

Digrafos: roteiro de curso

<http://www.ime.usp.br/~pf/digraphs/>

Paulo Feofiloff

1 de julho de 2017

Prefácio

Este é o meu roteiro para um curso de grafos dirigidos baseado no livro de Bang-Jensen e Gutin [BJG02]. O livro não é, propriamente, um texto didático; é mais um livro de referência. Por isso, não é uma boa idéia ler o livro linearmente: página 1, página 2, etc. No restante desse meu roteiro, procurei colocar os vários tópicos numa ordem mais razoável que a do livro.

Vou usar as seguintes abreviaturas para me referir aos teoremas, lemas, etc. do livro:

T.1.2.3	Theorem 1.2.3
L.1.2.3	Lemma 1.2.3
C.1.2.3	Corollary 1.2.3
P.1.2.3	Proposition 1.2.3
Cnj.1.2.3	Conjecture 1.2.3
E.1.2	Exercise 1.2.3
§1	Chapter 1
§1.2	Section 1.2
§1.2.3	Subsection 1.2.3

— P.F.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Digrafos	9
1.2	Alguns tipos de digrafos	11
1.3	Algumas operações sobre digrafos	12
1.4	Generalizações de digrafos	13
2	Caminhos, árvores e subdigrafos	14
2.1	Caminhos	14
2.2	Árvores divergentes	14
2.3	Subdigrafos	15
2.4	Caminhos em digrafos	15
2.5	Árvores divergentes em digrafos	16
3	Digrafos acíclicos e digrafos fortes	17
3.1	Ciclos	17
3.2	Digrafos acíclicos	17
3.3	Digrafos fortes	18
3.4	Decomposição em orelhas	19
3.5	Digrafo das componentes fortes	20
4	Digrafos transitivos	21
4.1	Digrafos transitivos	21
4.2	Redução transitiva	22
5	Cortes e separadores	23
5.1	Cortes	23
5.2	Separadores	23

6	Conexidade	25
6.1	Arco-conexidade	25
6.2	Conexidade	25
6.3	Digrafos k -fortes e arco- k -fortes	26
6.4	Conexidade local	27
6.5	Conexidade fraca	27
7	Fluxo em redes	29
7.1	Fluxo	29
7.2	Redes	29
7.3	O problema da circulação viável	30
7.4	O problema do fluxo máximo	30
7.5	O problema do b -fluxo viável	31
7.6	O problema do b -fluxo viável de custo mínimo	32
7.7	Algoritmos para fluxos	32
8	Fluxo e os teoremas de Menger	33
8.1	Teorema de Menger para arcos	33
8.2	Teorema de Menger para vértices	33
8.3	Algoritmos	34
9	Outras aplicações de fluxo	36
9.1	Emparelhamentos em digrafos bipartidos	36
9.2	O problema do carteiro chinês em digrafos	37
9.3	Subdigrafo gerador com graus especificados	37
9.4	Cobertura disjunta por caminhos e ciclos	38
9.5	Cobertura disjunta por ciclos	38
9.6	Coleção disjunta de ciclos que cobre muitos vértices	39
10	Digrafos hamiltonianos: introdução	41
10.1	Condições necessárias	41
10.2	Digrafos semicompletos	42
11	Digrafos hamiltonianos localmente semicompletos	43
11.1	Digrafos localmente semicompletos	43
11.2	Ciclos hamiltonianos	44
11.3	Caminhos hamiltonianos	44
12	Digrafos hamiltonianos: intercalação de caminhos	45
12.1	Intercalação de caminhos	45
12.2	Ciclos hamiltonianos	46
12.3	Caminhos hamiltonianos	46

13 Digrafos hamiltonianos com graus elevados	47
13.1 Resultados antigos	47
13.2 Resultados novos	47
14 Digrafos hamiltonianos multipartidos semicompletos	49
14.1 Caminhos hamiltonianos	50
14.2 Ciclos hamiltonianos	50
15 Digrafos hamiltonianos: generalizações	51
15.1 Caminhos máximos	51
15.2 Cobertura disjunta por caminhos	52
15.3 Subdigrafo gerador forte mínimo	53
16 Submodularidade e laminaridade	54
16.1 Interceptações e cruzamentos	54
16.2 Coleções laminares e livres de cruzamentos	55
16.3 Submodularidade e supermodularidade	55
16.4 Aplicação	56
17 Árvores geradoras divergentes disjuntas	57
17.1 O teorema de Edmonds	57
18 Árvores geradoras divergentes de custo mínimo	59
18.1 O problema	59
18.2 Solução do problema	59
18.3 Generalização	60
19 Dijunções mínimas	61
19.1 Dicortes e dijunções	61
19.2 Dijunção mínima	62
19.3 Reorientações fortes mínimas	63
19.4 A minimax “polar”	63
20 Aumento da arco-conexidade	65
20.1 O problema	65
20.2 Primeiro passo da solução	67
20.3 Segundo passo: operação <i>splitting off</i>	68
20.4 Solução do problema	69
21 Aumento da conectividade	71
21.1 O problema	71
21.2 Barreiras e o teorema de Frank–Jordán	72

22 Orientações versus número cromático	74
22.1 O problema min lp	74
22.2 Caminhos longos e número cromático	75
23 Orientações e reorientações fortes	77
23.1 O problema básico	77
23.2 Orientações e reorientações arco-k-fortes	78
24 Orientações com restrições dos graus de vértices	80
24.1 Restrição dos graus de vértices	80
24.2 Orientações fortes com restrição dos graus	82
25 Orientações com restrições dos graus de conjuntos	84
25.1 O problema	84
25.2 Restrições leves	85
25.3 Restrições mais pesadas	86
25.4 Restrições ainda mais pesadas	87
26 Fluxos submodulares	89
26.1 Fluxos com retenção restrita	89
26.2 Relaxação do problema: condições necessárias	91
26.3 Fluxos submodulares	92
26.4 O teorema de Edmonds–Giles	93
26.5 Condições de existência para fluxos submodulares	94
26.6 Fluxo submodular de custo mínimo	95
27 Fluxo inteiro nenhures nulo	96
27.1 k -Fluxo nenhures nulo	97
27.2 5-Fluxo nenhures nulo e a conjectura de Tutte	98
28 Ciclos disjuntos e realimentação	100
28.1 Ciclos disjuntos	100
28.2 Realimentação de vértices	100
28.3 Ciclos arco-disjuntos	101
28.4 Realimentação de arcos	101
28.5 Prova da conjectura de Younger	102
A Coleções e famílias	103
A.1 Coleções disjuntas	103
A.2 Famílias disjuntas	104

B Algumas provas	106
B.1 Prova do Teorema T.9.5.1	106
C Soluções de alguns exercícios	108
C.1 Exercício 26.6.1	108
Bibliografia	110
Índice Remissivo	111

Capítulo 1

Introdução

Veja verbete [Directed Graph](#) no Wolfram Math World. Veja verbetes [Graph](#) e [Graph theory](#) na Wikipedia.

1.1 Digrafos

Vou denotar por V^{2-} o conjunto de todos os pares ordenados de elementos distintos de V . Portanto, $V^{2-} := V^2 \setminus \{(v, v) : v \in V\}$. V^{2-}

Um **digrafo** (= *digraph*) é um par (V, A) onde V é um conjunto finito e A uma parte¹ de V^{2-} . Os elementos de V são **vértices** e os de A são **arcos**. Um arco (u, v) pode também ser denotado por uv . uv

Um vértice u **domina** (= *dominates*) um vértice v se o par uv é um arco do digrafo. A expressão “ $u \rightarrow v$ ” é uma abreviatura de “ u domina v ”. Dois vértices u e v são **adjacentes** se $u \rightarrow v$ ou $u \leftarrow v$.

Para qualquer conjunto X de vértices, o **grau de saída** (= *out-degree*) de X é o número de arcos com ponta inicial em X e ponta final em \bar{X} . Esse número é denotado por $d^+(X)$. O **grau de entrada** (= *in-degree*) de X é definido de maneira análoga e denotado por $d^-(X)$. \bar{X}
 $d^+(X)$
 $d^-(X)$

Dado qualquer conjunto X de vértices, denotaremos por $N^+(X)$ o conjunto dos vértices em \bar{X} dominados por algum elemento de X : $N^+(X)$

$$y \in N^+(X) \quad \text{se e somente se} \quad y \in \bar{X} \quad \text{e} \quad y \leftarrow x \quad \text{para algum } x \text{ em } X.$$

Analogamente, $N^-(X)$ é o conjunto dos vértices em \bar{X} que dominam elementos de X .

Diremos que um subconjunto X de V é **trivial** se $X = \emptyset$ ou $X = V$. Portanto, X é **não-trivial** se $X \neq \emptyset$ e $X \neq V$.

Uma **fonte** (= *source*) é um vértice v tal que $d^-(v) = 0$. Um **sorvedouro** (= *sink*) é um vértice v tal que $d^+(v) = 0$. Um **conjunto-fonte** (= *source set*) é uma parte *não-trivial* X de V tal

¹ Veja apêndice A.

que $d^-(X) = 0$. Um **conjunto-sorvedouro** (= *sink set*) é uma parte *não-trivial* X de V tal que $d^+(X) = 0$.

Denota-se por $\delta^+(D)$ o grau de saída mínimo no digrafo D , ou seja, $\delta^+(D) := \min_v d^-(v)$. O parâmetro $\delta^-(D)$ é definido analogamente.

Se uv e vu são arcos de um digrafo, diremos que o par $\{uv, vu\}$ é uma **aresta** (= *edge*). Diz-se que os dois arcos de uma aresta são **anti-paralelos**.

Minha notação é essencialmente a mesma do livro (a notação para os inteiros e racionais positivos e não-negativos, por exemplo, é um pouco diferente):

\mathbb{Z}	inteiros
\mathbb{Z}_{\geq}	inteiros não-negativos
$\mathbb{Z}_{>}$	inteiros estritamente positivos
\mathbb{Q}	racionais
\mathbb{Q}_{\geq}	racionais não-negativos
$\mathbb{Q}_{>}$	racionais estritamente positivos
$V(D)$	conjunto dos vértices do digrafo D
$A(D)$	conjunto dos arcos do digrafo D
V	conjunto dos vértices do digrafo em discussão
A	conjunto dos arcos do digrafo em discussão
n	$ V $
m	$ A $
$u \rightarrow v$	u domina v
$u \nrightarrow v$	u não domina v
\bar{X}	$V \setminus X$
$d^+(X)$	grau de saída de X
$d^-(X)$	grau de entrada de X
$\delta^+(D)$	grau se saída mínimo em D
$\delta^-(D)$	grau se entrada mínimo em D

Exercícios

1.1.1 (E.1.5 –) Seja D um digrafo e I o conjunto dos vértices v tais que $d^-(v) + d^+(v)$ é ímpar. Mostre que $|I|$ é par.

1.1.2 Seja D um digrafo e X uma parte de $V(D)$. Qual a relação entre $d^-(X)$ e $\sum_{x \in X} d^-(x)$?

1.2 Alguns tipos de digrafos

- Um digrafo D é **simétrico** se, para cada par (u, v) de vértices, u domina v se e somente se v domina u .² Em todo digrafo simétrico, $d^-(v) = d^+(v)$ para todo vértice v .
- Um digrafo D é **anti-simétrico** se não existe um par (u, v) de vértices tal que $u \rightarrow v$ e $v \rightarrow u$.
- Um digrafo é **completo** (= *complete*) se, para cada par (u, v) de vértices distintos, tanto uv quanto vu é arco. É claro que todo digrafo completo é simétrico.
Um digrafo é **semicompleto** (= *semicomplete*) se, para cada par (u, v) de vértices distintos, uv ou vu (ou ambos) são arcos.
- Um **torneio** (= *tournament*) é um digrafo semicompleto anti-simétrico.
- Um digrafo D é **euleriano**³ se $d^-(v) = d^+(v)$ para todo vértice v .
- Um digrafo é **regular** se existe k tal que se $d^+(v) = d^-(v) = k$ para todo vértice v . Dizemos também, nesse caso, que o digrafo é k -regular. É claro que todo digrafo regular é euleriano.
- Um digrafo (V, A) é **bipartido** se existe uma bipartição (U, W) de V tal que todo arco tem uma ponta em U e outra em W .
Um digrafo (V, A) é **bipartido semicompleto** se existe uma bipartição (U, W) de V tal que (1) todo arco tem uma ponta em U e outra em W e (2) para cada u em U e cada w em W tem-se $u \rightarrow w$ ou $u \leftarrow w$ (ou ambos).
- Um digrafo D é **fracamente conexo** (= *weakly connected* = *connected*) se $d^-(X) + d^+(X) \neq 0$ para toda parte não trivial X de V . Todo digrafo fracamente conexo (V, A) tem pelo menos $|V| - 1$ arcos.
- Uma **árvore** é um digrafo simétrico fracamente conexo (V, A) tal que $|A| = 2|V| - 2$.⁴ Uma **árvore orientada** é um digrafo anti-simétrico fracamente conexo (V, A) tal que $|A| = |V| - 1$.

