Capítulo 6

Algoritmos Probabilísticos

6.2 Desaleatorização

Eis uma versão da desaleatorização do algoritmo de Johnson que é mais fácil de entender que a do livro (embora seja menos eficiente). Ela depende do conceito de esperança condicional definido pela função EspCond. Ela recebe subconjuntos V_0 e V_1 de V tais que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ e devolve o número esperado de cláusulas satisfeitas sob a seguinte condição: todas as variáveis em V_0 têm valor 0, todas as variáveis em V_1 têm valor 1 e cada uma das demais variáveis tem valor 0 ou 1 com igual probabilidade.

Função EspCond $(V_0, V_1, \mathcal{C})$

$esp \leftarrow 0$
para cada C em $\mathcal{C}$ faça
    se $C_0 \cap V_0 \neq \emptyset$ ou $C_1 \cap V_1 \neq \emptyset$
        então $esp \leftarrow esp + 1$
        senão $k \leftarrow |C_0 \setminus V_1| + |C_1 \setminus V_0|$
            $esp \leftarrow esp + (1 - 2^{-k})$
devolva esp

Eis o algoritmo desaleatorizado:

Algoritmo MaxSat-Johnson-Desaleatorizado $(V, \mathcal{C})$

$V_0 \leftarrow V_1 \leftarrow \emptyset$
enquanto $V_0 \cup V_1 \neq V$ faça
    escolha v em $V \setminus (V_0 \cup V_1)$
    se EspCond $(V_0 \cup \{v\}, V_1, \mathcal{C}) \leq$ EspCond $(V_0, V_1 \cup \{v\}, \mathcal{C})$
        então $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{v\}$

```
        senão V_0 ← V_0 ∪ {v}
para cada v em V_0 faça ẋ_v ← 0
para cada v em V_1 faça ẋ_v ← 1
devolva ẋ
```

Teorema 6.6: O algoritmo MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO é uma 0,5-aproximação polinomial para o MAXSAT.

Demonstração: Seja $X_{\mathcal{C}}$ a variável aleatória cujo valor é o número de cláusulas em $\mathcal{C}$ satisfeitas por uma valoração produzida pelo algoritmo MAXSAT-JOHNSON. Digamos que v_1 é a primeira variável processada pelo algoritmo MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO. É claro que

$$\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}}] = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}1] + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}0]\,,$$

donde $\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}}]$ não ultrapassa a maior dentre as esperanças condicionais $\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}1]$ e $\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}0]$. Logo, $\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}}] \leq \mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}\dot{x}_{v_1}]$, onde $\dot{x}_{v_1}$ é o valor que MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO adota para v_1. Uma vez fixado o valor de v_1, basta repetir o raciocínio para as demais variáveis. Concluímos então que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}}] &\leq \mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}\dot{x}_{v_1}] \\
&\leq \mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}\dot{x}_{v_1},\, x_{v_2}{=}\dot{x}_{v_2}] \\
&\leq \ldots \\
&\leq \mathbf{E}[X_{\mathcal{C}} \mid x_{v_1}{=}\dot{x}_{v_1},\, \ldots,\, x_{v_n}{=}\dot{x}_{v_n}]\,.
\end{aligned}$$

O último termo é o número de cláusulas de $\mathcal{C}$ satisfeitas pela valoração $\dot{x}$ produzida pelo algoritmo MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO. Esse número é pelo menos $0{,}5\,\mathrm{opt}(V,\mathcal{C})$, pois $\mathbf{E}[X_{\mathcal{C}}] \geq 0{,}5\,\mathrm{opt}(V,\mathcal{C})$.

Quanto ao consumo de tempo do algoritmo, basta observar que cada execução da função ESPCOND consome tempo $O(|\mathcal{C}||V|)$, e portanto MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO consome tempo $O(|\mathcal{C}||V|^2)$. ∎

Para concluir, eis uma versão um pouco mais eficiente do algoritmo desaleatoriado:

Algoritmo MAXSAT-JOHNSON-DESALEATORIZADO' $(V, \mathcal{C})$

```
V_01 ← ∅
enquanto V_01 ≠ V faça
    escolha v em V \ V_01
    esp_0 ← esp_1 ← 0
```

05 para cada C em $\mathcal{C}$ faça
06 $k \leftarrow |C_0 \setminus V_{01}| + |C_1 \setminus V_{01}|$
07 se $v \in C_0$
08 então $esp_0 \leftarrow esp_0 + 1$
09 $esp_1 \leftarrow esp_1 + (1 - 2^{-k+1})$
10 se $v \in C_1$
11 então $esp_1 \leftarrow esp_1 + 1$
12 $esp_0 \leftarrow esp_0 + (1 - 2^{-k+1})$
13 se $esp_0 \leq esp_1$
14 então $\dot{x}_v \leftarrow 1$
15 senão $\dot{x}_v \leftarrow 0$
16 $V_{01} \leftarrow V_{01} \cup \{v\}$
17 devolva $\dot{x}$

Para entender o efeito da linha 16, basta observar que a diferença $esp_0 - esp_1$ tem o mesmo valor que

$$\textsc{EspCond}(V_0, V_1 \cup \{v\}, \mathcal{C}) - \textsc{EspCond}(V_0 \cup \{v\}, V_1, \mathcal{C})\ .$$

Essa versão do algoritmo tem um sabor "guloso" e poderia ser justificada sem qualquer referência à aleatorização, probabilidades, valores esperados, etc. [Justificativa: troque valor esperado pela soma S de todas as cláusulas satisfeitas em todos os 2^n possíveis valores de x. Enquanto nenhuma variável tem valor fixo, $S \geq 2^{n-1}|\mathcal{C}|$ pois se a soma da cláusulas satisfeitas por cada par x, x', sendo x' o complementar de x, é $|\mathcal{C}|$. Depois de i iterações do algoritmo desaleatorizado teremos $S \geq 2^{n-i}|\mathcal{C}|$. Logo, quando $i = n$, teremos $S \geq (1/2)|\mathcal{C}|$: metade das cláusulas estará satisfeita.]