Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos

Paulo Feofiloff

Yoshiharu Kohayakawa

Yoshiko Wakabayashi

IME–USP

www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/

25/10/2004 11:00

Prefácio

Grafos são bons modelos para muitos problemas em

- matemática e combinatória
- informática e computação
- física
- biologia
- engenharia
- pesquisa operacional
- muitos ramos da indústria

Trataremos de quatro temas

- conjuntos estáveis
- coloração de vértices
- emparelhamentos
- coloração de arestas

Outros temas: planaridade, isomorfismo, conexidade, fluxo, circuitos hamiltonianos, florestas e árvores, grafos aleatórios.
Alguns aparecem em outros cursos da Bienal

AULA 1A

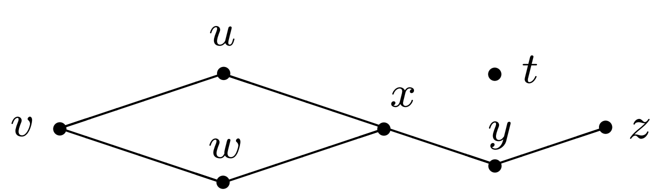
Conceitos básicos

Grafos

- conjunto de vértices
- conjunto de arestas
- aresta $=$ par de vértices
- vértices adjacentes
- $G = (V, A)$

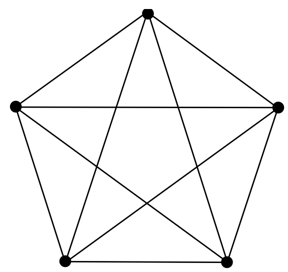
Vértices: u, v, w, x, y, z, t

Arestas: vw, uv, xw, xu, yz, xy

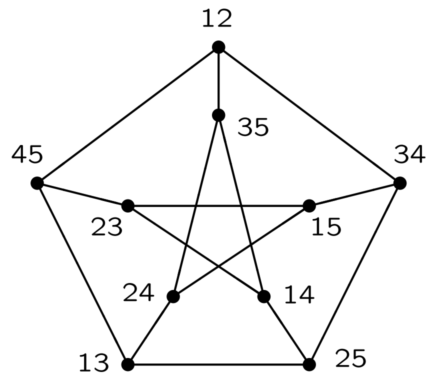


G

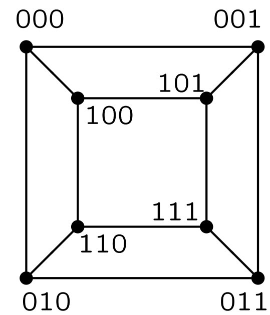
- $n =$ número de arestas
- $m =$ número de arestas $\leq \binom{n}{2}$