Exercícios

- 1.2.1 Seja D um digrafo tal que $d^-(v) = d^+(v)$ para todo vértice v . É verdade que D é simétrico?
- 1.2.2 (E.1.6) Prove que, para todo $n \geq 2$, existe um torneio com n vértices sem dois vértices com o mesmo grau de saída. Mostre que esse torneio é único a menos de isomorfismo.

² Um digrafo simétrico é essencialmente o mesmo que um **grafo** (= *graph*). Tanto é assim que a letra “ G ” será freqüentemente usada para designar um digrafo simétrico.

³ Atenção: Ao contrário de muitos livros, não vamos supor que digrafos eulerianos são fracamente conexos.

⁴ Note que todo arco de uma árvore pertence a um ciclo de comprimento 2.

- 1.2.3 Sejam T e T' dois torneios com conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$. Suponha que $d_T^+(v) = d_{T'}^+(v)$ para todo vértice v . É verdade que T e T' são isomorfos?
- 1.2.4 (E.1.7 -) Prove que todo torneio com n vértices tem um vértice v tal que $d^+(v) \geq \lfloor n/2 \rfloor$.
- 1.2.5 Mostre que todo digrafo simétrico é regular.
- 1.2.6 Mostre que o número de vértices de todo torneio regular é ímpar.
- 1.2.7 Suponha que todo vértice de um digrafo D é uma fonte ou um sorvedouro. Mostre que D é bipartido. (A recíproca é verdadeira?)

1.3 Algumas operações sobre digrafos

- B^{-1} • Dado qualquer conjunto B de arcos de digrafo, denotaremos por B^{-1} o conjunto $\{(v, u) : (u, v) \in B\}$.
- D^{-1} • O digrafo (V, A^{-1}) é o **transposto** (= *converse*) do digrafo (V, A) . O transposto de um digrafo D será denotado por D^{-1} .
- $D \cup D^{-1}$ • A **simetrização** de um digrafo (V, A) é o digrafo simétrico $(V, A \cup A^{-1})$. A simetrização de um digrafo D será denotada por $D \cup D^{-1}$.
- Uma **orientação** (ou **anti-simetrização**) de um digrafo (V, A) é qualquer digrafo anti-simétrico (V, A') tal que $A' \subseteq A$ e $(A \setminus A')^{-1} \subseteq A'$ (ou seja, $vu \in A'$ para todo uv em $A \setminus A'$).⁵
- Uma **reorientação** de um digrafo (V, A) é qualquer digrafo da forma $(V, (A \setminus B) \cup B^{-1})$, sendo B uma parte de A .

Exercícios

- 1.3.1 Verifique que todo torneio é uma orientação de um digrafo semi-completo. Reciprocamente, toda orientação de um digrafo semi-completo é um torneio.
- 1.3.2 Verifique que toda orientação de uma árvore é uma árvore orientada.
- 1.3.3 Seja T uma árvore orientada. Mostre que $T \cup T^{-1}$ é uma árvore.
- 1.3.4 (E.1.44) Seja G um digrafo simétrico tal que $d^-(v)$ é par para todo vértice v . Mostre que G tem uma orientação D que é euleriana, ou seja, tal que $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v .
- 1.3.5 Mostre que toda reorientação de um digrafo anti-simétrico é um digrafo anti-simétrico.

⁵ Em outras palavras, uma orientação de um digrafo D é o digrafo que se obtém quando removemos de D um e apenas um dos arcos de cada aresta.

1.4 Generalizações de digrafos

- Um **multi-digrafo** (= *directed multigraph*) é um terno (V, A, μ) onde (V, A) é um digrafo e (A, μ) é uma família.⁶ Se $\mu(a) = 2$, por exemplo, diremos que a representa dois **arcos paralelos**.
- O **número de arcos** de um multi-digrafo (V, A, μ) é $|A, \mu|$, ou seja, $\sum_{a \in A} \mu(a)$.

⁶ Veja apêndice A.

Capítulo 2

Caminhos, árvores e subdigrafos

2.1 Caminhos

Definição: Um **caminho** (= *path*) é qualquer digrafo da forma

$$(\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}, \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}).$$

Em outras palavras, um caminho é um digrafo cujos vértices admitem uma permutação $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ tal que cada vértice domina o vértice seguinte e apenas o seguinte.

Definição: O **comprimento** de um caminho é o número de arcos (e não o número de vértices) do caminho.

2.2 Árvores divergentes

Definição: Uma **árvore divergente** é um digrafo fracamente conexo tal que $d^-(v) \leq 1$ para cada vértice v e $d^-(s) = 0$ para exatamente um vértice s . O vértice s é a **raiz** da árvore. É claro que toda árvore divergente é uma árvore orientada.

Fato básico: Se T é uma árvore divergente com raiz s então, para todo vértice v , existe um e um só caminho em T com origem s e término v .

Fato básico: Se T é uma árvore divergente com raiz s então $d_T^-(X) \neq 0$ para todo subconjunto não-vazio X de $V \setminus \{s\}$.

Exercícios

2.2.1 Toda árvore divergente com n vértices tem exatamente $n - 1$ arcos.

2.2.2 Seja s um vértice de um digrafo $D = (V, A)$. Suponha que $d_D^-(X) \neq 0$ para todo subconjunto não-vazio X de $V \setminus \{s\}$. Suponha ainda que A é minimal com relação a essa propriedade, ou seja, suponha que para todo subconjunto próprio A' de A

existe um subconjunto X de $V \setminus \{s\}$ tal que $d_{D'}^-(X) = 0$, sendo D' o digrafo (V, A') . Mostre que (V, A) é uma árvore divergente com raiz s .

2.3 Subdigrafos

Definição: Um digrafo D' é **subdigrafo** (= *subdigraph*) de um digrafo D se $V(D') \subseteq V(D)$ e $A(D') \subseteq A(D)$. Se D' é subdigrafo de D , dizemos que D **contém** D' .

Definição: Um subdigrafo D' de um digrafo D é **gerador** (= *spanning subdigraph = factor*) se $V(D') = V(D)$. Em particular, uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um digrafo D é uma sub-árvore T de D tal que $V(T) = V(D)$. Todo digrafo simétrico fracamente conexo tem uma árvore geradora.

Definição: Dado um conjunto X de vértices de um digrafo $D = (V, A)$, o subdigrafo de D **induzido por** X é $(V, A\langle X \rangle)$, sendo $A\langle X \rangle$ o conjunto dos arcos que têm ambas as pontas em X . O subdigrafo de D induzido por X é denotado por $D\langle X \rangle$.

$D\langle X \rangle$

Definição: Uma **componente fraca** de um digrafo D é qualquer subdigrafo fracamente conexo maximal de D .

2.4 Caminhos em digrafos

Problema: Dados vértices s e t de um digrafo D , encontrar um caminho de s a t em D que tenha comprimento mínimo.

- Definição: A **distância** de s a t é o comprimento de um caminho de comprimento mínimo dentre os que começam em s e terminam em t .
- Algoritmo de busca em largura (= *breadth-first search = BFS*).
- Um **k -rei** (= *k-king*) é um vértice r tal que $\text{dist}(r, v) \leq k$ para todo vértice v .
Teorema (Landau, 1953): Todo torneio tem um 2-rei.
Teorema T.2.10.1 (Moon, 1962): Todo torneio sem fontes tem pelo menos três 2-reis.

Exercícios

- 2.4.1 (E.2.32 –) Para todo número ímpar $n \geq 3$, construa um torneio T com n vértices no qual todo vértice é um 2-rei.
- 2.4.2 (Teorema de Landau) Prove que todo torneio tem um 2-rei.
- 2.4.3 (E.2.34 –) Seja T um torneio com 4 vértices. Mostre que T tem um vértice que não é um 2-rei.
- 2.4.4 (E.2.35) Prove T.2.10.1.

2.5 Árvores divergentes em digrafos

- Definição: Uma árvore divergente (= *out-arborescence*) **de** um digrafo D é uma árvore divergente contida em D . Uma árvore **s -divergente** (= *s-out-arborescence*) é uma árvore divergente com raiz s .

Se T é uma árvore divergente maximal de um digrafo D então $d_D^+(V(T)) = 0$.

- Definição: Uma árvore divergente **geradora** (= *out-branching*) **de** um digrafo D é uma árvore divergente T contida em D tal que $V(T) = V(D)$. Uma árvore geradora **s -divergente** (= *s-out-branching*) é uma árvore geradora divergente com raiz s .
- Problema: Dado um vértice s de um digrafo D , encontrar um out-branching de D com raiz s .
- Teorema T.2.2.2: Se D tem um s -out-branching então também tem um s -out-branching T tal que, para cada vértice v , o único caminho de s a v em T é um caminho mínimo de s a v em D .

Exercícios

2.5.1 (E.1.31 –) Encontre um out-branching com raiz a no digrafo da figura 1.21 do livro.

Capítulo 3

Digrafos acíclicos e digrafos fortes

3.1 Ciclos

Definição: Um **ciclo** (= *cycle*) é qualquer digrafo (V, A) tal que

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad A = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\} \cup \{v_nv_1\},$$

com $n \geq 2$. Um ciclo é **trivial** se tem comprimento 2, ou seja, se tem a forma $(\{u, v\}, \{uv, vu\})$.

Exercícios

3.1.1 Qual o papel da condição $n \geq 2$ na definição de ciclo?

3.1.2 (E.1.15–) Sejam x e y dois vértices de um digrafo D . Suponha que há uma seqüência C_1, \dots, C_k de ciclos tal que x está em C_1 , y está em C_k e C_i tem um vértice em comum com C_{i+1} para $i = 1, \dots, k - 1$. Prove que existe um (x, y) -caminho em D .

3.2 Digrafos acíclicos

Definição: Um digrafo é **acíclico** (= *acyclic*) se não contém ciclos.

Definição: Uma **ordem acíclica** (= *acyclic order*) dos vértices de um digrafo D é uma permutação v_1, \dots, v_n dos vértices tal que todo arco tem a forma v_iv_j com $i < j$.

- Proposição P.1.4.2: Todo digrafo acíclico tem pelo menos uma fonte e pelo menos um sorvedouro.

Fato: Para todo vértice v de um digrafo acíclico D , existe um caminho que começa em v e termina num sorvedouro e existe um caminho que começa numa fonte e termina em v .

- Proposição P.1.4.3: Um digrafo é acíclico se e somente se admite uma ordem acíclica dos vértices.
Existe algoritmo polinomial para decidir se um digrafo é acíclico. (O algoritmo devolve um ciclo ou uma ordem acíclica.)
- Proposição P.1.4.4: Um digrafo acíclico tem uma única fonte se e somente se tem um out-branching.

Exercícios

3.2.1 (E.1.58 –) Seja D um digrafo bipartido semicompleto anti-simétrico. Mostre que se D tem um ciclo então tem um ciclo de comprimento 4.

3.3 Digrafos fortes

Definição: Um digrafo D é **forte**¹ (= *strong*) se $d^+(X) \neq 0$ e $d^-(X) \neq 0$ para cada parte não-trivial X de $V(D)$.

- Fato: Um digrafo é forte se e somente se, para cada par x, y de seus vértices, existe um caminho de x a y .
- Fato: Existe um algoritmo polinomial (busca em profundidade = *DFS*) que reconhece digrafos fortes.

