MAT3210 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE

Exercício 1. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, onde $\vec{u}$ é o versor de:

a) $\vec{v} = (-1,1)$

b) $\vec{v} = (1,2)$

c) $\vec{v} = (1,1)$

Exercício 2. Sabendo que f é diferenciável, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)$, onde $f(x,y) = x^2 + xy$, e $\vec{u}$ é o versor de:

a) $\vec{v} = (1,1)$

b) $\vec{w} = (3,4)$

Exercício 3. Seja $f(x,y) = x^2 y$.

a) Determine $\vec{u}$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ seja máximo.

b) Qual o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$?

c) Estando-se em $(1,1)$, que direção e sentido deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente?

Exercício 4. Calcule a derivada direcional de f no ponto P, na direção do vetor $\vec{u}$, onde:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P = (1,2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$.

b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $P = (1,2)$ e $\vec{u}$ o versor de $2\vec{i} + \vec{j}$.

c) $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, $P = (1,1)$ e $\vec{u}$ o versor de $(3,4)$.

d) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}$, $P = (3,3)$ e $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

e) $f(x,y) = xy$, $P = (1,1)$ e $\vec{u}$ o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

Exercício 5. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em °C.) Um indivíduo encontra-se na posição (3,2) e pretende dar um passeio.

a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto (3,2).

Date: 17 de Novembro de 2013.

b) Qual a direção e sentido que deverомar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento de temperatura?

c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item b?

d) De quanto descrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção $\vec{j}$?

Exercício 7. Desenhe as curvas de nível de:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

c) $f(x, y) = \dfrac{y}{x - 1}$.

d) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

e) $f(x, y) = x + 3y$.

f) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

g) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$.

h) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

i) $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$.

Exercício 8. Suponha que $T(x, y) = 2x + y(\,^\circ\mathrm{C})$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy.

a) Desenhe as isotermas correspondentes äs temperaturas $0\,^\circ\mathrm{C}$, $3\,^\circ\mathrm{C}$, $-1\,^\circ\mathrm{C}$.

b) Raciocinando geometricamente (e intuitivamente), determine os pontos de mais alta e mais baixa temperatura do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

Exercício 9. É dada uma curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

Exercício 10. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nível de $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

Exercício 11. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$

b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Exercício 12. Selecione os candidatos a extremantes locais, sendo $f(x,y) =$

a) $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$

b) $x^3 - y^2 + xy + 5$

c) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$

d) $x^2 - y^2 + 3xy - x + y$

e) $x^3 + y^3 - xy$

f) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$

Exercício 13. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem.

Exercício 14. (Método dos Mínimos Quadrados) Dados n pares de números $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$, com $n \geq 3$, em geral não existirá uma função afim $f(x) = \alpha x + \beta$ cujo gráfico passe por todos os n pontos. Entretanto, podemos determinar f de modo que a soma dos quadrados dos erros $f(a_i) - b_i$ seja mínima. Pois bem, determine α e β para que a soma

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - b_i]^2$$

seja mínima e encontre a reta que melhor se ajusta aos dados: $(1, 3)$, $(2, 7)$ e $(3, 8)$.

Exercício 15. Estude com relação à máximos e mínimos locais a função $f(x,y) =$

a) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy, x > 0, y > 0$

b) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$

c) $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

Exercício 16. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

Exercício 17. Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.

a) $f(x,y) = 3x - y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4, 3x + y \leq 6\}$

b) $f(x,y) = 3x - y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

d) $f(x,y) = y^2 - x^2$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$

e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 1\}$

Exercício 18. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas (usando multiplicadores de Lagrange, quando necessário).

a) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$

c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1, x > 0, y > 0$

d) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$

e) $f(x, y) = 2x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

Exercício 19. Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva $xy = 1, x > 0, y > 0$. Qual o ponto de tangência?

Exercício 20. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.

Exercício 21. Enuncie o Teorema de Weierstrass.