

MAT3210 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE  
MONITOR: GERSON TAVARES

**Exercício 1.** Calcule as seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique o por quê:

- (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- (2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
- (3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- (4)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x - 5y + xy}{x + y}$
- (5)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (6)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$
- (7)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x + 3y)}{x + 3y}$
- (8)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$
- (9)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (10)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y + y^4 + x^4}{x^3y - xy^3}$
- (11)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \sin(x^2 + y^2)}{y^4 + \sin(x^2 + y^2)}$
- (12)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + x^2y + y^2}$
- (13)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$

$$(14) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

**Exercício 2.** Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo.

$$(1) f(x, y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$$

$$(2) f(x, y) = \ln \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

$$(3) f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$$

$$(4) f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$(5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - 3y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(r^2 - 1)}} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$$

$$(7) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(8) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(9) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**Exercício 3.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  Determine

$$(a) \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$(b) \frac{\partial f}{\partial y}$$

**Exercício 4.** Mostre que a função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ , mas não é contínua neste ponto.

**Exercício 4.** Determine as derivadas parciais

$$a) f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$$

$$b) f(x, y) = \cos(xy)$$

- c)  $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$   
 d)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$   
 e)  $f(x, y) = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$   
 f)  $f(x, y) = xye^{xy}$   
 g)  $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$   
 h)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$   
 i)  $f(x, y) = \frac{x \sin y}{\cos(x^2 + y^2)}$

**Exercício 5.** Considere a função  $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ . Verifique que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ .

**Exercício 6.** Seja  $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ .

- a)  $f$  admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ ?  
 b)  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ?

**Exercício 7.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- a) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .  
 b) Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .  
 c) Prove que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .  
 d) Prove que  $f$  é uma função diferenciável.

**Exercício 8.** Determine o conjunto de pontos em que a função dada é diferenciável.

- a)  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$   
 b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
 e)  $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

$$f) f(x, y) =$$