Lista 3 - Álgebra Linear
Monitor: Heitor Anginski Cotosky

1. Encontre o polinômio característico dos seguintes operadores lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz associada, na base canônica, é A. Depois, indicar seus autovalores. Quais operadores você pode afirmar com certeza que são diagonalizáveis? Quais, sem dúvida, não são diagonalizáveis? Justifique sua resposta.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -14 \\ -3 & 5 & -12 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com n¿0 inteiro, um operador linear e A sua matriz na base canônica. Decida se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. No caso de ser falsa, mostre um contra-exemplo

   (a) O polinômio característico de T tem grau n

   (b) Se T tiver só um autovalor de multiplicidade n (isto é, o polinômio característico de T está na forma $p(x) = (x - \lambda)^n$) e A for diagonalizável, então A é diagonal

   (c) Se T tiver n autovalores distintos, A é diagonalizável

   (d) Se λ for um autovalor tal que $p(x) = (x-\lambda)q(x)$, para algum polinômio q(x), então q tem somente 1 autovetor

   (e) Se o polinômio característico puder ser decomposto como produto de n polinômios de grau 1, então A é diagonalizável

   (f) Se para todo autovalor λ, temos que $N = (T-\lambda Id)$ não é injetora, onde Id é o operador identidade, então A é diagonalizável

   (g) Se existe M tal que $D = M^{-1}AM$ é diagonal, então M é única

   (h) Se existe M tal que $D = M^{-1}AM$ é diagonal, então M é a matriz mudança de base de uma base de autovetores para a base canônica

3. Considere os seguintes operadores $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e suas matrizes A na base canônica. Encontre os autovalores, e seus respectivos autovetores, de T. Se A for diagonalizável, encontre uma matriz M tal que $D = M^{-1}AM$ seja diagonal. Caso contrário, indique por que a matriz não seria diagonalizável

   (a) n=2
   $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) n=2
   $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

(c) n=3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) n=3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(e) n=3

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & -4 & -2 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) n=4

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 17 & 7 & -6 \\ -8 & 11 & 4 & -2 \\ -6 & 8 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(g) n=4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -2 \\ 10 & -4 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$