Exercícios

- 3.3.1 Prove que um digrafo é forte se e somente se, para cada par x, y de seus vértices, existe um caminho de x a y .
- 3.3.2 Mostre que todo digrafo simétrico fracamente conexo é forte.
- 3.3.3 Mostre que um digrafo D é fracamente conexo se e somente se a simetrização $D \cup D^{-1}$ é forte.
- 3.3.4 Seja D um digrafo com 2 ou mais vértices. Suponha que $d(x) + d(y) \geq 2n - 1$ para todo par x, y de vértices não-adjacentes, sendo $d(v) := d^-(v) + d^+(v)$ para cada v . É verdade que D é forte?
- 3.3.5 (E.1.29) Todo torneio forte T com 4 ou mais vértices tem dois vértices x e y tais que $T - x$ e $T - y$ são fortes.
- 3.3.6 (E.1.30) Um digrafo é *ciclicamente conexo* se, para todo par x, y de vértices, existe uma seqüência C_1, \dots, C_k de ciclos tal que x está em C_1 , y está em C_k e C_i tem um vértice em comum com C_{i+1} para $i = 1, \dots, k - 1$. Prove que um digrafo é ciclicamente conexo se e somente se é forte.

¹ Diz-se também que D é **fortemente conexo**.

- 3.3.7 (E.1.32 –) Um digrafo é forte se e somente se tem um v -out-branching para cada vértice v .
- 3.3.8 Seja D um digrafo com 2 ou mais vértices. Suponha que $d^+(x) + d^-(y) \geq n - 1$ para todo par x, y tal que $x \rightarrow y$. Mostre que D é forte.
- 3.3.9 (E.1.36) Seja D um digrafo anti-simétrico. Mostre que se $\delta^+(D) \geq \lceil (n - 1)/4 \rceil$ e $\delta^-(D) \geq \lceil (n - 1)/4 \rceil$ então D é forte. Mostre que essa delimitação de δ^+ e δ^- é justa.
- 3.3.10 (E.1.37) Prove que um digrafo fracamente conexo é forte se e somente se cada um de seus arcos pertence a um ciclo.
- 3.3.11 Teorema T.1.8.1 (Harary–Norman–Cartwright, 1965): Um digrafo forte é bipartido se e somente se não contém ciclo ímpar.
- 3.3.12 É verdade que todo torneio regular é forte?
- 3.3.13 Suponha que $d^+(v) + d^-(v) > 3n/2 - 2$ para todo vértice v de um digrafo D . Mostre que D é forte.

3.4 Decomposição em orelhas

Definição: Uma **orelha aberta** de um digrafo D é um caminho com dois ou mais vértices que tem origem e término em D mas todos os demais vértices fora de D .² Uma **orelha fechada** de um digrafo D é qualquer ciclo que tem exatamente um vértice em comum com D . Uma orelha é **trivial** se tem apenas um arco (e portanto é aberta).

Definição (D.7.2.1): Uma **decomposição em orelhas** (= *ear decomposition*) de um digrafo D é uma seqüência (P_0, P_1, \dots, P_t) de ciclos e caminhos tal que (1) P_0 é um ciclo, (2) para todo $i \geq 1$, P_i é uma orelha do digrafo $P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$, (3) cada vértice de D está em algum P_i e (4) cada arco de D está em algum P_i .

- **Teorema T.7.2.2 (folclore):** Um digrafo com 2 ou mais vértices é forte se e somente se tem uma decomposição em orelhas.
- Corolário C.7.2.3 (folclore): Toda decomposição em orelhas de um digrafo forte tem $m - n + 1$ orelhas.
- Corolário C.7.2.5 (folclore): Existe um algoritmo linear para encontrar uma decomposição em orelhas de qualquer digrafo forte.
- Fato: Seja D um digrafo forte D e sejam T uma orelha trivial de uma decomposição em orelhas de D . Se a é o único arco de T então $D - a$ é forte.
- Corolário C.7.2.6: O problema de decidir se um digrafo tem uma decomposição em orelhas com não mais que r orelhas não-triviais é NP-completo. O problema de decidir se um digrafo tem uma decomposição em orelhas com não mais que q arcos em orelhas não-triviais é NP-completo.

² Ao contrário do que acontece com as orelhas de muitos animais, uma orelha de D não faz parte de D .

Exercícios

- 3.4.1 Seja D um digrafo forte e P um (u, w) -caminho em D . Suponha que P tem as seguintes propriedades: (1) $u \neq w$, (2) $d_D^-(v) = 1$ para todo vértice v distinto de u , (3) $d_D^+(v) = 1$ para todo v distinto de w , (4) $d_D^-(u) \neq 1$ e (5) $d_D^+(w) \neq 1$. É verdade que existe uma decomposição em orelhas (P_0, \dots, P_t) de D tal que $P_t = P$?
- 3.4.2 (E.7.2) Prove C.7.2.3.
- 3.4.3 Seja D um digrafo forte. Se a é o único arco de uma orelha trivial em uma decomposição de D em orelhas então $D - a$ é forte.

3.5 Digrafo das componentes fortes

“Todo digrafo é uma porção de digrafos fortes sentados nos vértices de um digrafo acíclico”.

Definição: Uma **componente forte** (= *strong component*) de um digrafo D é um subdigrafo forte maximal de D . Cada vértice de D pertence a uma e uma só componente forte.

Definição: O **digrafo das componentes fortes** (= *strong components digraph*) de um digrafo D é $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, sendo \mathcal{S} o conjunto das componentes fortes de D e \mathcal{A} o conjunto de todos os pares ordenados (S, T) de componentes fortes tais que $(s, t) \in A(D)$ para algum s em S e algum t em T .

$SC(D)$ Notação: O digrafo das componentes fortes de D é denotado por $SC(D)$.

- Fato: Para qualquer digrafo D , o digrafo $SC(D)$ é acíclico.
- Teorema T.4.4.6: Existem algoritmos polinomiais³ (busca em profundidade (= *DFS*)) para determinar as componentes fortes de um digrafo.
- Proposição P.1.6.1: Um digrafo D tem um out-branching se e somente se $SC(D)$ só tem uma fonte.

Exercícios

- 3.5.1 Se D é um digrafo acíclico então $SC(D)$ é isomorfo a D .
- 3.5.2 (E.1.50) Seja D o digrafo da figura 1.12 do livro. Faça uma lista de todas as ordens acíclicas de $SC(D)$.
- 3.5.3 (E.1.84) Descreva um algoritmo linear que verifique se um dado digrafo acíclico tem mais que uma ordem acíclica. (Sugestão: use E.1.18.)

³ $O(n + m)$

Capítulo 4

Digrafos transitivos

4.1 Digrafos transitivos

Definição: Um digrafo é **transitivo** (= *transitive*) se, para todo arco xy e todo arco yz tal que $x \neq z$, o par xz também é um arco. (Consequência imediata: se existe um caminho de u a w então uw é um arco.)

- Proposição P.4.3.1 (folclore): Sejam D_1, \dots, D_p as componentes fortes de um digrafo D . O digrafo D é transitivo se e somente se (1) cada D_i é completo, (2) $SC(D)$ é transitivo e (3) para todo $i \neq j$, se $D_i \rightarrow D_j$ então todo vértice de D_i domina todo vértice de D_j em D .

- Definição: O **fecho transitivo** (= *transitive closure*) de um digrafo D é um digrafo D' tal que $V(D') = V(D)$ e $xy \in A(D')$ se e somente se existe (x, y) -caminho em D .

O fecho transitivo de um digrafo D será denotado por $TC(D)$.

$TC(D)$

Problema (fácil): Encontrar o fecho transitivo de um digrafo.

- Existe um algoritmo polinomial (multiplicação de matrizes, P.4.3.5) para o problema do fecho transitivo.

Exercícios

4.1.1 Mostre que todo digrafo transitivo forte é completo.

4.1.2 (E.4.2) Prove P.4.3.1.

4.1.3 (E.1.46 –) Prove que um torneio é transitivo se e somente se é acíclico.

4.1.4 Mostre que todo digrafo transitivo anti-simétrico é acíclico.

4.2 Redução transitiva

Definição: Um arco uv de um digrafo D é **redundante** se $TC(D - uv) = TC(D)$. Uma **redução transitiva** (= *transitive reduction*) de um digrafo D é um subdigrafo gerador D' de D sem arcos redundantes. (Em outras palavras, uma redução transitiva é um subdigrafo gerador D' de D minimal em relação à propriedade $TC(D') = TC(D)$.)

Um digrafo pode ter várias reduções transitivas diferentes.

- Problema (fácil): Encontrar uma redução transitiva de um digrafo.
- Problema 4.3 (*Minimum Equivalent Subdigraph Problem*): Encontrar uma redução transitiva mínima de um digrafo. Em outras palavras, dado um digrafo (V, A) , encontrar uma parte mínima A' de A tal que, para todo par x, y de vértices, existe um (x, y) -caminho em (V, A) se e somente se existe um (x, y) -caminho em (V, A') .

O problema 4.3 é NP-difícil (generalização do problema do ciclo hamiltoniano).

- Teorema T.4.3.2 (Aho–Garey–Ullman, 1972): Todo digrafo acíclico tem uma única redução transitiva.

Exercícios

- 4.2.1 Seja uv um arco de um digrafo D . Mostre que uv é redundante se e somente se existe um (u, v) -caminho em D que não usa uv .
- 4.2.2 Exiba um digrafo D e duas reduções transitivas D' e D'' de D tais que $|A(D')| \neq |A(D'')|$.
- 4.2.3 Prove T.4.3.2. Dê uma prova mais curta e mais direta que a do livro.

Capítulo 5

Cortes e separadores

5.1 Cortes

Notação: Para qualquer par X, Y de conjuntos de vértices de um digrafo, denota-se por (X, Y) o conjunto dos arcos que têm ponta inicial em X e ponta final em Y . Convém usar essa notação somente quando $X \cap Y = \emptyset$. (X, Y)

Definição: Um **corte** em um digrafo é qualquer conjunto da forma (X, \overline{X}) , sendo X uma parte não-trivial de V . Dizemos que X é uma **margem positiva** e \overline{X} a correspondente **margem negativa** do corte.

Dizemos que um corte (X, \overline{X}) **separa** um vértice s **de** um vértice t se $s \in X$ e $t \in \overline{X}$. Um (s, t) -**corte** é qualquer corte que separa s de t .

Exercícios

- 5.1.1 Seja X um conjunto de vértices de um digrafo. Mostre que $|(X, \overline{X})| = d^+(X) = d^-(\overline{X})$.
- 5.1.2 Seja (X, \overline{X}) um corte num digrafo D . Mostre que todo caminho em D que começa em X e termina em \overline{X} tem um arco no corte (X, \overline{X}) .
- 5.1.3 Um digrafo D é fracamente conexo então D não tem cortes vazios. Mostre que a recíproca não é verdadeira.
- 5.1.4 Verifique que todo digrafo com $n \geq 2$ tem um corte.
- 5.1.5 É verdade que todo corte tem uma única margem positiva?

5.2 Separadores

Definição: Um **separador** em um digrafo é qualquer parte S de V dotada da seguinte propriedade: \overline{S} admite uma partição (X, Y) tal que $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ e

$$N^+(X) \subseteq S \supseteq N^-(Y).$$

Dizemos que X é uma **margem positiva** e Y a correspondente **margem negativa** do separador.

Fato: Para qualquer parte não-vazia X de V , se $X \cup N^+(X) \neq V$ então $N^+(X)$ é um separador.

Fato: Seja S é um separador minimal. Se X é uma margem positiva e Y a correspondente margem negativa de S então $N^+(X) = S = N^-(Y)$.

Dizemos que um separador S **separa** um vértice s **de** um vértice t se s pertence a uma margem positiva de S e t pertence à correspondente margem negativa. Um (s, t) -**separador** é qualquer separador que separa s de t .

Exercícios

- 5.2.1 Mostre que S é um separador se e somente se existe uma partição (X, Y) de \bar{S} tal que $(X, Y) = \emptyset$.
- 5.2.2 Seja X um conjunto não-trivial de vértices de um digrafo. Suponha que $X \cup N^+(X)$ não é trivial. Mostre que $N^+(X)$ é um separador.
- 5.2.3 Seja S um separador num digrafo D . Sejam X e Y as margens positiva e negativa de S . Mostre que todo caminho em D que começa em X e termina em Y tem um vértice em S .
- 5.2.4 Verifique que digrafos completos não têm separadores. Mostre que todo digrafo não-completo tem um separador.
- 5.2.5 Seja X uma margem positiva e Y a correspondente margem negativa de um separador S . Mostre que $N^+(X) \cap S \cap N^-(Y)$ é um separador.
- 5.2.6 É verdade que todo separador S tem uma única margem positiva (e portanto uma única margem negativa)?

