Gabarito - Lista de Exercícios IV

May 11, 2012

1. A função é $f(x) = x^2 + 1$:

   (a) Então, $f'(x) = (x^2)' + (1)'$, mas sabemos que a derivada de uma constante é zero, então $(1)' = 0$ e usando a derivada de polinômio (regra do tombo) sabemos ainda que: $(x^2)' = 2x$. Com isso temos $f'(x) = 2x$.

   (b) Já sabemos $f'(x)$. Basta então calcularmos no ponto de interesse: $f'(0) = 0$.

   (c) Analogamente $f'(1) = 2$.

2. Lembrando que a reta tangente de uma função do ponto p tem inclinação dada pela derivada da função calculada no ponto. Então a tangente da função $f(x)$ no ponto p tem inclinação dada por $f'(p)$. E a equação da reta fica dada por $y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$. Assim:

   (a) $f'(x) = 2x$, então $f'(2) = 4$ e ainda $f(2) = 4$. Com isso: $y = 4 + 4 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$.

   (b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, então $f'(2) = -\frac{1}{4}$ e ainda $f(2) = \frac{1}{2}$. Com isso: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$.

   (c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, então $\frac{1}{6}$ e ainda $f(9) = 3$. Com isso: $y = 3 + \frac{1}{6} \cdot (x - 9) \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

   (d) $f'(x) = 2x - 1$, então $f'(1) = 1$ e ainda $f(1) = 0$. Com isso: $y = 0 + 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1$.

3. Usando o que vimos sobre derivadas sabemos que:

   (a) Regra do tombo: $(x^4)' = 4x^3$

   (b) $\left(\frac{1}{10}x^{10}\right)' = \frac{1}{10} \cdot 10x^9 = x^9$

   (c) Como vimos $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

   (d) $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = 0 + \frac{\tan x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$

(e) Pela regra do quociente, temos: $\left(\frac{\sin x}{x+1}\right)' = \frac{(\sin x)'(x+1)-\sin x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cdot\cos x-\sin x}{(x+1)^2}$

(f) $(3x^2+\sqrt{x})' = 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(g) $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(\sqrt[3]{x}+x\right)'\cdot\sqrt{x}-\left(\sqrt[3]{x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\sqrt{x}-\left(\sqrt[3]{x}+x\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{6x\sqrt{x}}\left(-3x-3\sqrt[3]{x}+6x+\right.$
$\frac{3x-\sqrt[3]{x}}{6x\sqrt{x}}$

(h) $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^3+2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{0-3\left(x^3+2\right)'}{(x^3+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9x^2}{(x^3+2)^2}$

(i) $\left(\frac{x+1}{x\ln x}\right)' = \frac{1\cdot x\ln x-(x+1)(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x} = \frac{-1-x-\ln x}{x^2\ln^2 x}$

4. A derivada de $g(x)$ é dada por: $g'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Então:

(a) Para que as retas tangentes sejam paralelas ao eixo x, a inclinação dessas retas devem ser zero. Portanto a derivada de g nesses pontos é zero, então:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Quando $x=1$ temos $g(1)=\frac{1}{2}$ e para $x=-1$ temos $g(-1)=-\frac{1}{2}$. Então $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ são os pontos nos quais a reta tangente é paralela ao eixo x.

(b) $(x^2+1)^2$ é sempre positivo (e é o denominador de g') então basta olharmos para o numerador. $1-x^2$ é uma parábola voltada para baixo! com raízes em ±1, então, $g'(x)<0$ para $]-\infty,-1[$ e $]1,+\infty[$ e $g'(x)>0$ para $]-1,1[$. Para $x=\pm1$ temos $g'(x)=0$.

5. Primeiro devemos ver como se comporta a derivada de um produto de três funções. Podemos juntar dois e isolar o outro, ou seja, $(f\cdot g\cdot h)' = (f\cdot g)'\cdot h + (f\cdot g)\cdot h'$. Até aqui aplicamos a regra do produto que conhecemos, agora podemos aplicar a regra no termo juntado, $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$, então: $(f\cdot g\cdot h)' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$. Usando isso temos:

(a) $(xe^x\cos x)' = (x)'e^x\cos x + x(e^x)'\cos x + xe^x(\cos x)' = e^x\cos x + xe^x\cos x - xe^x\sin x = e^x\left[x(\cos x-\sin x)+\cos x\right]$

(b)

$$\begin{aligned}(e^x\sin x\cos x)' &= e^x\sin x\cos x + e^x\cos x\cos x - e^x\sin x\sin x = \\ &= e^x\left[\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x\right] = e^x\left(\frac{\sin(2x)}{2}+\cos(2x)\right)\end{aligned}$$