

MAC0320

Exercícios preliminares

IME-USP, 6/3/2012

Estes exercícios tratam de rudimentos da teoria dos conjuntos e de algumas outras trivialidades. Se você pretende cursar MAC0320 (Introdução à Teoria dos Grafos) — veja <http://www.ime.usp.br/~pf/mac0320-2012/> — você deveria ser capaz de resolver esta lista de exercícios em meia hora.

1 Conjuntos e seqüências

A seqüência cujos elementos são a, b e c — nesta ordem — é denotada por ()

$$(a, b, c) \text{ ou por } abc.$$

O conjunto¹ (usa-se também o termo *coleção*) cujos elementos são a, b e c é denotado por { }

$$\{a, b, c\}.$$

A união de conjuntos X e Y é denotada por $X \cup Y$. A interseção de X e Y é denotada por $X \cap Y$. A diferença entre X e Y é denotada por

$$X - Y \text{ ou por } X \setminus Y.$$

$$\begin{array}{l} X \cup Y \\ X \cap Y \\ X - Y \\ X \setminus Y \end{array}$$

Um conjunto X é *disjunto* de um conjunto Y se $X \cap Y = \emptyset$.

disjunto

Exercício 1.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

$$(1, 2, 3) = (3, 1, 2)$$

$$\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$(1, 2, 2, 3) = (1, 2, 3)$$

$$\{1, 2, 3\} = (1, 2, 3)$$

¹ Loterias como a Sena sorteiam um *conjunto* de números: qualquer pessoa que tenha um bilhete com o conjunto de números sorteados leva o prêmio. Já o jogo do bicho sorteia uma *seqüência* de números: qualquer pessoa que tenha um bilhete com a seqüência sorteada leva o prêmio.

Exercício 1.2 Seja A o conjunto $\{b, a, c, f, d\}$. Qual o primeiro elemento de A ? Qual o último?

Exercício 1.3 Sejam A e B os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 1, 5, 4\}$ respectivamente. Quanto valem $A \cup B$, $B \cup A$ e $A \cap B$? Quanto vale $a \cap b$? Quanto valem $A \cup \emptyset$ e $A \cap \emptyset$?

Exercício 1.4 Qual a diferença entre \emptyset , $\{\}$ e $\{\emptyset\}$?

Exercício 1.5 Se A e B são conjuntos de números e b é um número, o que significa cada uma das expressões abaixo?

$$A \cup b \quad A \cup B \quad A \cup \{B\} \quad A \cup \{b\}$$

Exercício 1.6 O conjunto $\{1, 2, 3\}$ é disjunto do conjunto $\{2, 5, 4\}$?

Exercício 1.7 Sejam A , B e C os conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 6\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$ respectivamente. Quanto valem $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \setminus C$?

Exercício 1.8 Se a é um elemento de um conjunto A , o que significam as expressões abaixo?

$$A \setminus a \quad A \setminus \{a\}$$

Exercício 1.9 Qual o complemento de $\{1, 2, 3, 5\}$ em $\{1, \dots, 10\}$?

complemento

2 Cardinalidade e comprimento

O *comprimento* de uma sequência é o número de termos da sequência. A *cardinalidade* de um conjunto é o número de elementos do conjunto. A cardinalidade de um conjunto X é denotada por $|X|$.

$|X|$

Exercício 2.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

$$|\{1, 2, 3, 2\}| = 4 \quad (1, 2, 2, 3) \text{ tem comprimento } 3$$

Exercício 2.2 Digamos que um conjunto A tem 10 elementos e um conjunto B tem 20 elementos. Quantos elementos tem $A \cup B$?

Exercício 2.3 Sejam A e B os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 4, 5\}$ respectivamente. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

$$|A| \leq |B| \quad |A| \geq |B| \quad |A| < |B| \quad |A| > |B|$$

3 Subconjuntos

Um *subconjunto* de um conjunto é ... todos nós sabemos o que é um subconjunto. Um subconjunto S de um conjunto X é *próprio* se $S \neq X$. As expressões

$$X \subseteq Y \quad \text{e} \quad X \subset Y$$

própria
 $X \subseteq Y$
 $X \subset Y$

são abreviaturas de “ X é subconjunto de Y ” e “ X é subconjunto próprio de Y ” respectivamente.

Exercício 3.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

- \emptyset é subconjunto de $\{2, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto de $\{5, 1, 2, 4, 3\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto próprio $\{5, 1, 2, 4, 3\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto de $\{5, 1, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto próprio de $\{2, 1, 3\}$

Exercício 3.2 Sejam A e B os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 1, 2, 5, 4\}$ respectivamente. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

$$A \subseteq B \quad A \supseteq B \quad A \subset B \quad A \supset B \quad B \supset A$$

Exercício 3.3 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

- $\{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\} \subseteq \{1, 2, 4, 6\}$
- $\{2, 4, 6\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $\{2, 4, 6\} \in \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\}$

Exercício 3.4 Escreva a sentença “ $k \in X$ ” em português (sem usar o símbolo “ \in ”).

Exercício 3.5 Faça uma lista de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são os subconjuntos de um conjunto com n elementos?