Capítulo 6

Conexidade

6.1 Arco-conexidade

Definição: A **arco-conexidade**¹ (= *arc-strong connectivity*) de um digrafo é o tamanho de um corte mínimo. A arco-conexidade de um digrafo D é denotada por $\lambda(D)$. Portanto, $\lambda(D) := \min |C|$, sendo o mínimo tomado sobre todos os cortes C . É claro que

$$\lambda(D) = \min_X d^+(X),$$

com mínimo tomado sobre todos os conjuntos não-triviais de vértices. Esse mínimo está bem definido desde que D tenha dois ou mais vértices.

- Para qualquer digrafo D com dois ou mais vértices, $\lambda(D) \leq n - 1$. Se D tem apenas um vértice, tomaremos $\lambda(D) := 1$ por convenção.
- Fato: Um digrafo D é forte se e somente se $\lambda(D) \geq 1$.

Exercícios

6.1.1 (E.7.51 –) Dê um algoritmo polinomial que receba um digrafo D e decida se $\lambda(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$.

6.2 Conexidade

Definição: A **conexidade**² (= *strong connectivity*) de um digrafo é o tamanho de um separador mínimo. A conexidade de um digrafo D é denotada por $\kappa(D)$. Portanto, $\kappa(D) := \min |S|$,

¹ Diz-se também **arco-conexidade forte**. A propósito, não diga “conectividade”.

² Diz-se também **conexidade forte**. A propósito, não diga “conectividade”.

sendo o mínimo tomado sobre todos os separadores S . É claro que

$$\kappa(D) = \min_X |N^+(X)|,$$

sendo o mínimo tomado sobre todos os subconjuntos não-vazios X de V tais que $X \cup N^+(X) \neq V$. Esse mínimo está bem definido desde que o digrafo não seja completo.

- Para todo digrafo não-completo D , tem-se $\kappa(D) \leq n - 2$. Se D é completo, tomaremos $\kappa(D) := n - 1$ por convenção.
- Fato: Um digrafo D é forte se e somente se $\kappa(D) \geq 1$.
- Fato: Para todo digrafo D , $\kappa(D) \leq \lambda(D)$.

Exercícios

6.2.1 Suponha que $\kappa(D) = 0$. Mostre que $\lambda(D) = 0$.

6.2.2 Mostre $\kappa(D) \leq \lambda(D)$ para todo digrafo D .

6.3 Digrafos k -fortes e arco- k -fortes

- Definição: Um digrafo D é **arco- k -forte**³ (= k -arc-strong) se $\lambda(D) \geq k$. Não existe digrafo arco- k -forte com $k > n$. O único digrafo arco- n -forte é o que tem $n = 1$.
- Definição: Um digrafo D é **k -forte**⁴ (= k -strong) se $\kappa(D) \geq k$. Não existe digrafo k -forte com $k > n - 1$. O único digrafo $(n-1)$ -forte é o digrafo completo.
- Fato: Um digrafo D é forte se e somente se é arco-1-forte. Um digrafo D é forte se e somente se é 1-forte.

Exercícios

6.3.1 Se D é arco- k -forte e $n \geq 2$ então $\delta^+(D) \geq k$ e $\delta^-(D) \geq k$.

6.3.2 Se D é k -forte e não é completo então $|N^+(v)| \geq k$ e $|N^-(v)| \geq k$ para todo vértice v e portanto também $d^+(v) \geq k$ e $d^-(v) \geq k$ para todo vértice v .

6.3.3 (E.7.5) Mostre que todo torneio regular com dois ou mais vértices é arco- $\frac{n-1}{2}$ -forte.

6.3.4 Uma **ponte** (= *bridge*) num digrafo simétrico é uma aresta $\{uv, vu\}$ dotada da seguinte propriedade: existe um conjunto X de vértices tal que $(X, \bar{X}) = \{uv\}$ e $(\bar{X}, X) = \{vu\}$. Mostre que um digrafo simétrico G é arco-2-forte se e somente se G é forte e não tem pontes.

³ Diz-se também **fortemente arco- k -conexo**.

⁴ Diz-se também **fortemente k -conexo**.

- 6.3.5 (E.7.8 –) Mostre que não existe digrafo planar 6-forte. (Sugestão: Todo grafo planar com n vértices tem no máximo $3n - 6$ arestas.)
- 6.3.6 (E.7.9 –) Seja D um digrafo k -forte e a um arco de D . Mostre que $D - a$ é $(k-1)$ -forte.
- 6.3.7 (E.7.10 –) Seja D um digrafo k -forte e a um arco de D . Seja D' o digrafo que se obtém quando invertemos a . (Se $D = (V, A)$ então $D' = (V, (A \setminus \{a\}) \cup \{a^{-1}\})$. Mostre que D' é $(k-1)$ -forte.
- 6.3.8 (E.7.12 –) Para todo número natural k , dê um digrafo k -forte D com a seguinte propriedade: a inversão de qualquer arco de D produz um digrafo que não é k -forte. (Veja E.7.10.)
- 6.3.9 (E.7.50 –) Seja D um digrafo semicompleto arco- k -forte com pelo menos $2k + 2$ vértices. Prove que existe um arco a tal que $D - a$ é arco- k -forte. Sugestão: Prove que D não pode ser minimamente arco- k -forte.
- 6.3.10 (E.8.46) Seja D um digrafo arco- k -forte. Seja C um ciclo em D . Seja D' o digrafo que resulta da inversão de todos os arcos de C . Mostre que D' é arco- k -forte.

6.4 Conexidade local

- Definição: Para qualquer par (s, t) de vértices distintos, denota-se por $\lambda(s, t)$ o número $\lambda(s, t)$
 $\min |C|$, sendo o mínimo tomado sobre todos os (s, t) -cortes C .
 É claro que $\lambda(D) = \min \lambda(s, t)$, sendo o mínimo tomado sobre todos os pares (s, t) em V^{2-} .
- Definição: Para qualquer par (s, t) de vértices distintos tal que $s \nrightarrow t$, seja $\kappa(s, t)$ o $\kappa(s, t)$
 número $\min |S|$, sendo o mínimo tomado sobre todos os (s, t) -separadores S .
 É claro que $\kappa(D) = \min \kappa(s, t)$, sendo o mínimo tomado sobre todos os pares (s, t) em V^{2-} tais que $s \nrightarrow t$.

Exercícios

- 6.4.1 Sejam s e t dois vértices de um digrafo. Mostre que $\lambda(s, t) = \min d^+(X)$, sendo o mínimo tomado sobre todos os conjuntos X de vértices tais que $s \in X$ e $t \in \bar{X}$.
- 6.4.2 Sejam s e t dois vértices de um digrafo tais que $s \nrightarrow t$. Mostre que $\kappa(s, t) = \min |N^+(X)|$, sendo o mínimo tomado sobre todos os conjuntos X de vértices tais que $s \in X$ e $t \in \bar{X} \cup N^+(X)$.

6.5 Conexidade fraca

- Fato: Um digrafo D é fracamente conexo⁵ se e somente se $D \cup D^{-1}$ é forte.

⁵ Veja definição na seção 1.2 deste Roteiro.

- Definição: Um digrafo D é **fracamente arco- k -conexo** se o digrafo $D \cup D^{-1}$ é arco- k -forte.
- Definição: Um digrafo D é **fracamente k -conexo** se o digrafo $D \cup D^{-1}$ é k -forte.

Exercícios

- 6.5.1 Dê um exemplo de um digrafo forte que não seja fracamente 2-conexo.
- 6.5.2 Seja D um digrafo simétrico. Mostre que D é fracamente arco- k -conexo se e somente se D é arco- k -forte. Mostre que D é fracamente k -conexo se e somente se D é k -forte.
- 6.5.3 Seja C um corte minimal de um digrafo D . Seja X uma margem positiva de C . Mostre o subdigrafo $D\langle X \rangle$ induzido por X é fracamente conexo. Mostre o subdigrafo $D\langle \bar{X} \rangle$ induzido por \bar{X} é fracamente conexo.
- 6.5.4 Seja C um corte de um digrafo D . Seja X uma margem positiva de C . Suponha que os subdigrafos induzidos $D\langle X \rangle$ e $D\langle \bar{X} \rangle$ são fracamente conexos. É verdade que o corte C é minimal?

Capítulo 7

Fluxo em redes

Fluxo em redes é um pré-requisito deste curso. Mesmo assim, convém fazer uma rápida recordação do assunto. (Veja verbete [Max-flow min-cut theorem](#) na Wikipedia.)

7.1 Fluxo

- Definição: Um **fluxo** num digrafo (V, A) é qualquer função x de A em¹ \mathbb{Q} . Um **fluxo inteiro** é qualquer função x de A em \mathbb{Z} .
 - Definição: O **efluxo** de um fluxo x num vértice v é o número $x^+(v) := \sum_{vw \in A} x(vw)$ e o **influxo** de x em v é o número $x^-(v) := \sum_{uv \in A} x(uv)$. O **excesso** de x em v é o número $x^+(v) - x^-(v)$.² O **vetor de excessos** (= *balance vector*) de x é a função x^\pm definida assim: $x^\pm(v) := x^+(v) - x^-(v)$ para todo v em V .
- Generalização: Para qualquer conjunto S de vértices, $x^+(S) := \sum_{a \in (S, \bar{S})} x(a)$ e $x^-(S) := \sum_{a \in (\bar{S}, S)} x(a)$. Ademais, $x^\pm(S) := x^+(S) - x^-(S)$.

Exercícios

- 7.1.1 (E.3.10) Calcule o vetor de excessos x^\pm para o fluxo x da Figura 3.22 do livro.
- 7.1.2 (Importante) Seja x um fluxo num digrafo D . Mostre que $x^\pm(S) = \sum_{s \in S} x^\pm(s)$ para todo $S \subseteq V$.

7.2 Redes

- Definição: Uma **rede** é um sistema (V, A, l, u) onde (V, A) é um digrafo e l e u são fluxos.

¹ Note que um fluxo pode ter valores negativos.

² A propósito, a **retenção** de um fluxo x no vértice v é o número $x^-(v) - x^+(v)$.

- Uma rede **com demandas** é um sistema (V, A, l, u, b) onde (V, A, l, u) é uma rede e b é uma função de V em \mathbb{Z} .

7.3 O problema da circulação viável

- Definição: Uma **circulação** é um fluxo x tal que $x_{\pm}^+ = 0$.
- Definição: Dada uma rede (V, A, l, u) , diremos que uma circulação x (não necessariamente inteira) é **viável** (= *feasible*) se $l \leq x \leq u$.
- Fato: Se uma rede (V, A, l, u) tem uma circulação viável então $l \leq u$ e $l^-(S) \leq u^+(S)$ para todo corte (S, \bar{S}) .
- **Problema da circulação viável inteira:** Encontrar uma circulação viável inteira numa rede (V, A, l, u) .
- Teorema T.3.8.2 (Hoffman, 1960): Se l e u são inteiros e $0 \leq l \leq u$ e $l^-(S) \leq u^+(S)$ para todo corte (S, \bar{S}) então existe uma circulação viável inteira na rede (V, A, l, u) .

Exercícios

- 7.3.1 Seja (V, A) um digrafo e x um fluxo definido por $x(a) = 1$ para todo a em A . Mostre que x é uma circulação se e somente se o digrafo é euleriano.³ (Veja §1.4 no livro. Em particular, veja T.1.6.3.)
- 7.3.2 (E.1.44) Seja G um digrafo simétrico tal que $d^-(v)$ é par para todo vértice v . Mostre que G tem uma orientação euleriana (ou seja, uma orientação D tal que $d_D^+(v) = d_D^-(v)$ para todo vértice v).

7.4 O problema do fluxo máximo

- Definição: Para quaisquer dois vértices s e t de um digrafo, um (s, t) -**fluxo** é um fluxo x tal que $x_{\pm}^+(s) \geq 0$, $x_{\pm}^+(t) \leq 0$ e $x_{\pm}^+(v) = 0$ para todo v distinto de s e t . O **valor** de um (s, t) -fluxo x é o número $x_{\pm}^+(s)$.
- Definição: Dada uma rede $(V, A, 0, u)$ e dois vértices s e t , diremos que um (s, t) -fluxo x (não necessariamente inteiro) é **viável** (= *feasible*) se $0 \leq x \leq u$.
- Fato: Em qualquer rede $(V, A, 0, u)$, para todo (s, t) -fluxo viável x e todo (s, t) -corte (S, \bar{S}) tem-se $x_{\pm}^+(s) \leq u^+(S)$.
- **Problema do (s, t) -fluxo viável inteiro máximo:** Dada uma rede $(V, A, 0, u)$ e dois vértices s e t , encontrar um (s, t) -fluxo viável inteiro de valor máximo.

