Instituto de Matemática e Estatística

MAT0103 — COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO

LISTA DE EXERCÍCIOS 5

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: LEANDRO AUGUSTO LICHTENFELZ

Questão 1. Enuncie o Teorema de Weierstrass. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, então f admite mínimo em $\mathbb{R}$. Dê um exemplo de função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ contínua que não admite nem máximo nem mínimo em $]0,1]$.

Questão 2. Enuncie o Teorema do Valor Médio (Teorema de Lagrange). Prove que existe $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que:

$$e^{\operatorname{sen}\alpha} \cos\alpha = \tfrac{2}{\pi}\big(e-1\big).$$

Questão 3. Quais das seguintes afirmações é verdadeira? Argumente sua resposta: se a afirmação for falsa, mostre um contra-exemplo, se for verdadeira, a prove.

(a) Se $x_0 \in [a,b]$ é um ponto de máximo local da função derivável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $f'(x_0) = 0$.
(b) Se $f'(x_0) = 0$ então x_0 é um ponto ou de máximo local da f ou de mínimo local da f.
(c) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função derivável, e com derivada contínua, então existe $M > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in [a,b]$, $\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$.
(d) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for uma função derivável e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, e $x_0 \in]a,b[$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f'(x_0) = 0$.
(e) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável par, então sua derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par.

Questão 4. Prove que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

Date: Versão atualizada, 27 de Junho de 2011.

Questão 5. Determine o polinômio de grau menor o igual a 2 que melhor aproxima a função $f(x)$ dada perto do ponto x_0 dado.

(1) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
(2) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 1$;
(3) $\ln(1 + 2x)$, $x_0 = 0$;
(4) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;
(5) $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$.