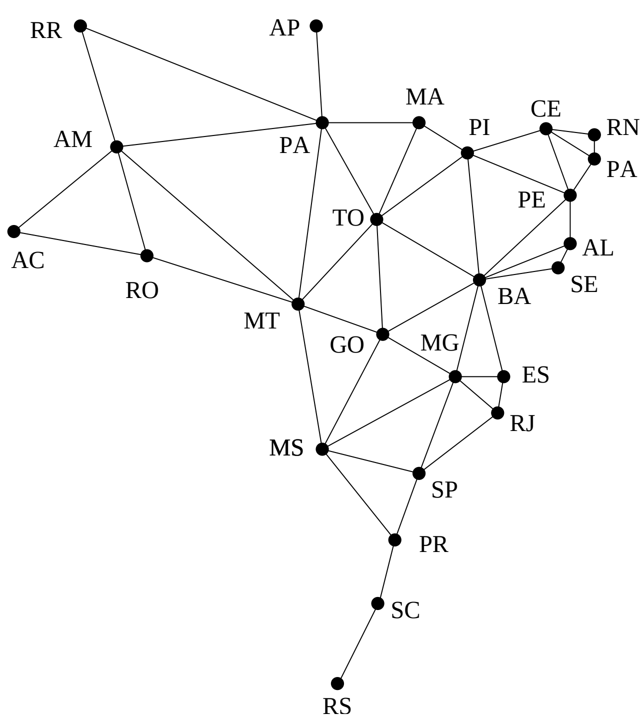
completo



Petersen

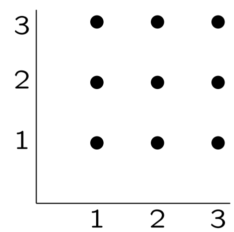


cubo



estados adjacentes

grafo da dama
bispo

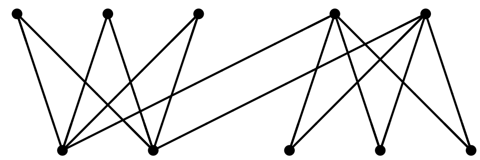


pontos no plano

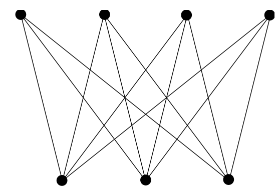
$uv \in A$

sse

$\mathrm{d}(u,v) < 2$



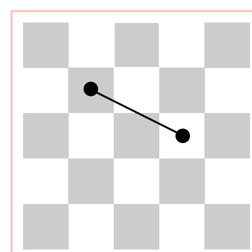
bipartido



bipartido completo

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

matriz $\{0,1\}$ simétrica



cavalo (bipartido)

- grau de um vértice: $\mathrm{g}(v)$
- grau máximo do grafo: $\Delta(G)$
- grau mínimo do grafo: $\delta(G)$

AULA 1B

Conjuntos estáveis

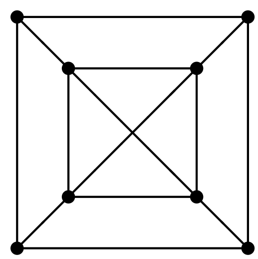
cliques

coberturas

Cliques

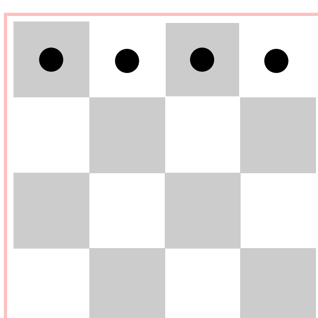
Clique: conj de vértices dois-a-dois adjacentes

X é clique sse $G[X]$ é completo

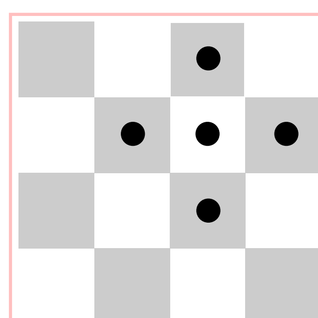


- clique maximal
- clique máxima
- $\omega(G) := \max_X |X|$

Dama 4×4



clique maximal

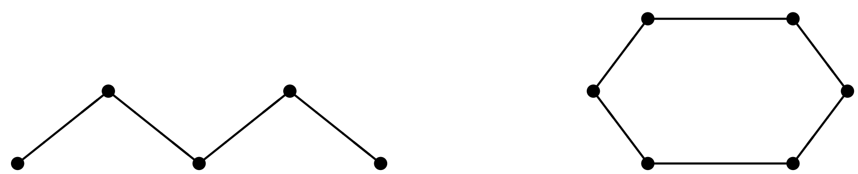


clique máxima

Conjuntos estáveis

$X \subseteq V(G)$

X é **estável** se seus elementos são dois-a-dois não-adjacentes

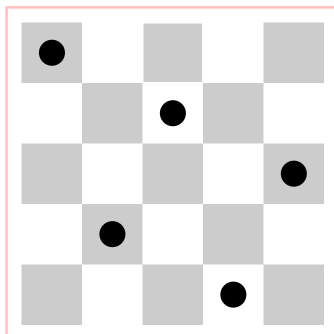


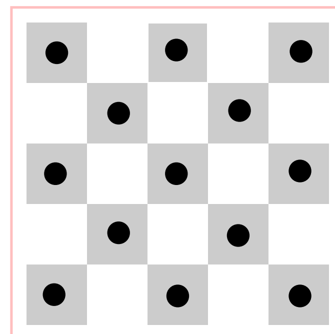
- conj estável maximal
- conj estável máximo
- $\alpha(G) := \max_X |X|$

Fato: $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$

Exemplo 1: postos de gasolina

Exemplos 2 e 3:





dama $\alpha = 5$

cavalo $\alpha = 13$

Conj estável máximo no grafo dos estados do Brasil?
no grafo da rainha 100×100?

