Gabarito - Lista de Exercícios V

May 27, 2012

1. Para sabermos os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função é necessário estudar o sinal da derivada da função. Onde a derivada for positiva, a função será crescente e onde a derivada for negativa a função será decrescente.

   (a) Então, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1}$$

   então,

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ em }]-\infty, \frac{1}{3}[\text{ e em }]1, +\infty[\\ f'(x) &< 0 \text{ em }]\frac{1}{3}, 1[. \end{aligned} \tag{2}$$

   concluímos então que

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty, \frac{1}{3}[\text{ e em }]1, +\infty[\\ f \text{ é estritamente decrescente em }]\frac{1}{3}, 1[. \end{cases} \tag{3}$$

   (b) Assim como no caso anterior, temos

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}. \tag{4}$$

   Como $(1 + 3x^2)^2 > 0$ para qualquer valor de x, então o sinal de f' é o mesmo que o sinal do numerador, assim

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

Então

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty,-1] \text{ e em } [\frac{1}{3},\} + \infty[\\ f \text{ é estritamente decrescente em } [-1,\frac{1}{3}]. \end{cases} \tag{5}$$

(c) Aqui, $x \neq \pm 1$, pois o denominador da f não permite esses valores. Temos que:

$$f^{'}(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \tag{6}$$

novamente temos que o denominador é sempre positivo, portanto precisamos estudar somente o sinal do numerador, obtemos então:

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty,-1] \text{ e em }]-1,0] \\ f \text{ é estritamente decrescente em } [0,1[\text{ e em }]1,+\infty[. \end{cases} \tag{7}$$

(d) Aqui $x \neq 0$ por causa do denominador. Temos que:

$$f^{'}(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2} \tag{8}$$

e como $x^2 > 0$ para qualquer $x \neq 0$, então o sinal de $f^{'}$ é dado pelo sinal do numerador, mas e^x também é sempre positivo, então precisamos somente estudar o sinal da reta: $x - 1$. Assim:

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]1,+\infty[\\ f \text{ é estritamente decrescente em }]-\infty,0[\text{ e em }]0,1[. \end{cases} \tag{9}$$

(e) A derivada é dada por:

$$f^{'}(x) = 1 - e^x \tag{10}$$

e estudando o sinal dessa função concluímos que:

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]-\infty,0[\\ f \text{ é estritamente decrescente em }]0,+\infty[. \end{cases} \tag{11}$$

(f) Aqui também temos $x \neq 0$ por causa do denominador e $x > 0$ por causa do domínio da função $\ln x$. Temos ainda que:

$$f^{'}(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \tag{12}$$

como $x^2 > 0$ para qualquer $x \neq 0$, então o sinal de $f^{'}$ é dado pelo sinal do numerador. Então:

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em }]0,1[\text{ e em }]1,e[\\ f \text{ é estritamente decrescente em }]e,+\infty[. \end{cases}$$

2. Todos os exercícios aqui são resolvidos da mesma forma. Usamos o fato que

$$f(a) - f(b) = f^{'}(c)(a-b) \tag{13}$$

sendo $a < c < b \in D_f$. Sendo assim, basta tomarmos o módulo dos dois lados e em todos os casos temos $f^{'}(c) < 1$ e assim podemos concluir que:

$$\left|f^{'}(c)(a-b)\right| < |(a-b)| \tag{14}$$

e assim demontramos que

$$|f(a) - f(b)| < |(a-b)| \tag{15}$$

3. Vamos determinar $f^{'}$ e $f^{''}$ das funções dadas.

   (a) $f^{'}(x) = 3x^2 - 6x - 9$ e $f^{''}(x) = 6x - 6$. A primeira derivada se anula para $x = 3$ e $x = -1$ então esses são os pontos críticos da função. Nesses pontos temos $f^{''}(3) > 0$ então $x = 3$ é um mínimo local e $f^{''}(-1) < 0$ e $x = -1$ é um máximo local.

   (b) $f^{'}(x) = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$ e $f^{''}(x) = -2 \cdot e^{-2x} \cdot [x \cdot (1 - 2x) + 1]$. Como $e^{-2x} > 0$ para qualquer x então a derivada só é nula em $x = \frac{1}{2}$. Nesse ponto temos $f^{''}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ e então $x = \frac{1}{2}$ é um máximo local.

   (c) $f^{'}(x) = \cos x - \sin x$ e $f^{''}(x) = -\sin x - \cos x$. No intervalo dado temos que $f^{'}(x) = 0$ somente em $x = \frac{\pi}{4}$, para esse ponto temos $f^{''}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$ então $x = \frac{\pi}{4}$ é um máximo da função no intervalo dado.

   (d) $f^{'}(x) = e^x + 3e^{-3x}$ e $f^{''}(x) = e^x - 9e^{-3x}$. Temos $f^{'}(x) \neq 0$ para qualquer valor de x, pois $e^{4x} > 0$ para qualque x. Então não há nenhum máximo nem mínimo local nessa função.

4. A diferença entre um número real e seu quadrado é dada por: $x - x^2$. Para que essa diferença seja máxima precisamos determinar o máximo da função $f(x) = x - x^2$, então $f^{'}(x) = 1 - 2x$ e é zero para $x = \frac{1}{2}$. Temos ainda que $f^{''}(x) = -2 < 0$ para qualquer valor de x então, $x = \frac{1}{2}$ é o número real que maximiza a diferença entre um número real e seu quadrado.

5. Aqui temos $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ então $f'(x) = 1 - 2\frac{1}{x^3}$ e $f''(x) = 6\frac{1}{x^4}$. Para que $f'(x) = 0$ devemos ter $x = \sqrt[3]{2}$ e como $f''\left(\sqrt[3]{2}\right) > 0$ então o máximo de $f(x)$ é dado em $x = \sqrt[3]{2}$.