EXISTÊNCIA DE VIZINHANÇAS CONVEXAS EM VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Nessas notas, denotaremos com (M, g) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e com $\exp : \mathcal{D} \subset TM \to M$ a sua aplicação exponencial e com $\pi : TM \to M$ a projeção canônica. Aqui, $\mathcal{D}$ é o domínio da exp, que é um aberto de TM contendo a seção nula; para $p \in M$, o conjunto $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_pM$ é um aberto estrelado em torno da origem, isto é, se $v \in \mathcal{D}_p$, então $tv \in \mathcal{D}_p$ para todo $t \in [0, 1]$.

Lembramos os seguintes resultados bem conhecidos (veja por exemplo O'Neill, cap. 5):

1. Proposição: (*Lema de Gauss*) *Seja $p \in M$, $v, w \in T_pM$, $v \in \mathcal{D}_p$; denote com $q = \exp_p(v)$. Então $g_q\big(\mathrm{d}\exp_p(v)v, \mathrm{d}\exp_p(v)w\big) = g_p(v, w)$.*

2. Lema: *Se $\exp_p : \mathcal{D}_p \to M$ não é singular em $v \in \mathcal{D}_p$, então a aplicação $E : \mathcal{D} \to M \times M$, definida por $E(w) = \big(\pi(w), \exp(w)\big)$, não é singular em v (e portanto é um difeo entre uma vizinhança de v in $\mathcal{D}_p$ e uma vizinhança de (p, p) in $M \times M$, onde $p = \pi(v)$).*

3. Definição: Se $p \in M$, uma vizinhança U de p é *normal* se existe um aberto $\widetilde{U} \subset \mathcal{D}_p$ estrelado em torno da origem, tal que a restrição da aplicação exponencial $\exp_p|_{\widetilde{U}}$ seja um difeomorphismo entre $\widetilde{U}$ e U. Um aberto $A \subset M$ é *convexo* se A é uma vizinhança normal de todo seu ponto.

Se $p \in M$ e U é uma vizinhança normal de p, podemos definir um sistema de coordenadas conveniente em U, determinado pela escolha de uma base ortonormal $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de T_pM. Dado $q \in U$, as coordenadas $\big(x^1(q), \ldots, x^n(q)\big)$ são definidas como as coordenadas do vetor $\exp_p^{-1}(q)$ na base B. Um sistema de coordenada desse tipo é chamado um *sistema de coordenadas normais* em torno de p. Se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas normais em torno de $p \in m$, então as funções x^i, os coeficientes da métrica g_{ij} e os símbulos de Christoffel da conexão de Levi–Civita de g satisfazem as seguintes identidades no ponto p:

$$x^i(p) = 0, \quad g_{ij}(p) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \forall\, i, j, k = 1, \ldots, n,$$

onde $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ para todo i e δ_{ij} é o símbulo de Kronecker.

O resultado que queremos provar é o seguinte:

4. Proposição: *Todo ponto p admite uma vizinhança convexa.*

Demonstração. Escolha um sistema de coordenadas normais $(x^1, \ldots, x^n)$ em torno de p, definido numa vizinhança V de p; denote com $\partial_1, \ldots, \partial_n$ os campos coordenados desse sistema. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno, de forma que o aberto:

$$V_\delta = \Big\{ q \in V : \sum_{i=1}^{n} x^i(q)^2 < \delta \Big\}$$

seja tal que exista um aberto $\widetilde{V} \subset \mathcal{D}$ contendo $0 \in T_pM$ com a propriedade que $E|_{\widetilde{V}}$ seja um difeomorphismo entre $\widetilde{V}$ e $V_\delta \times V_\delta$. Considere o tensor $(0, 2)$ simétrico B em V_δ cujas componentes na base $\partial_1, \ldots, \partial_n$ sejam $B_{ij}(q) = \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k(q)$. Claramente, $B_{ij}(p) = \delta_{ij}$, e, escolhendo um $\delta > 0$ possivelmente menor, podemos supor que B é uma métrica Riemanniana (i.e., definida positiva) em V_δ.

Asserimos que, com essa escolha de δ, o aberto V_δ é uma vizinhancą convexa de p. Para mostrar isso, seja $q \in V_\delta$ arbitrário, e seja $\widetilde{W}_q = \widetilde{V} \cap T_qM$. Pela nossa construção, $E|_{\widetilde{W}_q}$ é um difeomorfismo entre $\widetilde{W}_q$ e $\{q\} \times V_\delta \subset V_\delta \times V_\delta$, ou seja, $\exp_q|_{\widetilde{W}_q}$ é um difeomorfismo entre $\widetilde{W}_q$ e V_δ. Para concluir a prova da nossa afirmação, basta mostrar que $\widetilde{W}_q$ é estrelado em torno da origem de T_qM. Para isso, seja $v \in \widetilde{W}_q$ fixado, com $v \neq 0$, e seja $r = \exp_q(v) \in V_\delta$. Mostrar que $tv \in \widetilde{W}_q$ para todo $t \in [0, 1]$ é o mesmo que mostrar que a geodésica $\gamma_v : [0, 1] \to M$ definida pela condições iniciais $\gamma_v(0) = q$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$, tem imagem em V_δ.

Suponha por absurdo que γ_v saia de V_δ em algum instante $t \in\,]0, 1[$; então, a função $f(t) = \sum_k x^k\big(\gamma(t)\big)^2$ teria um máximo t_0 em $]0, 1[$. Mostramos que isso não é possível. Derivando duas vezes a função f, e usando as equações das geodésicas:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(x^k \circ \gamma\big) = -\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k\big(\gamma(t)\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^i \circ \gamma\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^j \circ \gamma\big),$$

05.10.2005, Paolo Piccione: adaptação da Proposition 5.7, página 130, O'Neill, "Semi–Riemannian Geometry...".

obtemos:

$$f''(t) = 2\sum_{ij}\big[\delta_{ij} - \sum_{ij}\Gamma^k_{ij}\big(\gamma(t)\big)\big]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^i\circ\gamma\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x^j\circ\gamma\big) = B\big(\gamma'(t),\gamma'(t)\big) > 0.$$

Isso prova que f não pode ter máximos em $]0,1[$ e conclui a demostração. **QED**