Complexidade computacional

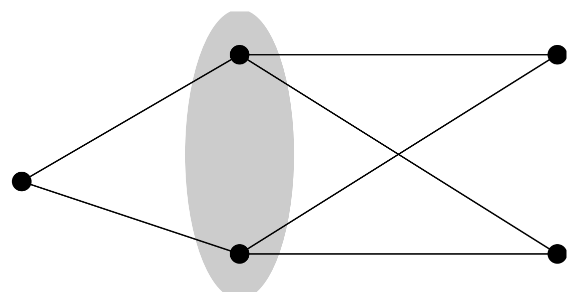
- Calcular $\alpha(G)$: tempo $2^{n(G)}$
- Isso não é aceitável na prática
- Mas não vamos tratar de algoritmos
- Nosso enfoque: delimitações de $\alpha(G)$
- $\alpha(G) \leq$?? $\quad \alpha(G) \geq$??
- Relação entre $\alpha(G)$ e outros parâmetros de G

  Intuição: α tanto maior quanto menor for Δ

Delimitação inferior: $$\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$$

PROVA: Exibir cj estável grande

- Tome cj estável maxim*al* X
- $|\nabla(X)| \;=\; \sum_x \mathrm{g}(x) \;\leq\; |X| \cdot \Delta$
- $|V \setminus X| \;\leq\; |\nabla(X)|$
- $n = |X| + |V \setminus X| \;\leq\; |X| + |\nabla(X)| \;\leq\; |X| \cdot (1 + \Delta)$
- $|X| \;\geq\; \frac{n}{\Delta+1}$



Comentários sobre ∇ e espaço dos cociclos

Generalização: $$\alpha(G) \geq \sum_v \frac{1}{\mathrm{g}(v)+1}$$

Delimitação superior: $\alpha(G) \leq \dfrac{m(G)}{\delta(G)}$

PROVA: Para *qualquer* conj estável X

$m \ \geq \ |\nabla(X)| \ = \ \sum_x \mathsf{g}(x) \ \geq \ |X| \cdot \delta$

Importância de delimitações superiores:
se X é estável e $|X| = \left\lfloor \frac{m}{\delta} \right\rfloor$ então X é máximo

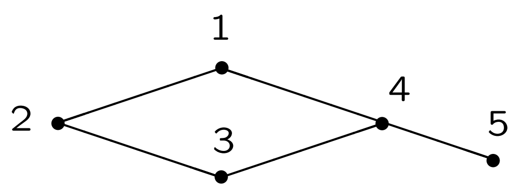
Ciclo C_{2p+1}: $|X| = p = \lfloor \frac{m}{\delta} \rfloor$

Bipartido $K_{p,q}$ ($p \leq q$): $|X| = q = \frac{pq}{p} = \frac{m}{\delta}$

Delimitação superior: $\alpha(G) \leq n(G) - p(G)/2$

$p(G)$:= posto da matriz de adjacências

Exemplo:



$$M(G) = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Delimitação superior: $\alpha(G) \leq \max_X e'Xe$

$$uv \in A(G) \Rightarrow X_{uv} = 0$$

$$\sum_v X_{vv} = 1$$

$$X \succeq 0$$

Maioria dos grafos têm α pequeno:

$$\alpha(G) < 2.2 \log_2 n$$

para quase todo G

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathcal{G}|} = 1$$

Exemplo: 99.9% dos grafos com 1024 vértices
têm $\alpha < 22 = 2.2 \log_2 1024$

Grafos aleatórios

Por menor que seja $\varepsilon > 0$, $\alpha(G) < (2+\varepsilon)\log_2 n$ para quase todo G

PROVA:

- $k := \lceil (2+\varepsilon)\log_2 n \rceil$
- Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|\mathcal{G} \setminus \mathcal{P}|}{|\mathcal{G}|} = 0$
- $X \subseteq V(G)$, $|X| = k$, $N = \binom{n}{2}$, $K = \binom{k}{2}$
- X é estável em 2^{N-K} dos grafos
- $|\mathcal{G} \setminus \mathcal{P}| \le n^k 2^{N-K}$
- $\dfrac{|\mathcal{G} \setminus \mathcal{P}|}{|\mathcal{G}|} \le \dfrac{n^k}{2^K}$

Cliques vs cjs estáveis: números de Ramsey

Intuição: se α é pequeno estão ω é grande

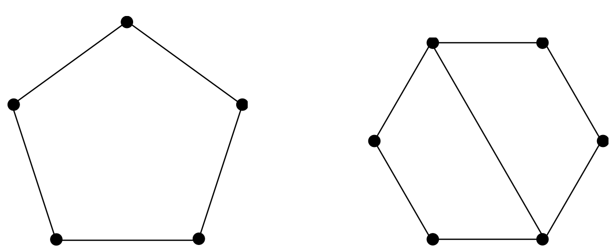
Teorema de Ramsey: Para todo s e t todo G tem

$$\alpha(G) \geq s \quad \text{ou} \quad \omega(G) \geq t$$

desde que $n(G) \geq R(s,t)$

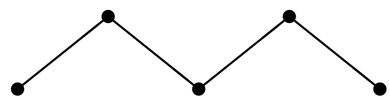
- Prove que $R(s,t) \ \leq \binom{s+t-2}{s-1}$
- Dica $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

