MAT 103 – Gabarito Lista de Exercícios 3

Junho 2008

Aqui vem as soluções de alguns dos exercícios da Lista.

Exercício 1.

(f) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 9}{\sqrt{|x|} - 1}$, a função não é derivável em $x = 0$. Para $x \neq 0$ a derivada da f é dada por:

$$f'(x) = \frac{10x\big(\sqrt{|x|} - 1\big) - (5x^2 - 9)\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\frac{|x|}{x}}{(\sqrt{|x|} - 1)^2}.$$

Note que na fórmula acima foi usado o fato que a função $g(x) = |x|$ não é derivável em 0, e que sua derivada para $x \neq 0$ é $g'(x) = \frac{|x|}{x}$, ou seja, $g'(x)$ é igual a -1 se x é negativo e igual a $+1$ se x é positivo.

(q) $f(x) = e^{\cos x^2}$, $f'(x) = -2\cos x \sin x\, e^{\cos x^2}$

(s) $f(x) = e^x \sin x + \cos^2\big(\ln(3x)\big)$.

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \frac{2}{x}\sin\big(\ln(3x)\big)\cos\big(\ln(3x)\big).$$

(t) $f(x) = \dfrac{\sin^3(\ln(2x+1))}{2\cos(e^{-x})}$, $f'(x)$ é dada por:

$$\frac{12\sin^2(\ln(2x+1))\cos(\ln(2x+1))\frac{1}{2x+1}\cos(e^{-x}) - 2e^{-x}\sin(e^{-x})\sin^3(\ln(2x+1))}{4\cos^2(e^{-x})}$$

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{\sqrt[3]{1 + 3x}}$,

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - x + 3)^{-\frac{1}{2}}(4x - 1)(1 + 3x)^{\frac{1}{3}} - 3\sqrt{2x^2 - x + 3}\,(1 + 3x)^{-\frac{2}{3}}}{(1 + 3x)^{\frac{2}{3}}}$$

(u) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2\ln x}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{x\ln x(1-x^2)^{-1/2} + x^{-1}\sqrt{1-x^2}}{(\ln x)^2}.$$

(v) $f(x) = 7^{\cos x^2} + \sin(e^{-x^2}) = e^{\ln(7)\ \cos x^2} + \sin(e^{-x^2})$,

$$f'(x) = -4x\sin x^2 \ln(7) 7^{\cos x^2} - 2xe^{-x^2}\cos(e^{-x^2}).$$

Exercício 3.

- $f(x) = e^{-x^2}$. O domínio da f é $\mathbb{R}$, f é uma função par e positiva. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; $x_0 = 0$ é um ponto de máximo global da f. O gráfico da f tem concavidade para cima em $\left]-\infty, -1/\sqrt{2}\right[$ e em $\left]1/\sqrt{2}, +\infty\right[$, e tem concavidade para baixo em $\left]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right[$.
- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. O domínio da f é $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f é estritamente crescente em $]-\infty, \alpha_-[$ e em $[\alpha_+, +\infty[$, onde $\alpha_\pm = \frac{4\pm\sqrt{34}}{9}$, e estritamente decrescente em $[\alpha_-, \alpha_+]$. O ponto $x = \alpha_-$ é um máximo local e o ponto $x = \alpha_+$ é um mínimo local. f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 4/9[$ e concavidade para cima em $]4/9, +\infty[$.

Exercício 4.

- $h = f^2 - fg, \quad h'' = 2(f')^2 + 2ff'' - f''g - 2f'g' - fg''$
- $h = f/g^2, \quad h'' = \dfrac{g^4\big(f''g^2 + 2gg'f' - 2(g')^2 f - 2gg''f - 2gg'f'\big) - 4g^3g'(f'g^2 - 2gg'f)}{g^8}.$
- $h = f\circ g, \quad h'' = (f''\circ g)(g')^2 + (f'\circ g)g''.$

Exercício 5.

- $f(x) = \text{arctg}(x^3 - 7)$, $f : [0, 2] \to I\!R$. Nesse caso, o TVM diz que existe $x_0 \in]0, 2[$ tal que:
$$f'(x_0) = \frac{3x_0^2}{1 + (x_0^3 - 7)^3} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\text{arctg}(7).$$
- $f(x) = \dfrac{1 + x}{2 - x^2}$, $x \in [-1, 0]$. Tem-se $\dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{1}{2}$, e $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{(2 - x^2)^2}$. Nesse caso, o TVM diz que existe $x_0 \in]-1, 0[$ such that:
$$\frac{x_0^2 + 2x_0 + 2}{(2 - x_0^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 6.

- $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, e
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{(1 + t)^2} = 0.$$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}$, $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 1}}$:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 1/x}{2\sqrt{1 - 1/x - 1/x^2}} = 1.$$
- $f(x) = \ln(2 + e^{3x})$, $f'(x) = \dfrac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}}$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3t}{2 + t} = 3.$$

Exercício 7.

- $f(x) = xe^{-x^2}$. f tem dois pontos críticos: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ é um ponto de mínimo (global) para f, e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ é um ponto de máximo (global) para f.

- $f(x) = \sin x + \cos x$. A função tem infinitos pontos críticos, dados pela seqüência

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

onde k é um número inteiro. Para k par, x_k é um ponto de máximo (global) da f, e para k ímpar, x_k é um ponto de mínimo (global) da f.

- $f(x) = \ln(x^2 + 5)$. A função tem um único ponto crítico, $x = 0$, que é um ponto de mínimo global da f.

Exercício 8. Em todas as questões do exercício é necessário usar o Teorema do Valor Médio e oportunas desigualdades para a derivada da função em questão, no intervalo dado.

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, no intervalo $x \in [4, 5]$ vale a desigualdade:

$$\frac{1}{26} = \frac{1}{1+5^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+4^2} = \frac{1}{17}.$$

Daí:

$$\frac{1}{26}|x-y| \leq |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq \frac{1}{17}|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [4, 5].$$

- $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, para $x \in [3, 5]$ vale:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}.$$

Daí:

$$\frac{1}{5}|x-y| \leq |\ln x - \ln y| \leq \frac{1}{3}|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [3, 5].$$

- $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, para $x \in [3, 10]$ vale:

$$e^3 \leq e^x \leq e^{10}.$$

Daí:

$$e^3|x-y| \leq |e^x - e^y| \leq e^{10}|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [3,5].$$

- $f(x) = \arccos x,\ f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $x \in \,]-1,1[$ vale:

$$|f'(x)| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1.$$

Daí:

$$|x-y| \leq |\arccos x - \arccos y|, \quad \forall\, x, y \in [-1,1].$$