³ De acordo com nossa definição, um digrafo euleriano pode não ser fracamente conexo.

- Teorema T.3.5.3 + T.3.5.5 (*Max-flow Min-cut*, Ford–Fulkerson, 1962): Para quaisquer dois vértices s e t numa rede $(V, A, 0, u)$, se u é inteiro não-negativo então existe um (s, t) -fluxo viável inteiro x e um (s, t) -corte (S, \bar{S}) tais que $x_{-}^{+}(s) = u^{+}(S)$.

Exercícios

- 7.4.1 (E.3.31) Mostre que uma circulação viável numa rede (V, A, l, u) pode ser encontrada (se existir) por meio de um único cálculo de (s, t) -fluxo máximo numa rede apropriada. (Sugestão: Transforme a rede numa rede de (s, t) -fluxo com limites inferiores nulos.)

7.5 O problema do b-fluxo viável

- Definição: Dado um vetor b de V em \mathbb{Z} , um **b -fluxo** é um fluxo x tal que $x_{-}^{+} = b$.
- Definição: Dada uma rede com demandas (V, A, l, u, b) , diremos que um b -fluxo x (não necessariamente inteiro) é **viável** (= *feasible*) se $l \leq x \leq u$.
- Notação: Se S é uma parte de V então $b[S] := \sum_{s \in S} b(s)$. $b[X]$
- Fato: Se uma rede com demandas (V, A, l, u, b) tem um b -fluxo viável então $l \leq u$ e $l^{+}(S) - u^{-}(S) \leq b[S] \leq u^{+}(S) - l^{-}(S)$ para todo corte (S, \bar{S}) .
- **Problema do b -fluxo viável inteiro:** Dada uma rede com demandas (V, A, l, u, b) , encontrar um b -fluxo viável inteiro.
(Este problema é uma generalização do problema da circulação viável inteira.)
- Teorema T.3.8.4 + T.3.8.3 (Gale, 1957): Se l, u e b são inteiros e $0 \leq l \leq u$ e $l^{+}(S) - u^{-}(S) \leq b[S] \leq u^{+}(S) - l^{-}(S)$ para cada corte (S, \bar{S}) então existe um b -fluxo viável inteiro na rede (V, A, l, u, b) .⁴

Exercícios

- 7.5.1 (E.3.1) Encontre um b -fluxo inteiro na rede com demandas $(V, A, 0, u, b)$ da Figura 3.21 do livro.
- 7.5.2 (E.3.47 –) Sejam s e t dois vértices de uma rede $(V, A, 0, u)$. Acrescente à rede um novo arco ts e defina $u(ts) := \infty$.⁵ Seja $(V, A', 0, u)$ a nova rede. Prove que existe uma correspondência biunívoca entre os (s, t) -fluxos viáveis de valor máximo em $(V, A, 0, u)$ e as circulações viáveis x em $(V, A', 0, u)$ que maximizam $x(ts)$.

⁴ A condição $l^{+}(S) - u^{-}(S) \leq b[S] \leq u^{+}(S) - l^{-}(S)$ é equivalente à condição $b[V] = 0$ e $b[S] \leq u^{+}(S) - l^{-}(S)$.

⁵ Na verdade, basta que $u(ts)$ tenha valor superior a $u^{-}(t)$.

7.6 O problema do b-fluxo viável de custo mínimo

- Definição: O **custo** de um fluxo x em relação a um fluxo c ,⁶ é o número $cx := \sum_{a \in A} c(a)x(a)$.
- Problema do b-fluxo viável inteiro de custo mínimo: Dado um fluxo $c \geq 0$, encontrar um b-fluxo viável inteiro de custo mínimo na rede com demandas (V, A, l, u, b) .
- Teorema T.3.10.3: Seja c um fluxo não-negativo e suponha que u e b são inteiros. Um b-fluxo viável inteiro x na rede com demandas $(V, A, 0, u, b)$ (note que $l = 0$) tem custo mínimo se e somente se existe uma função y de V em \mathbb{Z} e uma função w de A em \mathbb{Z}_{\geq} tais que $cx = yb + wu$ e $y(j) - y(i) \leq c(ij) + w(ij)$ para todo ij em A .

7.7 Algoritmos para fluxos

- Teorema T.3.6.3 (Edmonds–Karp, 1972): Existe um algoritmo polinomial para o problema do (s,t)-fluxo viável inteiro máximo.
- Teorema T.3.8.3: Existe um algoritmo polinomial⁷ para o problema do b-fluxo viável inteiro.
Prova: Redução ao problema do (s,t)-fluxo viável inteiro máximo.
- Teorema T.3.10.4 (Goldberg–Tarjan, 1989): Existe um algoritmo polinomial⁸ para o problema do b-fluxo viável inteiro de custo mínimo.
Prova: Redução ao problema do (s,t)-fluxo viável inteiro máximo.

⁶ Para cada arco a , o número $c(a)$ é interpretado como *custo* do arco a .

⁷ $O(n^3)$

⁸ $O(n^2 m^3 \log n)$

Capítulo 8

Fluxo e os teoremas de Menger

Este capítulo trata de uma importante aplicação do fluxo em redes.

8.1 Teorema de Menger para arcos

Proposição: Para todo par (s, t) de vértices distintos de um digrafo tem-se $|\mathcal{P}| \leq |C|$ para toda coleção¹ \mathcal{P} de (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos e todo (s, t) -corte C .

- **Teorema T.7.3.1_a (Menger, 1927):** Para todo par s, t de vértices distintos de um digrafo, existe uma coleção \mathcal{P} de (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos e existe um (s, t) -corte C tais que $|\mathcal{P}| = |C|$.

Prova: Redução ao problema do (s, t) -fluxo.

- Corolário: Para todo par s, t de vértices distintos de um digrafo, o número máximo de (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos é $\lambda(s, t)$.
- Corolário C.7.3.2_a: Um digrafo D com $n \geq 2$ é arco- k -forte se e somente se, para cada par s, t de vértices distintos, D tem k (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos.

Exercícios

8.1.1 (E.7.16 +) Deduza o teorema T.3.5.3 (Max-flow Min-cut) do teorema T.7.3.1_a.

8.2 Teorema de Menger para vértices

Definição: Dois caminhos $x_1x_2 \dots x_p$ e $y_1y_2 \dots y_q$ com $x_1 = y_1$ e $x_p = y_q$ são **internamente disjuntos** se $\{x_2, \dots, x_{p-1}\} \cap \{y_2, \dots, y_{q-1}\} = \emptyset$.

¹ Veja apêndice A.

Proposição: Se $s \rightarrow t$ então $|\mathcal{P}| \leq |S|$ para toda coleção \mathcal{P} de (s, t) -caminhos internamente disjuntos e todo (s, t) -separador S .

- **Teorema T.7.3.1_b (Menger, 1927):** Para todo digrafo D e todo par s, t de vértices distintos tal que $s \rightarrow t$, existe uma coleção \mathcal{P} de (s, t) -caminhos internamente disjuntos e um (s, t) -separador S tais que $|\mathcal{P}| = |S|$.

Prova: Aplique o teorema do (s, t) -fluxo máximo à representação bipartida estendida de D (veja abaixo).

- **Corolário:** Para todo digrafo D e todo par s, t de vértices distintos tal que $s \rightarrow t$, o número máximo de (s, t) -caminhos internamente disjuntos é $\kappa(s, t)$.
- **Corolário C.7.3.2_b:** Um digrafo não-completo D é k -forte se e somente se, para cada par s, t de vértices distintos tais que $s \rightarrow t$, o digrafo tem k (s, t) -caminhos internamente disjuntos.

A prova do teorema T.7.3.1_b a partir do teorema do fluxo máximo usa a seguinte representação de digrafos:

- **Definição:** A **representação bipartida** (= *bipartite representation*) de um digrafo D é o digrafo bipartido $(V' \cup V'', B)$ definido como segue.² Os conjuntos V' e V'' são cópias mutuamente disjuntas de $V(D)$. Para cada v em $V(D)$, os elementos correspondentes de V' e V'' serão denotados por v' e v'' respectivamente; podemos dizer então que $V' = \{v' : v \in V\}$ e $V'' = \{v'' : v \in V\}$. O conjunto de arcos do novo digrafo é $B := \{u'v'' : uv \in A(D)\}$.

$BG(D)$

- **Notação:** A representação bipartida de D será denotada por $BG(D)$.
- **Definição:** A **representação bipartida estendida** de um digrafo D é a representação bipartida $(V' \cup V'', B)$ acrescida de todos os arcos da forma $v''v'$ com v em $V(D)$.

8.3 Algoritmos

- **Fato:** Existe algoritmo polinomial³ para determinar $\lambda(s, t)$ para quaisquer dois vértices s e t . Existe algoritmo polinomial para determinar $\lambda(D)$ para qualquer digrafo D .
- **Corolário C.7.4.1** (de P.7.4.1, Schnorr, 1979): É possível determinar $\lambda(D)$ com apenas n cálculos de fluxo máximo.
- **Fato:** Existe algoritmo polinomial⁴ para determinar $\kappa(s, t)$ para quaisquer dois vértices s e t . Existe algoritmo polinomial para determinar $\kappa(D)$ para qualquer digrafo D .

² Veja §1.8 e figura 1.16 no livro.

³ $O(n^3)$

⁴ $O(n^3)$

Exercícios

- 8.3.1 (E.1.49) Uma *tripla transitiva* é um conjunto de três vértices x, y, z tal que $x \rightarrow y \rightarrow z$ e $x \rightarrow z$. Seja D um digrafo dotado de um tripla transitiva. Mostre que se D é 2-forte então D tem dois ciclos cujos comprimentos diferem em uma unidade.
- 8.3.2 (E.7.7) Seja s um vértice de um digrafo D . Seja k um número natural. Suponha que $\lambda(s, v) \geq k$ e $\lambda(v, s) \geq k$ para cada vértice v . Mostre que $\lambda(D) \geq k$.
- 8.3.3 (E.7.11) A k -ésima potência de um ciclo $C = v_1 \cdots v_n v_1$ é o digrafo que tem vértices v_1, \dots, v_n e conjunto de arcos $\{v_i v_j : i+1 \leq j \leq i+k, i=1, \dots, n\}$, sendo os índices j tomados módulo k . Prove que a k -ésima potência de qualquer ciclo com mais que k vértices é um digrafo k -forte.
- 8.3.4 (E.7.19) (Importante) Seja $D = (V, A)$ um digrafo k -forte. Sejam X e Y dois subconjuntos de V . Mostre que existem caminhos P_1, \dots, P_k , dois a dois internamente disjuntos, cada um com origem em X e término em Y .
- 8.3.5 (E.7.27) Seja $D = (V, A)$ um multi-digrafo arco- k -forte e s um objeto fora de V . Seja D' o digrafo que se obtém se inserirmos no digrafo $D + s$ uma família⁵ de k novos arcos com origem em V e término s e uma família de k novos arcos com origem s e término em V . Mostre que D' é arco- k -forte.
- 8.3.6 (E.7.26) Seja $D = (V, A)$ um digrafo k -forte e s um objeto fora de V . Seja D' o digrafo que se obtém se acrescentarmos k novos arcos com origem em V e término s e k novos arcos com origem s e término em V (os novos arcos são distintos dois a dois) ao digrafo $D + s$. Mostre que D' é k -forte.
- 8.3.7 (E.7.17) Seja D um multi-digrafo arco- k -forte. Sejam $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ vértices distintos de D . Sejam $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ números naturais tais que $\sum_i a_i = \sum_j b_j = k$. Mostre que D tem k caminhos arco-disjuntos tais que exatamente a_i começam em x_i e exatamente b_j terminam em y_j .
- 8.3.8 (E.7.17) Seja D um multi-digrafo k -forte. Sejam $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ vértices distintos de D . Sejam $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ números naturais tais que $\sum_i a_i = \sum_j b_j = k$. Mostre que D tem k caminhos internamente disjuntos tais que exatamente a_i começam em x_i e exatamente b_j terminam em y_j .

⁵ Veja definição de família no apêndice A deste Roteiro.

