Instituto de Matemática e Estatística

MAT0147 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II PARA ECONOMIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 5

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: LEANDRO AUGUSTO LICHTENFELZ

Exercício 1: Seja $f(x,y) = \ln(x+y)$. Prove que para todo $x,y,s,t > 1$ vale a seguinte desigualdade:

$$\big|f(x,y) - f(s,t)\big| \leq \big\|(x,y) - (s,t)\big\|.$$

Exercício 2: Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x,y)$ dada, centrado no ponto (x_0,y_0) dado.

(a) $f(x,y) = e^{x+5y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;
(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
(d) $f(x,y) = e^{x+5y}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
(e) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$.

Exercício 3: Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x,y)$ dada, centrado no ponto (x_0,y_0) dado.

(a) $f(x,y) = x\operatorname{sen}(y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
(b) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;
(c) $f(x,y) = e^{xy}$, $(x_0,y_0) = (0,1)$;
(d) $f(x,y) = e^x - e^{-y}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;
(e) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 4: Determine os pontos críticos da função $f(x,y)$ dada:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$;
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$;
(c) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$;
(d) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y)$;
(e) $f(x,y) = e^{(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y))}$;

Date: 27 de Outubro de 2010.

(f) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x)} + e^{\operatorname{sen}(y)}$;

(g) $f(x,y) = \dfrac{yx^3}{3} + x^2y + x + 1$.

Exercício 5: Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável que não passa pela origem, ou seja, $\gamma(t) \neq (0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto de todos os pontos críticos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \|\gamma(t)\|$ é o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ para os quais $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$.

Exercício 6: Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x,y)$ dada:

(a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;
(b) $f(x,y) = -x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$;
(c) $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$;
(d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy$, $x > 0$ e $y > 0$;
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 4y^2}$;
(f) $f(x,y) = e^{\operatorname{sen}(x)} + e^{\operatorname{sen}(y)}$.

Exercício 7: Deseja-se construir uma caixa (com tampa) no formato de um prisma retangular[1] de dimensões x, y e z, de maneira que o seu volume total seja de $10m^3$. Dentre todos os possíveis valores de x, y e z para esta construção, quais deles fornecem as caixas com menor área de superfície possível?

Exercício 8: A distância de um ponto $p = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ a um plano Π que não contém p é o menor valor possível (isto é, o mínimo global) de $\|(a,b,c) - (x,y,z)\|$, com (x,y,z) pertencente ao plano Π. Com esta definição, calcule a distância do ponto $(1,1,1)$ ao plano cuja equação é $x + y - z = 0$.

[1] Lembrando que um *prisma* é um sólido tridimensional formado pela região entre duas figuras planas paralelas congruentes; neste caso, dois retângulos.