MAT0326 - GEOMETRIA DIFERENCIAL I

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

PROF. PAOLO PICCIONE

Questão 1. *Encontre uma curva parametrizada $\alpha(t)$ cujo traço seja o círculo $x^2+y^2=1$ de maneira que $\alpha(t)$ percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0)=(0,1)$.*

Questão 2. *Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada que não passa pela origem. Se $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo da origem e $\alpha'(t_0)\neq 0$, mostre que o vetor posição $\alpha(t_0)$ é ortogonal a $\alpha'(t_0)$.*

Questão 3. *Considere uma curva parametrizada $\alpha(t)$ tal que a sua derivada segunda $\alpha''(t)$ seja identicamente nula. O que podemos dizer a respeito de α?*

Questão 4. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada e seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor fixado. Admita que $\alpha'(t)$ seja ortogonal a v para todo $t \in I$ e que $\alpha(0)$ também seja ortogonal a v. Prove que α é ortogonal a v para todo $t \in I$.*

Questão 5. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, com $\alpha'(t)\neq 0$ para todo $t \in I$. Mostre que $|\alpha(t)|$ é uma constante não nula se e somente se $\alpha(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.*

Questão 6. *Mostre que as retas tangentes à curva parametrizada regular $\alpha(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y=0, z=x$.*

Questão 7. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada. Seja $[a,b]\subset I$ e defina $\alpha(a)=p$, $\alpha(b)=q$.*

i) Mostre que, para qualquer vetor constante v, $|v|=1$,

$$(q-p)\cdot v = \int_a^b \alpha(t)\cdot v dt \leq \int_a^b \left|\alpha'(t)\right| dt$$

ii) Defina

$$v = \frac{q-p}{|q-p|}$$

e mostre que

$$|\alpha(a)-\alpha(b)| \leq \int_a^b \left|\alpha'(t)\right| dt$$

isto é, a curva de menor comprimento de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ é o segmento de reta ligando estes pontos.

Questão 8. *Dada a curva parametrizada (hélice)*

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), s \in \mathbb{R}$$

onde $c^2 = a^2 + b^2$,

i) Mostre que o parâmetro s *é o comprimento de arco*

ii) Determine a curvaura e a torção de α

iii) Determine o plano oscilador de α

iv) Mostre que as retas contendo $n(s)$ *e passando por* $\alpha(s)$ *encontram o eixo* O_z *sob um ângulo constante igual a* $\frac{\pi}{2}$.

v) Mostre que as retas tangentes a α *fazem um ângulo constante com o eixo* O_z.

Questão 9. *Calcule a curvatura da elipse,* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $a \neq b$, *e mostre que ela possui exatamente quatro vértices, que são os pontos:(a,0), (-a,0), (b,0) e (-b,0).*

Referências

[1] CARMO, M.P., "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies", Coleção Textos Universitários - 6ªedição (2014).

[2] TAPP, K., "Differential Geometry of curves and surfaces", SPRINGER .