Capítulo 9

Outras aplicações de fluxo

9.1 Emparelhamentos em digrafos bipartidos

Definição: Um **emparelhamento** (= *matching*) em um digrafo (V, A) é um subconjunto M de A tal que $d_M^-(v) + d_M^+(v) \leq 1$ para todo vértice v , sendo $d_M(v)$ o grau do vértice v no digrafo (V, M) . Se $d_M^-(v) + d_M^+(v) = 1$ para todo vértice v , dizemos que o emparelhamento é **perfeito**.

Problema: Encontrar um emparelhamento máximo num digrafo bipartido.

- Teorema T.3.11.1: Existem algoritmos polinomiais¹ para encontrar um emparelhamento máximo num digrafo bipartido.

Prova: Redução ao problema do (s,t)-fluxo de valor máximo (veja T.3.6.3).

- Uma **cobertura** de um digrafo é um conjunto de vértices que contém pelo menos uma das pontas de cada arco do digrafo.

Teorema T.3.11.2 (König, 1931): Num digrafo bipartido, um emparelhamento máximo tem o mesmo tamanho que uma cobertura mínima.

Isso é um corolário do teorema *Max-flow Min-cut* (T.3.5.3 + T.3.5.5).

- Teorema T.3.11.3 (Hall, 1935): Um digrafo bipartido (V, A) com bipartição (U, W) tem um emparelhamento que cobre U se e somente se $|N(X)| \geq |X|$ para toda parte X de U .

$N(X)$ Aqui, $N(X)$ denota a união $N^-(X) \cup N^+(X)$.

Isso é um corolário do teorema *Max-flow Min-cut* (T.3.5.3 + T.3.5.5).

Problema (*Assignment Problem*): Dado um digrafo bipartido com custos nas arcos, encontrar um emparelhamento perfeito de custo mínimo.

Solução: Redução ao problema do (s,t)-fluxo de custo mínimo.

¹ $O(n^{1/2}m)$

9.2 O problema do carteiro chinês em digrafos

Esta seção trata de redes (V, A, l, u) em que $l = 1$ e $u = \infty$.²

Problema Dirigido do Carteiro Chinês:³ Dado um digrafo (V, A) e um fluxo c ,⁴ encontrar uma circulação viável inteira x na rede $(V, A, 1, \infty)$ que minimize $cx := \sum_{a \in A} c(a)x(a)$.

Quando $c = 1$, esse problema tem uma solução de custo m se e somente se $d^-(v) = d^+(v)$ para cada vértice v .

- Teorema T.3.11.4: O problema dirigido do carteiro chinês pode ser resolvido em tempo polinomial.

Veja T.3.8.2.

Exercícios

- 9.2.1 (E.3.66) Encontre uma solução do problema dirigido do carteiro chinês no digrafo da Figura 3.25 do livro.
- 9.2.2 Mostre que $x = 1$ é uma circulação viável na rede $(V, A, 1, \infty)$ se e somente se (V, A) é euleriano. (Veja §1.4 no livro. Em particular, veja o Teorema de Euler, T.1.6.3.)
- 9.2.3 (E.3.54 +) Seja D um digrafo semicompleto regular. (a) Se n é ímpar, mostre que D tem um torneio gerador regular. (Veja exercício 1.2.6.) (b) Se n é par, mostre que D tem um torneio gerador quase regular, ou seja, um torneio gerador T tal que $|d_T^-(v) - d_T^+(v)| \leq 1$ para cada vértice v . (Veja solução no apêndice ??.)

9.3 Subdigrafo gerador com graus especificados

Problema do do subdigrafo gerador com graus especificados: Dado um digrafo D com $V(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e inteiros a_1, \dots, a_n e b_1, \dots, b_n , encontre uma parte B de $A(D)$ tal que $d_B^-(v_i) = a_i$ e $d_B^+(v_i) = b_i$ para todo i .

Exemplos: Encontrar um subdigrafo gerador 1-regular de um digrafo dado (ou decidir que um tal subdigrafo não existe).

- Teorema T.3.11.5: Existe um algoritmo polinomial que resolve o problema do subdigrafo gerador com graus especificados.

Prova: Reduza a um problema de (s,t)-fluxo viável máximo num superdigrafo apropriado de $BG(D)$.

² Para não lidar com ∞ , poderíamos adotar $u(ij) = m$ para cada arco ij .

³ A versão não-dirigida do problema é mais difícil.

⁴ O fluxo c é tratado como um custo.

9.4 Cobertura disjunta por caminhos e ciclos

CDCaCi Definição: Uma **cobertura disjunta por caminhos e ciclos** (= *path-cycle factor*), ou **CDCaCi**, de um digrafo D é uma coleção⁵ de caminhos e ciclos tal que cada vértice de D pertence a um e apenas um dos elementos da coleção. É conveniente entender uma CDCaCi como um subdigrafo de D cada uma de cujas componentes fracas é um caminho ou um ciclo.

Problema minCDCaCi (*Path-Cycle Factor Problem*): Dado um digrafo D , encontrar uma CDCaCi de D que tenha o menor número possível de caminhos.⁶

- O *path-cycle factor number*, $pcc^*(D)$, é o número de caminhos numa solução do problema.⁷

Proposição P.3.11.8 (folclore): Para todo digrafo D , $pcc^*(D) = n - \nu(BG(D))$, sendo $\nu(B)$ a cardinalidade de um emparelhamento máximo no digrafo B .

- Proposição P.3.11.8': Existe um algoritmo polinomial para o problema minCDCaCi.
- A propósito, veja discussão de *path covering* na seção 15.2 deste Roteiro.

Exercícios

- 9.4.1 (E.3.68) Prove P.3.11.8. (Veja E.1.62. Veja esboço de solução no apêndice ??.)
- 9.4.2 (E.3.59 +) Encontre, em tempo polinomial, uma CDCaCi com k caminhos. Dica: fluxo de valor mínimo.
- 9.4.3 (E.3.61) Seja k um inteiro positivo. Mostre que um digrafo D tem uma CDCaCi com k caminhos se e somente se $|\bigcup_{x \in X} N^+(x)| \geq |X| - k$ e $|\bigcup_{x \in X} N^-(x)| \geq |X| - k$ para toda parte X de V . (Veja P.3.11.6 abaixo.)
- 9.4.4 Seja (P_0, P_1, \dots, P_t) uma decomposição em orelhas de um digrafo forte D . Seja k o número de orelhas não-triviais da decomposição (P_0 é uma delas). Mostre que $pcc^*(D) \leq k - 1$.

9.5 Cobertura disjunta por ciclos

CDCi Uma **cobertura disjunta por ciclos** (= *cycle factor*), ou **CDCi**, de um digrafo D é uma coleção de ciclos tal que cada vértice de D pertence a um e apenas um dos ciclos da coleção.

Problema CDCi (*Cycle Factor Problem*): Encontrar uma CDCi de um digrafo.⁸

⁵ Veja apêndice A.

⁶ O número de ciclos é irrelevante.

⁷ A sigla "pcc" é uma abreviatura de "path-cycle covering".

⁸ O número de ciclos da CDCi é irrelevante.

Esse problema é o caso particular $a_i = b_i = 1$ do problema do subdigrafo gerador com graus especificados (veja acima). Também é um caso particular do problema minCDCaCi (pois toda CDCi é uma CDCaCi com 0 caminhos).

- Proposição P.3.11.6 (Ore, 1962): Um digrafo D tem uma CDCi se e somente se $|\bigcup_{x \in X} N^+(x)| \geq |X|$ e $|\bigcup_{x \in X} N^-(x)| \geq |X|$ para toda parte X de V .
Prova: Corolário fácil de T.3.11.3.
- Fato: Existe um algoritmo polinomial que encontra uma CDCi ou um conjunto X que viola a condição de P.3.11.6.
- A seguinte variante do problema é NP-difícil: Dado um digrafo D , encontrar uma CDCi de D que tenha o menor número possível de ciclos. (Este é o *Minimum Cycle Factor Problem*.)

Exercícios

- 9.5.1 Se um digrafo tem uma CDCi com k ciclos então, para $j = 0, \dots, k$, tem uma CDCaCi com j caminhos.
- 9.5.2 (E.1.62) Mostre que um digrafo D tem uma CDCi se e somente se $BG(D)$ tem um emparelhamento perfeito.
- 9.5.3 O número $\sum_{x \in X} |N^+(x)|$ é igual ao número $|\bigcup_{x \in X} N^+(x)|$?
- 9.5.4 (E.3.70) Prove que todo digrafo regular com pelo menos um arco tem uma CDCi.
- 9.5.5 Dado um digrafo D , encontrar uma CDCi sem ciclos de comprimento 2. Acho que esse problema é difícil. Você sabe dizer alguma coisa a respeito?

9.6 Coleção disjunta de ciclos que cobre muitos vértices

Definição: Uma **coleção disjunta de ciclos** (= *cycle subdigraph*) de um digrafo D é uma coleção de ciclos tal que cada vértice de D pertence a no máximo um dos ciclos da coleção. (Exemplo: toda CDCi é uma coleção disjunta de ciclos.)

Problema *Cycle Subdigraph Problem*: Dado um digrafo D , encontrar uma coleção disjunta de ciclos que cubra o maior número possível de vértices de D .

- Teorema T.3.11.11 (Alon, ca. 1993): Existe um algoritmo polinomial⁹ para o problema.
Prova: Redução ao problema do emparelhamento perfeito de custo mínimo num $K_{n,n}$ com laços.

⁹ $O(n^3)$

Exercícios

- 9.6.1 (E.3.63) Complete a prova de T.3.11.11. (Em particular, corrija os erros de notação do esboço dado no livro.)

Capítulo 10

Digrafos hamiltonianos: introdução

Definição: Um **ciclo hamiltoniano** em um digrafo D é um ciclo gerador, isto é, um ciclo que passa por todos os vértices de D . Um digrafo é **hamiltoniano** se tem um ciclo hamiltoniano.

Problema do ciclo hamiltoniano: Encontrar um ciclo hamiltoniano em um digrafo.

Definição: Um **caminho hamiltoniano** é um caminho gerador, isto é, um caminho que passa por todos os vértices de D .

Problema do caminho hamiltoniano: Encontrar um caminho hamiltoniano num digrafo.

Generalizações dos problemas acima: encontrar um ciclo de comprimento máximo e encontrar um caminho de comprimento máximo.

Todos esses problema são NP-difíceis.

10.1 Condições necessárias

- Fato 1: Se um digrafo D tem um ciclo hamiltoniano então D é forte e fracamente 2-conexo.¹
- Fato 2: Se um digrafo D tem um caminho hamiltoniano então D é fracamente conexo.

Exercícios

- 10.1.1 Mostre que as condições “ D é forte” e “ D é fracamente 2-conexo” são mutuamente independentes.
- 10.1.2 Seja D um digrafo dotado de um ciclo hamiltoniano. É verdade que D é 2-forte? É verdade que D é arco-2-forte? É verdade que D é fracamente arco-2-conexo?
- 10.1.3 (E.1.18) (Ordem acíclica única) Prove que um digrafo acíclico D tem uma única ordem acíclica se e somente se D tem um caminho hamiltoniano.

¹ Veja definição de fracamente 2-conexo na seção 6.5.

10.1.4 Se D tem um ciclo hamiltoniano D' então D' é uma redução transitiva de D .

10.1.5 Descreva informalmente um algoritmo que procura um ciclo de comprimento máximo em um digrafo transitivo.

10.2 Digrafos semicompletos

Esta seção trata de caminhos e ciclos hamiltonianos em digrafos semicompletos e portanto também em torneios.

- **Teorema T.1.4.5 (Rédei, 1934):** Todo digrafo semicompleto tem um caminho hamiltoniano.

Veja prova indutiva em §1.9.1.

- **Corolário C.1.5.2 (Camion, 1959):** Todo digrafo semicompleto forte com $n > 1$ vértices tem um ciclo hamiltoniano.

Esse fato é corolário do seguinte:

Teorema T.1.5.1 (Moon, 1966): Seja T um digrafo semicompleto forte com $n > 1$ vértices. Para todo vértice x de T e todo k in $\{3, \dots, n\}$, existe um ciclo de comprimento k passando por x .