Exercício 3.6 Quantos subconjuntos de $\{2, 3, 4, 5\}$ têm exatamente 2 elementos? Se um conjunto tem n elementos, quantos de seus subconjuntos têm 2 elementos?

Exercício 3.7 Faça uma lista de todas as permutações dos elementos do conjunto $\{3, 1, 4\}$. Quantas são as permutações dos elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$?

permutação

4 Pares ordenados e pares não ordenados

Um *par ordenado* é essencialmente o mesmo que uma sequência de comprimento 2. Um *par não ordenado* é um conjunto com exatamente 2 elementos.

par
ordenado
não ordenado

Exercício 4.1 Faça uma lista de todos os pares ordenados de elementos de $\{1, 2, 3\}$. Faça uma lista de todos os pares não ordenados de elementos de $\{1, 2, 3\}$.

Exercício 4.2 Seja A um conjunto com n elementos. Quantos pares ordenados de elementos de A existem? Quantos pares não ordenados?

5 Partições

Uma *partição* de um conjunto X é qualquer coleção de conjuntos dois a dois disjuntos cuja união é X . Em outras palavras, uma partição de X é qualquer coleção $\{X_1, \dots, X_k\}$ de subconjuntos de X tal que

partição

$$X_1 \cup \dots \cup X_k = X \quad \text{e} \quad X_i \cap X_j = \emptyset \text{ sempre que } i \neq j.$$

(Suporemos quase sempre que $X_i \neq \emptyset$ para todo i .)

Uma *bipartição* de um conjunto X é qualquer partição de X em duas partes, ou seja, um par $\{A, B\}$ de subconjuntos de X tal que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.²

bipartição

Exercício 5.1 É verdade que $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, 5\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Exercício 5.2 Faça uma lista de todas as bipartições de $\{2, 3, 5\}$. Faça uma lista de todas as partições de $\{2, 3, 5\}$.

6 Relações e funções

O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados da forma (a, b) com a em A e b em B . O produto cartesiano de A e B é denotado por $A \times B$.

produto
cartesiano
 $A \times B$

Uma *relação* entre dois conjuntos A e B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

relação

² Infelizmente, há muita bobagem rolando por aí a respeito da palavra “partição”. Suponha

Exercício 6.1 Seja A o conjunto $\{1, 2, 3\}$ e B o conjunto $\{3, 4\}$. Faça uma lista de todos os elementos de $A \times B$.

Exercício 6.2 O que é uma *função* de um conjunto A em um conjunto B ? Dica: uma função é um tipo especial de relação entre A e B . função

Exercício 6.3 O que é uma *bijeção*? bijeção

7 Piso, teto, números, aritmética modular

Exercício 7.1 Qual das expressões abaixo define o conjunto dos números naturais? números naturais

- $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\{1, 2, 3, \dots\}$
- todos os números da forma p/q , com p e q inteiros e $q > 0$

Exercício 7.2 Quanto vale $365 \bmod 12$?

Exercício 7.3 Quanto vale $\lfloor 365/12 \rfloor$? Quanto vale $\lceil 365/12 \rceil$? piso

Exercício 7.4 Quanto vale $\lfloor n/2 \rfloor$? Quanto vale $\lceil n/2 \rceil$? teto

[]

8 Lógica

Nas questões a seguir, as letras A e B representam afirmações³ (por exemplo, “ n é divisível por 5” ou “existe k tal que $n = 3k + 1$ ” ou “ n e m são ímpares” ou “ $a^{n-1} = 1$ ” ou “ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ”).

que $\{A, B\}$ é uma partição de X . Então A é um dos *elementos* (ou *partes*) da partição e B é outro *elemento*. Não faz sentido dizer “ A é uma das *partições* de X ”. Também está errada a expressão “ A e B são as *partições* de X ”. Essas expressões têm o mesmo sabor que o par de frases “O casal Antônio e Benedita tem uma vida difícil. O casal Antônio está desempregado, e o casal Benedita trabalha como faxineira.”

³ Também conhecidas como *proposições*.

Exercício 8.1 Suponha que a proposição “se A então B ” é verdadeira. A proposição “se B então A ” é verdadeira?

Exercício 8.2 Reescreva a afirmação “ A somente se B ” usando a construção “se ... então”.

Exercício 8.3 Reescreva a afirmação “ A se B ” usando a construção “se ... então”.

Exercício 8.4 Reescreva a afirmação “ A se e somente se B ” usando a construção “se ... então”.

Exercício 8.5 Suponha que as letras A e B representam afirmações. Qual a diferença entre as expressões abaixo?

- A se B
- A implica B
- se A então B
- A somente se B
- A se e somente se B
- B implica A

Exercício 8.6 Se A é uma afirmação, então $\neg A$ é a negação dessa afirmação. Qual diferença entre as expressões abaixo?

- se A então $\neg B$
- se B então $\neg A$

9 Recursão

Exercício 9.1 Escreva uma função *recursiva* para resolver o seguinte problema: encontrar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[1..n]$ de números inteiros. (Você pode escrever a função em pseudocódigo, em Pascal ou em C, como preferir.)

Exercício 9.2 Escreva uma função *recursiva* que calcule a soma dos elementos de um vetor $v[1..n]$ de números inteiros. (Você pode escrever a função em pseudocódigo, em Pascal ou em C, como preferir.)