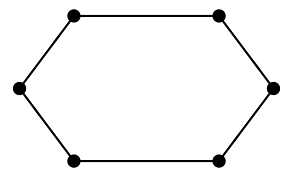
Exemplo: $R(3,3) = 6$



Coberturas

$X \subseteq V(G)$ é uma **cobertura** se
toda aresta tem pelo menos uma ponta em X

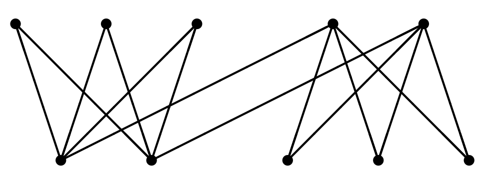




- cobertura minimal
- cobertura mínima
- $\beta(G) := \min_X |X|$

Fato: $\beta = n - \alpha$

PROVA: X é cobertura $\Leftrightarrow$ $V \setminus X$ é estável



Exercícios para amanhã

- Conj estável máximo do grafo da dama 8×8
- Conj estável máximo do grafo do bispo $t \times t$

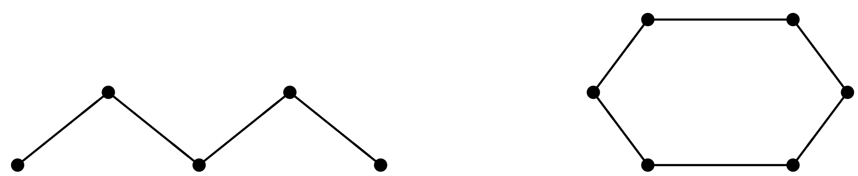
AULA 2

Emparelhamentos

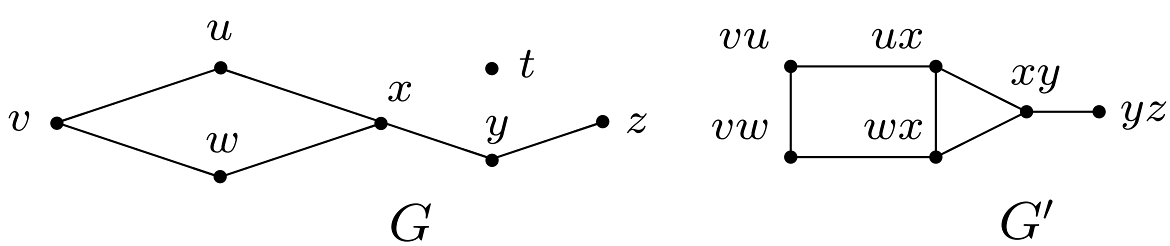
Emparelhamentos

$E \subseteq A(G)$

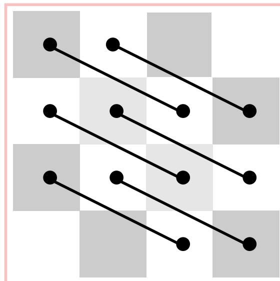
E é **emparelhamento** se $|E \cap \nabla(v)| \leq 1$ para todo v



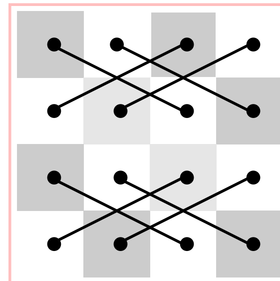
Grafo das arestas de G:
emparelhamento $\ggg$ conj estável



- emp maximal
- emp máximo
- $\alpha'(G) := \max_E |E|$



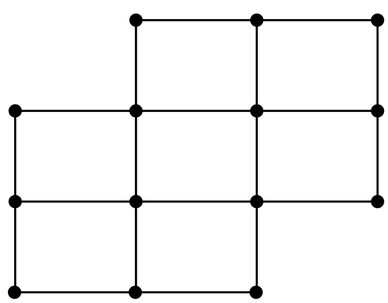
maximal



máximo

Delimitação: $\alpha'(G) \leq \beta(G)$

PROVA: $|E| \leq |C|$ para qquer emp E e qquer cob C



Se $|E| = |C|$ então E é máximo

Infelizmente, $\alpha' < \beta$ para muitos grafos

Mas...

