MAT3210 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: GERSON TAVARES

Exercício 1. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sin\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int x^2\ln(2x)\,\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\big(\sqrt{x-1}\big)}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \mathrm{arcsen}\,x\,\mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int \sin\big(\ln x\big)\,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

Date: 15 de Agosto de 2011.

Exercício 2. Prove que as únicas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$ para todo x são da forma $f(x) = c \cdot e^{-x}$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admitem derivada segunda, e tais que $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Determine todas as primitivas da função $f : [0,1] \bigcup [2,3] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in [0,1]; \\ \frac{1}{x} & \text{if } x \in [2,3]. \end{cases}$$

É verdade que se F é uma primitiva de f, então todas as outras primitivas da f são da forma $F_1(x) = F(x) + c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$?

Exercício 5. No Exercício anterior, determine todas as primitivas F da f tais que $F(0) = 0$.

Exercício 6. Quais das seguintes afirmações são sempre verdadeiras? Prove as verdadeiras, e dê um contraexemplo para as falsas.

(1) Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $x\,F(x)$ é uma primitiva de $F(x) + x\,f(x)$.

(2) $\displaystyle\int f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

(3) Se $F(x)$ é uma primitva da $f(x)$, $x > 0$, então $F\big(\ln(x)\big)$ é uma primitiva de $f\big(\ln(x)\big)$

(4) Se F é uma primitiva de f, antão para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ é uma primitiva de f.

(5) Se F é uma primitiva de f, antão para toda constante $c \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva também de $f + c$.

(6) Se $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então F é uma função contínua em $[a,b]$.

(7) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admite uma primitiva em $[a,b]$ então admite uma *única* primitiva F tal que $F(a) = 0$.

(8) As primitivas de uma função polinomial são funções polinomiais.

(9) Seja F uma primitiva da função f no intervalo $[a,b]$. Então existe $c \in \,]a,b[$ tal que $F(b) - F(a) = f(c)(b-a)$.

(10) Se F é uma primitiva de f no intervalo $[a,b]$, f é uma função derivável, e $c \in \,]a,b[$ é um ponto onde $f(c) = 0$ e $f'(c) < 0$, então c é um ponto de mínimo local da F.