Instituto de Matemática e Estatística

# MAT0147 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II PARA ECONOMIA

## LISTA DE EXERCÍCIOS 4

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: LEANDRO AUGUSTO LICHTENFELZ

**Exercício 1:** Dada a função $f(x, y)$ e a curva $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, calcule a derivada da função $f \circ \gamma(t)$:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\gamma(t) = (3\cos t, 2\mathrm{sen}\, t)$;
(b) $f(x, y) = xy$, $\gamma(t) = (2\mathrm{sen}(t), \cos t)$;
(c) $f(x, y) = e^{xy}$, $\gamma(t) = (t, 2t)$;
(d) $f(x, y) = e^x - e^y$, $\gamma(t) = (t^8, t^8)$;
(e) $f(x, y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$, $\gamma(t) = (t, e^t)$;

**Exercício 2:** Dada a função $f(x, y)$ e a transformação do plano $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)$, calcule as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ da função composta $g = f \circ \Phi$.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Phi(u, v) = (u + v, u - v)$;
(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\Phi(u, v) = (e^u + e^v, e^u - e^v)$;
(c) $f(x, y) = xy^2$, $\Phi(u, v) = (v, u)$;
(d) $f(x, y) = x^2 + \cos y$, $\Phi(u, v) = (v, \mathrm{sen}(u))$;
(e) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $\Phi(u, v) = (\mathrm{sen}(u^2), uv)$;

**Exercício 3:** Usando argumentos geométricos, determine as soluções da equação a derivadas parciais dada:

(a) $3\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;
(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;
(d) $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

---

*Date*: 18 de Outubro de 2010.

**Exercício 4:** Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$;
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + 3x^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) - x + 3y^2$;
(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$.
(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;
(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$;

**Exercício 5:** Determine se o conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ dado é convexo, ou conexo.

(a) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\big\}$;
(b) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\big\}$;
(c) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\big\}$;
(d) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x - y \leq 0,\ 1 \leq y \leq 2\big\}$.
(e) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\big\}$.

**Exercício 6:** Seja $r > 0$. Mostre que a bola $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < r\}$ é um conjunto convexo.

**Exercício 7:** Para cada uma das equações abaixo, determine, com auxílio do Teorema da Função Implícita, se é possível encontrar um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo o ponto $p$ e uma função diferenciável $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em algum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $(x,y) \in A$ é solução da equação se, e somente se, $y = f(x)$ (em outras palavras, se é possível "isolar"$y$ em termos de $x$, para valores $(x,y)$ próximos de $p$).

(a) $x^2 + y^2 = 1$, $p = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
(b) $\cos(x) + \cos(y) = x + y - \pi$, $p = (0, \pi)$;
(c) $x^2 + y^2 = 1$, $p = (1, 0)$;
(d) $e^y + xy = 1$, $p = (1, 0)$;
(e) $x^4 + y^3 + y^2 = 3xy$, $p = (1, 1)$;

**Exercício 8:** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $f(1,1) = f(0,0) = 0$. Mostre que existe um ponto $(c,c) \in \mathbb{R}^2$ no qual

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c,c) + \frac{\partial f}{\partial y}(c,c) = 0.$$

**Exercício 9:** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz $\|\nabla f(x, y)\| \leq 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$|f(\vec{v}) - f(\vec{u})| \leq 2,$$

para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.