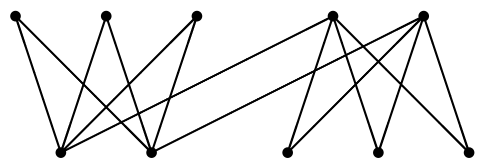
Teorema de König:

<u>Se</u> G é bipartido <u>então</u> $\alpha'(G) = \beta(G)$

Antes de provar o teorema:
desvio para estudar emps que saturam um lado da bipartição

Caso bipartido

- Grafo (U, W)-bipartido
- Queremos emp que satura U
- Condições de existência?



Exemplos:

- moças e rapazes
- representantes distintos

Condição de Hall: $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq U$

Fato: Se existe emp E que satura U
então vale cond de Hall

PROVA:

- $H := (V(G), E)$
- $|\Gamma_G(X)| \geq |\Gamma_H(X)| = |X|$ para todo X

Teorema de Hall:

<u>Se</u> vale cond de Hall <u>então</u> existe emp que satura U

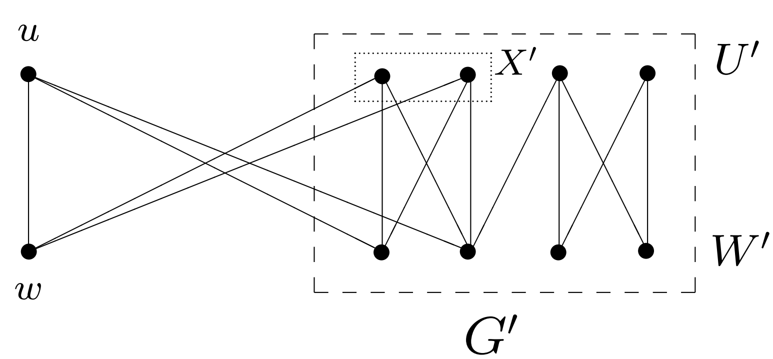
PROVA, por indução em $|U|$:

Se $|U| = 1$ então temos emp q satura U

Suponha agora que $|U| > 1$

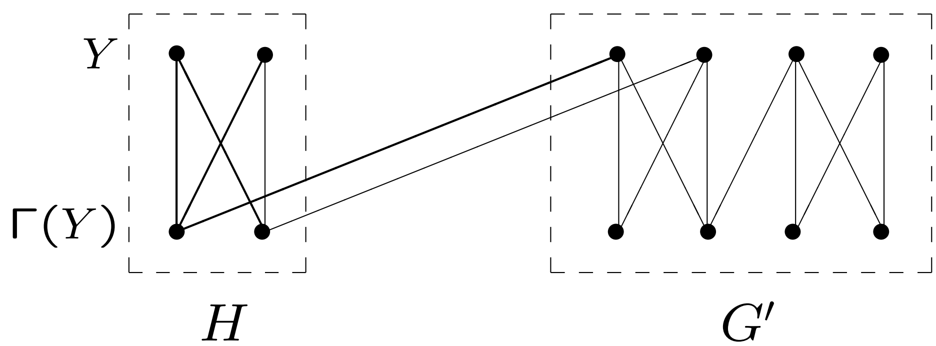
ALTERNATIVA 1: $|\Gamma_G(X)| > |X|$ para todo $\emptyset \subset X \subset U$

- Escolha $uw \in A(G)$
- $G' := (G - u) - w$ satisfaz condição de Hall
- Hip de indução: G' tem emp E' que satura U'
- $E' \cup \{uw\}$ é emp em G que satura U



ALTERNATIVA 2: $|\Gamma_G(Y)| = |Y|$ para algum $\emptyset \subset Y \subset U$

- $H := G[Y \cup \Gamma_G(Y)]$ satisfaz condição de Hall
- Hip de indução: H tem emp F que satura Y
- $G' := G - V(H)$ satisfaz condição de Hall
- Hip de indução: G' tem emp E' que satura U'
- $F \cup E'$ é emp em G que satura U. $\square$