Exercícios

- 10.2.1 Mostre que todo torneio regular com mais de 1 vértice tem um ciclo hamiltoniano. (Veja exercício 3.3.12.)
- 10.2.2 (E.1.26) Seja T um torneio não-acíclico. Mostre que T tem dois caminhos hamiltonianos.
- 10.2.3 Descreva uma coleção infinita de torneios sem ciclo hamiltoniano. (Veja prova de C.1.5.2.)
- 10.2.4 Seja D um digrafo semicompleto forte com $n \geq 3$. Mostre que D tem uma orientação forte. Em outras palavras, mostre que D contém um torneio gerador forte.
- 10.2.5 Para quaisquer conjuntos mutuamente disjuntos X e Y seja $d^+(X, Y) := |(X, Y)|$. Seja P um caminho de comprimento $k - 1$ num digrafo D e seja v um vértice em $V(D) \setminus V(P)$. Mostre que se D não tem um caminho com conjunto de vértices $V(P) \cup \{v\}$ então $d^+(\{v\}, V(P)) + d^+(V(P), \{v\}) \leq k - 1$.

Capítulo 11

Digrafos hamiltonianos localmente semicompletos

Este capítulo estende os teoremas de Rédei (T.1.4.5) e Camion (C.1.5.2) aos digrafos localmente semicompletos.

11.1 Digrafos localmente semicompletos

Definição: Um digrafo D é **localmente semicompleto** (= *locally semicomplete*) se, para cada vértice v , o digrafo induzido por $N^+(v)$ é semicompleto e o digrafo induzido por $N^-(v)$ é semicompleto.

Exemplo: Todo digrafo semicompleto é localmente semicompleto.

Exercícios

- 11.1.1 Seja D um digrafo com vértices v_1, \dots, v_n tal que $N^-(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i-2}\}$ e $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}\}$ para cada i , sendo todos os índices tomados módulo n . Mostre que D é localmente semicompleto.
- 11.1.2 Um digrafo D é **redondo** (= *round*) se existe uma enumeração v_1, \dots, v_n dos seus vértices e números k_1, \dots, k_n e l_1, \dots, l_n tais que $N^-(v_i) = \{v_{i-1}, \dots, v_{i-k_i}\}$ e $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+l_i}\}$ para cada i , sendo todos os índices tomados módulo n . (Veja seção §4.11 no livro.) Mostre que todo digrafo redondo é localmente semicompleto. (Veja Proposição P.4.11.1 no livro.)
- 11.1.3 Exiba um digrafo localmente semicompleto que não é redondo.
- 11.1.4 (E.5.12) Seja D um digrafo localmente semicompleto e forte. Mostre que D é fracamente 2-conexo.
- 11.1.5 (Lema L.4.10.3) Mostre que todo digrafo localmente semicompleto fracamente conexo tem um in-branching.

- 11.1.6 (E.4.27) Mostre que toda orientação de um digrafo localmente semicompleto é localmente semicompleta.
- 11.1.7 (E.4.28) Seja D um digrafo forte localmente semicompleto com $n \geq 3$. Mostre que D tem uma orientação forte. (Veja antes E.4.27.)

11.2 Ciclos hamiltonianos

- **Teorema T.5.5.1 (Bang-Jensen–Huang–Prisner, 1993):**¹ Todo digrafo localmente semicompleto forte com $n \geq 2$ vértices tem um ciclo hamiltoniano.

Prova: Análoga à de C.1.5.2 (Camion).

- Teorema T.5.5.2 (Bang-Jensen–Hell, 1993): Há um algoritmo polinomial² para encontrar um ciclo hamiltoniano em um digrafo localmente semicompleto forte.

Exercícios

- 11.2.1 (E.5.13) Prove T.5.5.1.
- 11.2.2 Descreva uma coleção infinita de digrafos localmente semicompletos sem ciclo hamiltoniano.

11.3 Caminhos hamiltonianos

- **Corolário C.5.5.6 (Bang-Jensen, 1990):** Todo digrafo localmente semicompleto e fracamente conexo tem um caminho hamiltoniano.

Prova: Análoga à de T.1.4.5 (Rédei).

- Teorema T.5.5.5 (Bang-Jensen–Hell, 1993): Há um algoritmo polinomial³ para encontrar um caminho máximo em um digrafo localmente semicompleto.

Exercícios

- 11.3.1 (E.5.14) Prove C.5.5.6.

¹ Esta é uma versão simplificada de T.5.5.1: na versão original tem-se *in-semicomplete* no lugar de *semicomplete*.

² $O(m + n \log n)$

³ $O(m + n \log n)$

Capítulo 12

Digrafos hamiltonianos: intercalação de caminhos

Este capítulo discute caminhos e ciclos hamiltonianos numa classe de digrafos que inclui todos os localmente semicompletos.

Como se sabe, todo digrafo dotado de ciclo hamiltoniano é forte e fracamente 2-conexo. Este capítulo mostra o que falta para que a recíproca seja verdadeira.

12.1 Intercalação de caminhos

Definição: Um digrafo D tem a **propriedade da intercalação de caminhos** (= *path-merging property*) se, para cada par x, y de seus vértices e cada par P, Q de (x, y) -caminhos internamente disjuntos, existe um (x, y) -caminho R tal que $V(R) = V(P) \cup V(Q)$.

Diremos que um digrafo é **PIC** (= *is path-mergeable*) se tiver a propriedade da intercalação de caminhos. PIC

- Proposição 4.10.1 (Bang-Jensen, 1995): Todo digrafo localmente semicompleto é PIC.
- Teorema T.4.9.1 (Bang-Jensen, 1995): Um digrafo D é PIC se e somente se, para cada par x, y de seus vértices e cada par P, Q de (x, y) -caminhos internamente disjuntos de comprimento ≥ 2 , algum vértice interno de P domina o segundo vértice de Q ou algum vértice interno de Q domina o segundo vértice de P .
- Corolário C.4.9.2: Existe um algoritmo polinomial que reconhece digrafos PIC.

Exercícios

12.1.1 Prove P.4.10.1.

12.1.2 Mostre, de maneira algorítmica, que todo torneio é PIC.

- 12.1.3 Prove a parte “se” de T.4.9.1. (A prova do “só se” está no livro.)
- 12.1.4 (E.4.23 +) Prove C.4.9.2.
- 12.1.5 (E.4.25 –) Prove que um digrafo transitivo é PIC se e somente se, para cada par x, y de seus vértices e quaisquer caminhos xwy e xvy com $u \neq v$ tem-se $u \rightarrow v$ ou $u \leftarrow v$.
- 12.1.6 Mostre que nem todo digrafo hamiltoniano é PIC.

12.2 Ciclos hamiltonianos

Teorema T.5.4.2 (Bang-Jensen, 1995): Todo digrafo forte, fracamente 2-conexo e dotado da PIC tem um ciclo hamiltoniano.

12.3 Caminhos hamiltonianos

Não se conhece caracterização de digrafos PIC que têm caminho hamiltoniano. (Veja problema 5.4.4 no livro.)

Capítulo 13

Digrafos hamiltonianos com graus elevados

13.1 Resultados antigos

- Corolário C.5.6.6 (Woodall, 1972): Seja D um digrafo forte¹ com $n \geq 2$ vértices. Se $d^+(x) + d^-(y) \geq n$ sempre que $x \not\rightarrow y$ então D tem um ciclo hamiltoniano.
- Teorema T.5.6.7 (Meyniel, 1973): Seja D um digrafo forte² com $n \geq 2$ vértices. Se $d^-(x) + d^+(x) + d^-(y) + d^+(y) \geq 2n - 1$ para todo par x, y de vértices não-adjacentes então D tem um ciclo hamiltoniano.

Exercícios

- 13.1.1 Exiba um torneio que não satisfaz as condições de C.5.6.6.
- 13.1.2 (Corolário C.5.6.2, Ghouila-Houri, 1960) Seja D um digrafo forte com n vértices. Suponha que $d^-(x) + d^+(x) \geq n$ para todo vértice x . Mostre que D tem um ciclo hamiltoniano.
- 13.1.3 (Corolário C.5.6.3) Seja D um digrafo forte com n vértices. Suponha que $\delta^+(D) \geq n/2$ e $\delta^-(D) \geq n/2$. Mostre que D tem um ciclo hamiltoniano.
- 13.1.4 Deduza C.5.6.2 (veja exercício 13.1.2) de C.5.6.6.
- 13.1.5 Deduza C.5.6.3 (veja exercício 13.1.3) de C.5.6.6.
- 13.1.6 Deduza C.5.6.6 de T.5.6.7.

13.2 Resultados novos

¹ A hipótese “ D forte” é redundante. Veja exercício 3.3.8.

² Acho que essa hipótese não é redundante.

Os teoremas abaixo generalizam os resultados da seção anterior. Dizemos que um par x, y de vértices distintos é **dominado** se existe um vértice z tal que $z \rightarrow x$ e $z \rightarrow y$. Dizemos que um par x, y de vértices distintos é **dominante** se existe um vértice z tal que $z \leftarrow x$ e $z \leftarrow y$.

- Teorema T.5.6.1 (Bang-Jensen–Gutin–Li, 1996): Seja D um digrafo forte com $n \geq 2$ vértices. Suponha que $d^-(x) + d^+(x) \geq n$ e $d^-(y) + d^+(y) \geq n - 1$ ou $d^-(x) + d^+(x) \geq n - 1$ e $d^-(y) + d^+(y) \geq n$ para todo par dominado x, y de vértices não-adjacentes. Então D tem um ciclo hamiltoniano.

Prova: Longa e complexa. Usa *multi-insertion technique* (§5.6.2).

- Teorema T.5.6.5 (Bang-Jensen–Gutin–Li, 1996): Seja D um digrafo forte com $n \geq 2$ vértices. Suponha que $d^+(x) + d^-(y) \geq n$ e $d^-(x) + d^+(y) \geq n$ para todo par dominado x, y de vértices não-adjacentes e todo par dominante x, y de vértices não-adjacentes. Então D tem um ciclo hamiltoniano.

Prova: Longa e complexa. Usa *multi-insertion technique* (§5.6.2).

Exercícios

13.2.1 Deduza C.5.6.2 (veja exercício 13.1.2) de T.5.6.1.

13.2.2 Deduza C.5.6.3 (veja exercício 13.1.3) de T.5.6.1.

13.2.3 Deduza C.5.6.6 de T.5.6.5.

Capítulo 14

Digrafos hamiltonianos multipartidos semicompletos

Este capítulo depende das CDCi e CDCaCi discutidas na seção 9.5 deste Roteiro. Depende também da *multi-insertion technique* de §5.6.2 do livro.

Definição: Um digrafo (V, A) é **bipartido semicompleto** (= *semicomplete bipartite*) se V admite uma partição $\{X_1, X_2\}$ tal que (1) nenhum arco tem ambas as pontas num mesmo bloco da partição e (2) para todo u em X_1 e todo v em X_2 tem-se $u \rightarrow v$ ou $u \leftarrow v$ ou ambos.

Definição: Um digrafo (V, A) é **multipartido semicompleto** (= *semicomplete multipartite*) se V admite uma partição $\{X_1, \dots, X_p\}$ tal que (1) nenhum arco tem ambas as pontas num mesmo bloco da partição e (2) para todo u em X_i e todo v em $X_j, j \neq i$, tem-se $u \rightarrow v$ ou $u \leftarrow v$ ou ambos.

Exercícios

- 14.0.1 (E.1.53 +) Suponha que um digrafo bipartido semicompleto B tem uma CDCaCi com um só caminho e um só ciclo. Mostre (sem recorrer ao T.5.7.1) que B tem um caminho hamiltoniano.
- 14.0.2 (E.1.54 +) Seja D um digrafo bipartido semicompleto forte. Suponha que D tem uma CDCi com exatamente dois ciclos. Prove (sem recorrer ao T.7.5.4) que D tem um ciclo hamiltoniano.
- 14.0.3 (E.1.55 +) Seja D um digrafo bipartido semicompleto forte. Suponha que D tem uma CDCi. Prove que D tem um ciclo hamiltoniano. (Veja E.1.54.)
- 14.0.4 (E.1.63) Descreva uma coleção infinita de digrafos multipartidos semicompletos fortes anti-simétricos cada um dos quais tem uma CDCi mas não tem um ciclo hamiltoniano.
- 14.0.5 (E.1.65) Seja D um digrafo tripartido semicompleto simétrico. Descreva as condições em que D tem um ciclo hamiltoniano.

14.1 Caminhos hamiltonianos

- **Teorema T.5.7.1 (Gutin, 1993):** Todo digrafo multipartido semicompleto que tem um CDCaCi com exatamente 1 caminho também tem um caminho hamiltoniano.

A prova (§5.7.3) é longa. Depende de L.5.7.12. Usa *multi-insertion technique* (§5.6.2).

