Instituto de Matemática e Estatística

MAT0147 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II PARA ECONOMIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: LEANDRO AUGUSTO LICHTENFELZ

Exercício 1: Encontre todos os números reais x e y de modo que os vetores $u = (x^2, y)$ e $v = (1, 2x + y)$ sejam ortogonais.

Exercício 2: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Verifique que os vetores $w_1 = \|u\|v + \|v\|u$ e $w_2 = \|u\|v - \|v\|u$ são ortogonais, ou seja, que $\langle w_1, w_2\rangle = 0$. Interprete geometricamente.

Exercício 3: Seja $u \in \mathbb{R}^2$ um vetor qualquer. Verifique que se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$, então $u = 0$. Em outras palavras, o único vetor ortogonal a todos os vetores é o vetor nulo.

Exercício 4: Mostre que, dados $u, v \in \mathbb{R}^2$, se u é ortogonal a v então $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Exercício 5: Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ vetores quaisquer. Prove que vale a igualdade

$$\|w - u\|^2 + \|w - v\|^2 = \tfrac{1}{2}\|u - v\|^2 + 2\left\|w - \tfrac{1}{2}(u + v)\right\|^2,$$

conhecida como *identidade de Apolônio*.

Exercício 6: Mostre que para quaisquer vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, vale a chamada *lei do Paralelogramo*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Interprete geometricamente.

Exercício 7: Calcule a ordem de infinitésimo das seguintes funções f no ponto x_0 dado:

(1) $f(x) = \sin^3 x - \sin(x^3)$, $x_0 = 0$.
(2) $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
(3) $f(x) = 1 - \cos(x^3)$, $x_0 = 0$.
(4) $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1} + x^2$, $x_0 = 0$.
(5) $f(x) = e^{x^2} - 1 - x^2$, $x_0 = 0$.

Date: 7 de Setembro de 2010.

Exercício 8: Para cada uma das funções abaixo, faça um desenho das curvas de nível, ou seja, das soluções da equação $f(x,y) = c$, para cada valor de c dado. Feito isso, tente esboçar o gráfico da função.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad c = 0, 1, 4$ e 9.
(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad c = 0, 1, 2$ e 3.
(3) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y), \quad c = -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1.
(4) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x-y), \quad c = -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1.
(5) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad c = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$.
(6) $f(x,y) = (x-y)^2, \quad c = 0, 1$ e 2.

Exercício 9: Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2}$
(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y}{x^2+2y^2}$
(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)y^2}{x^2+y^2}$
(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(y)\operatorname{sen}(x)}{xy}$
(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x-e^y}{x+y}$
(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y^2}{x^4+y^4}$
(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

Exercício 10: Para qual valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função f é contínua no ponto $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 11: Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ de cada umas das funções abaixo:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{xy} + \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)}, & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Exercício 12: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável, diferenciável em todos os pontos. Defina $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $H(x,y) = f(x^2 - y^2)$. Verifique que

$$\langle\, \nabla H(a,b), (a,b)\, \rangle \;=\; 0,$$

qualquer que seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 13: Verifique quais dos conjuntos abaixos são abertos ou fechados:

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$
(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ x e y são números racionais$\}$
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 2\}$
(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x \leq 2\}$
(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(2 + x^2 + y^2) \geq 1,\ x^2 + y^2 > 1\}$

Exercício 14: Determine os pontos de acumulação dos conjuntos no Exercício 13.

Exercício 15: Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ das seguintes funções:

(1) $f(x,y) = \cos(x^2 - y^2)$
(2) $f(x,y) = \ln\big(\sin(3x - xy)\big)$
(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
(4) $f(x,y) = \cos(y\mathrm{sen}(x))$

(5) $f(x,y) = e^{x-y}$
(6) $f(x,y) = e^x \cos(y)\text{sen}(x)$
(7) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x+y}$
(8) $f(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$, onde A, α e β são constantes positivas.

Exercício 16: Determine e desenhe o domínio das seguintes funções:

(1) $f(x,y) = \ln(1-x-y)$
(2) $f(x,y) = \tan(x+y)$
(3) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \ln(x^2+y^2-1)$
(4) $f(x,y) = \dfrac{1}{x\text{sen}(y)}$
(5) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1}$
(6) $f(x,y) = \sqrt{1-\sqrt{2-x^2-y^2}}$
(7) $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{(x^2+y^2-1)}-1}$
(8) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x+y}$

Exercício 17: Determine o conjunto dos pontos críticos (lembrando que estes são os pontos (x,y) tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$) de cada uma das funções abaixo. Calculando a matriz Hessiana determine também, quando possível, quais são máximos ou mínimos locais.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$.
(2) $f(x,y) = x^3 + y^3$.
(3) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.
(4) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$.
(5) $f(x,y) = \text{sen}(x) + \text{sen}(y)$.