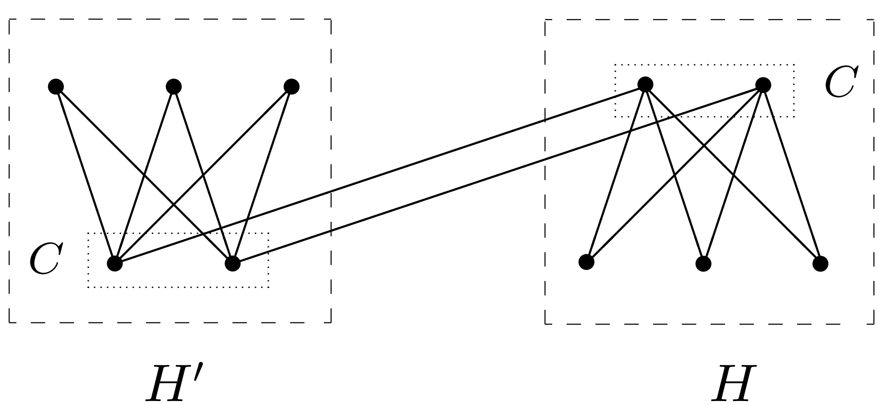
De volta ao emp máximo. . .

Emparelhamento máximo em grafos bipartidos

Teorema de König:
Se G é bipartido então $\alpha'(G) = \beta(G)$

PROVA: Basta encontrar E e C tq $|E| = |C|$

- Cobertura mínima C
- $H := G[(U \cap C) \cup (W \setminus C)]$
- H satisfaz condições de Hall (se $|\Gamma_H(X)| < |X|$ então $(C \setminus X) \cup \Gamma_H(X)$ seria cobertura de G menor que C)
- H tem um emp F que satura $U \cap C$
- $H' := G[(W \cap C) \cup (U \setminus C)]$
- H' tem emp F' que satura $W \cap C$
- $F \cup F'$ é um emp em G e $|F \cup F'| = |C|$



Teorema de König é um “teorema min-max”

De volta aos grafos arbitrários . . .

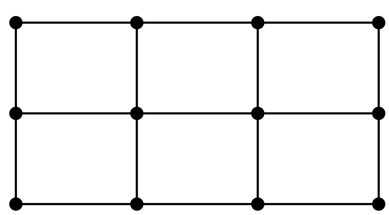
Emparelhamento perfeito

Um emp é **perfeito** se satura todos os vértices

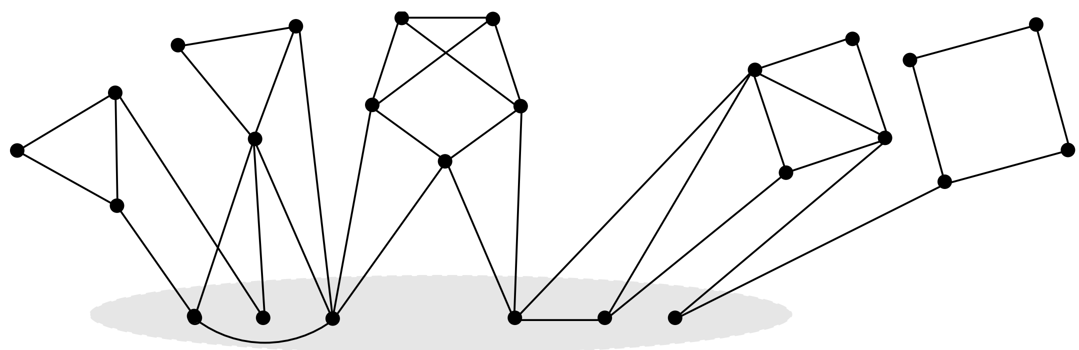
Condições de existência?

Exemplos:

- estados do Brasil
- grade
- *slither*



Condição de Tutte:
$i(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$



Exercício: condição de Tutte implica n par

Fato: Se G tem emp perfeito
então condição de Tutte satisfeita

Teorema de Tutte: Se condição satisfeita
então G tem emp perfeito

Emparelhamento máximo

Teorema de Tutte-Berge: Para qquer G

$$\alpha'(G) = \frac{n(G)}{2} - \max_{S \subseteq V} \frac{i(G-S) - |S|}{2}$$

PROVA: Basta encontrar E e S tais que
no máximo $i(G-S) - |S|$ vértices ficam insaturados

Esse é um “teorema minimax”

Exercício para amanhã:

- Todo grafo bipartido k-regular tem um emp perfeito
- Em qquer grafo G, se X é emp maximal então $|X| \geq \frac{1}{2}\alpha'$

AULA 3A

Coloração de vértices

Coloração de vértices

AULA 3B

Coloração de arestas

Coloração de arestas