MAT3210 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE

Exercício 1. Calcule as seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o por quê:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-5y+xy}{x+y}$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+3y)}{x+3y}$

(8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+^2)$

(9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(10) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

(11) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

(12) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

(13) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

(14) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Date: 11 de outubro de 2013.

Exercício 2. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo.

(1) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

(2) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

(4) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(6) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{(r^2-1)}} & \text{se} \quad r < 1 \text{ onde } r = \|(x,y)\| \\ 0 & \text{se} \quad r \geq 1 \end{cases}$

(7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(8) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(9) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercício 3. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Determine

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Exercício 4. Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua neste ponto.

Exercício 4. Determine as derivadas parciais

a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b) $f(x,y) = \cos(xy)$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

e) $f(x,y) = x^2\ln(1+x^2+y^2)$

f) $f(x,y) = xye^{xy}$

g) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$

h) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

i) $f(x,y) = \dfrac{x\sin y}{\cos(x^2+y^2)}$

Exercício 5. Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

Exercício 6. Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

a) f admite derivadas parciais em $(0,0)$?

b) f é diferenciável em $(0,0)$?

Exercício 7. Seja $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em $(0,0)$.

c) Prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

d) Prove que f é uma função diferenciável.

Exercício 8. Determine o conjunto de pontos em que a função dada é diferenciável.

a) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$