeira igualdade segue da observação 2 e do fato de que, patra uma geodésica γ,$\|d\gamma/dt\| = 1$. Para a segunda afirmação, note que, se a igualdade é válida, então c é proporcional ao comprimento de arco (também pela observação 2), e $L(\gamma) = L(c)$. Mas, se isso ocorre, c é geodésica minimizante. □

Por caráter de simplicidade, faremos a primeira fórmula da variação assumindo que a variação é suave e que a curva para qual a variação é feita também é suave.

Proposição 5.3 (Primeira Fórmula da Variação)**.** *Sejam* $c : [0, a] \to S$ *uma curva suave e* $f : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ *variação suave. Então, a fórmula da primeira variação da energia é dada por:*

$$\frac{1}{2}E'(0) = \langle V(a), c'(a)\rangle - \langle V(0), c'(0)\rangle - \int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t)\rangle dt.$$

Demonstração. Sabemos que

$$E(s) = \int_0^a \langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt.$$

Derivando em s e comutando a derivada com a integral:

$$E'(s) = \int_0^a \frac{d}{ds}\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt = 2\int_0^a \langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = 2\int_0^a \langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle.$$

Na última igualdade usamos a simetria da derivada covariante. Lembrando que a derivada covariante é *compatível* com a métrica:

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = \langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle$$

Então,

$$\frac{1}{2}E'(s) = \int_0^a \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt - \int_0^a \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle dt.$$

Avaliando em $s = 0$ temos que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = V(t)$ o campo variacional e $\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) = c'(t)$. Então:

$$\frac{1}{2}E'(0) = \int_0^a \frac{d}{dt}\langle V(t), c'(t)\rangle dt - \int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t)\rangle dt,$$

$$\frac{1}{2}E'(0) = \langle V(a), c'(a)\rangle - \langle V(0), c'(0)\rangle - \int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t)\rangle dt.$$

Isto conclui a prova. □

Teorema 5.4. *Uma curva diferenciável* $c : [0, a] \to S$ *é uma geodésica se, e só se, para toda variação própria* f *de* c *vale que* $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.

Demonstração. A ida é imediata, já que, se c é uma geodésica, todos os termos do lado direito da priemira fórmula da variação se anulam. Façamos a volta: Com efeito, pela primeira fórmula,

$$\frac{1}{2}E'(0) = \langle V(a), c'(a)\rangle - \langle V(0), c'(0)\rangle - \int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t)\rangle dt.$$

Então, suponha que para toda variação própria f com campo variacional V, isto é, $\langle V(a), c'(a)\rangle - \langle V(0), c'(0)\rangle = 0$ valha $\frac{1}{2}E'(0) = 0$. Então,

$$\int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t)\rangle dt = 0$$

Ora, escolhendo $V(t) = \frac{D}{dt}c'(t)$ temos que:

$$\int_0^a \|\frac{D}{dt}c'(t)\|^2 dt = 0.$$

Então, $\frac{D}{dt}c'(t) = 0, \ \forall t \in [0, a]$, e a curva c é portanto uma geodésica. □

Referências

[1] Manfredo Perdigão do Carmo. Geometria Riemanniana.