Existe um algoritmo polinomial para encontrar um caminho hamiltoniano num digrafo multipartido semicompleto ou decidir que um tal caminho não existe.

- **Teorema T.5.7.3 (Gutin, 1993):** É possível encontrar um caminho máximo num digrafo multipartido semicompleto em tempo polinomial.

14.2 Ciclos hamiltonianos

- **Teorema T.5.7.4 (Gutin, 1984; Häggkvist–Manoussakis, 1989):** Todo digrafo bipartido semicompleto forte que tem uma CDCi também tem um ciclo hamiltoniano.

Acho que a prova não é simples.

Existe um algoritmo polinomial para encontrar um ciclo hamiltoniano num digrafo bipartido semicompleto forte ou decidir que um tal ciclo não existe.

- **Teorema T.5.7.9 (Bang-Jensen–Gutin–Yeo, 1998):** Existe um algoritmo polinomial que recebe um digrafo multipartido semicompleto forte D e devolve um ciclo hamiltoniano em D ou decide que D não tem um tal ciclo.

A prova é bastante difícil.

Exercícios

- 14.2.1 (E.5.28) Mostre que o torneio multipartido da figura 5.6 do livro não tem ciclo hamiltoniano.

Capítulo 15

Digrafos hamiltonianos: generalizações

Este capítulo trata de algumas generalizações do problema do ciclo hamiltoniano. Algumas envolvem a CDCi e a CDCaCi definidas na seção 9.4 deste Roteiro.

15.1 Caminhos máximos

Problema: Encontrar um caminho máximo num digrafo.

Notação: Para qualquer digrafo D , seja $lp(D)$ o comprimento de um caminho de comprimento máximo em D . $lp(D)$

Problema do caminho máximo: Dado um digrafo D , encontrar $lp(D)$.

O problema é NP-difícil. Há uma relação interessante entre $lp(D)$ e o número cromático $\chi(D)$.

- Definição: Um conjunto S de vértices é **estável** se nenhum arco tem ambas as pontas em S . Uma **coloração** de um digrafo D é uma coleção¹ de conjuntos estáveis que cobre $V(D)$.

O **número cromático** de um digrafo D é a cardinalidade de uma coloração mínima de D . O número cromático de D é denotado por $\chi(D)$. $\chi(D)$

- **Teorema T.8.4.1 (Gallai, 1968; Roy, 1967; Vitaver, 1962):** Para todo digrafo D tem-se $lp(D) \geq \chi(D) - 1$.

Exercícios

15.1.1 Deduza o teorema T.1.4.5 (Rédei) de T.8.4.1.

¹ Veja apêndice A.

- 15.1.2 Seja D um digrafo acíclico. Para cada vértice v , seja $f(v)$ o comprimento de um caminho máximo dentre os que têm origem v . Mostre que para todo arco uv tem-se $f(u) > f(v)$.
- 15.1.3 A prova do teorema T.8.4.1 que aparece no livro contém alguns pequenos erros e inconsistências. Refaça a prova corrigindo esses defeitos.

15.2 Cobertura disjunta por caminhos

CDCa Definição: Uma **cobertura disjunta por caminhos** (= *path factor*), ou **CDCa**, de um digrafo D é uma coleção de caminhos tal que cada vértice de D pertence a um e apenas um dos caminhos da coleção.

Problema minCDCa: Encontrar uma CDCa que tenha o menor número possível de caminhos.

O problema é NP-difícil. A cardinalidade de uma solução do problema é conhecida como *path factor number* e denotada por $pc(D)$.² Portanto, $pc(D) = 1$ se e somente se D tem um caminho hamiltoniano.

$\alpha(D)$ Definição: Um conjunto X de vértices é **estável** se nenhum arco tem ambas as pontas em X . O tamanho de um conjunto estável máximo de D é denotado por $\alpha(D)$.

Teorema T.5.2.1 (Gallai–Milgram, 1960): Se um digrafo D não tem um conjunto estável com mais que k vértices então tem uma CDCa com apenas k caminhos. Em outras palavras, $pc(D) \leq \alpha(D)$.

Teorema T.1.4.5 (Rédei) é um caso particular.

• **Teorema T.5.3.2 (Dilworth, 1950):** Para todo digrafo transitivo D tem-se $pc(D) = \alpha(D)$. Isso é um corolário de T.5.2.1.

• Teorema T.5.3.1 (folclore): Existe um algoritmo polinomial³ para o problema minCDCa restrito a digrafos acíclicos.

Prova: CDCa coincide com CDCaCi quando digrafo é acíclico.

Exercícios

- 15.2.1 Mostre que $pc(D) \geq pcc^*(D)$ para todo digrafo D .
- 15.2.2 Mostre que $pc(D) \leq n - \nu(D \cup D^{-1})$ para qualquer digrafo D , sendo $\nu(G)$ o tamanho de um emparelhamento máximo no digrafo G . (Não confunda com P.3.11.8.)
- 15.2.3 Seja D um digrafo com bipartição (U, W) tal que todo arco vai de U para W . Qual a relação entre um emparelhamento máximo em D e uma CDCa mínima em D ?

² A sigla “pc” é uma abreviatura de “path covering”.

³ $O(\sqrt{nm})$

- 15.2.4 É verdade que $pc(D) = \alpha(D)$ se D é acíclico?
- 15.2.5 (E.1.34 (Proposição P.1.4.6)) Seja $D = (V, A)$ um digrafo e k um inteiro positivo. Prove que as seguintes afirmação são equivalentes: (1) $pc(D) = k + 1$; (2) k é o tamanho do menor subconjunto A' de V^{2-} tal que o digrafo $(V, A \cup A')$ tem um caminho hamiltoniano.
- 15.2.6 (E.5.8) Um aeroporto tem um certo número de pistas de pouso/decolagem. Cada avião quer usar uma pista durante um certo intervalo de tempo. Como escalonar os aviões de modo a usar o menor número possível de pistas? (Queremos deixar o maior número possível de pistas livres para atender emergências.)
- 15.2.7 Seja (P_0, P_1, \dots, P_t) uma decomposição em orelhas de um digrafo forte D . Seja k o número de orelhas não-triviais da decomposição (P_0 é uma delas). Mostre que $pc(D) \leq k$.
- 15.2.8 (Min-max de Dilworth) Uma **cobertura por caminhos** é uma coleção de caminhos que cobre todos os vértices do digrafo (ou seja, todo vértice pertence a pelo um dos caminhos da coleção). Dois vértices x e y são **incomparáveis** se não existe caminho de x a y nem de y a x . Mostre que, em qualquer digrafo, tem-se $|\mathcal{C}| \geq |I|$ para toda cobertura por caminhos \mathcal{C} e todo conjunto I de vértices dois a dois incomparáveis. Mostre que em qualquer digrafo *acíclico* existe uma cobertura por caminhos \mathcal{C} e um conjunto I de vértices dois a dois incomparáveis tais que $|\mathcal{C}| = |I|$.

15.3 Subdigrafo gerador forte mínimo

Definição: Um **SGF** de um digrafo D é um subdigrafo gerador forte (= *strong spanning subdigraph*) de D . SGF

Problema minSGF (= *MSSS Problem*): Encontrar um SGF que tenha o menor número possível de arcos. Em outras palavras, encontrar uma parte mínima F de A tal que (V, F) é forte.

O problema é NP-difícil. (O problema tem solução com apenas n arcos se e somente se o digrafo tem um ciclo hamiltoniano.)

- Proposição P.6.11.1 (folclore): Se um digrafo D não tem uma CDCaCi com menos que k caminhos então todo SGF de D tem pelo menos $n + k$ arcos. Em outras palavras, todo SGF de um digrafo D tem $\geq n + pc^*(D)$ arcos.

Prova: Veja C.7.2.3.

- Corolário C.7.2.4 (folclore): Todo digrafo forte tem um SGF com $\leq 2n - 2$ arcos.

Prova: Comece por fazer uma decomposição em orelhas.

Conseqüência: O algoritmo (polinomial) de decomposição em orelhas pode ser usado como uma 2-aproximação para o problema minSGF.

Capítulo 16

Submodularidade e laminaridade

Neste capítulo, U é um conjunto finito arbitrário. Em algumas aplicações futuras, U será o conjunto de vértices de um digrafo. Em outras aplicações, U será o conjunto dos arcos de um digrafo.

16.1 Interseções e cruzamentos

- Definição: Dois conjuntos X e Y **se interceptam** (= *are intersecting*) se $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X \not\subseteq Y$ e $X \not\supseteq Y$.¹ Portanto, dois conjuntos X e Y não se interceptam se

$$X \cap Y = \emptyset \text{ ou } X \subseteq Y \text{ ou } X \supseteq Y .$$

- Dois subconjuntos X e Y de U **se cruzam** (= *are crossing*) se $X \cap Y \neq \emptyset$ e $X \not\subseteq Y$ e $X \not\supseteq Y$ e $X \cup Y \neq U$.² Portanto, dois conjuntos X e Y não se cruzam se

$$X \cap Y = \emptyset \text{ ou } X \subseteq Y \text{ ou } X \supseteq Y \text{ ou } X \cup Y = U ,$$

ou seja, se

$$X \subseteq \bar{Y} \text{ ou } X \subseteq Y \text{ ou } X \supseteq Y \text{ ou } X \supseteq \bar{Y} ,$$

sendo $\bar{X} := U \setminus X$. É claro que se dois conjuntos não se interceptam eles também não se cruzam.

Exercícios

- 16.1.1 Conjuntos X e Y não se cruzam se e somente se vale uma das quatro possibilidades a seguir: $X \subseteq Y$, $X \supseteq Y$, $X \subseteq \bar{Y}$ ou $X \supseteq \bar{Y}$. Por que a alternativa $\bar{X} \subseteq Y$ está ausente dessa lista?

¹ Alguns livros exigem apenas que $X \cap Y \neq \emptyset$. Mas é melhor exigir também que $X \not\subseteq Y$ e $X \not\supseteq Y$.

² Assim, um cruzamento é um tipo especial de interseção.

16.2 Coleções laminares e livres de cruzamentos

(Veja excelente discussão em Schrijver [Sch03], páginas 37 e 214.)

- Definição: Uma subcoleção³ de 2^U é **laminar** (ou **livre de interseções**) se nenhum par de seus elementos se intercepta.

Definição: Uma subcoleção de 2^U é **livre de cruzamentos** (= *cross-free*) se nenhum par de seus elementos se cruza.⁴

As definições de família⁵ laminar e família livre de cruzamentos são análogas.

- Lema A: Coleções laminares têm estrutura de árvores divergentes.
- Lema B: Coleções livres de cruzamentos têm estrutura de árvores orientadas.

Exercícios

16.2.1 Prove que coleções laminares têm a estrutura de árvores divergentes.

16.2.2 Exiba a árvore que representa a coleção cujos elementos são $\{a, f, h, b, d, i\}$, $\{f, h\}$, $\{b\}$, $\{c, g, j\}$, $\{d, i\}$, $\{e, c, g, j\}$. Exiba a árvore que representa a coleção cujos elementos são $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$, $\{h, i, j\}$, $\{d, e, h, i, j, f, g\}$.

16.2.3 Prove que coleções livres de cruzamentos têm a estrutura de árvores orientadas.

16.3 Submodularidade e supermodularidade

Definição: Uma função f de 2^U em \mathbb{Z} é **submodular** se para todo par X, Y de elementos de 2^U tem-se

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y).$$

Uma função f é **supermodular** se $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \geq f(X) + f(Y)$ para todo par X, Y de elementos de 2^U . Uma função f é **modular** se for submodular e supermodular.

- Fato: Se f é modular e $f(\emptyset) = 0$ então $f(X) = \sum_{x \in X} f(\{x\})$ para todo X .
- **Corolário C.7.1.2 (folclore):** Para todo digrafo D , as funções d^+ e d^- são submodulares.
- Notação: Se $S \cap T = \emptyset$ então $d^+(S, T) := |(S, T)|$ e $d^-(S, T) := |(T, S)|$.⁶ Notação adicional: $d(S, T) := d^+(S, T) + d^-(S, T)$.

$$\begin{array}{l} d^+(S, T) \\ d^-(S, T) \\ d(S, T) \end{array}$$

³ Veja apêndice A.

⁴ Assim, toda coleção laminar é livre de cruzamentos.

⁵ Veja apêndice A.

⁶ O livro dispensa a condição $S \cap T = \emptyset$ e diz $d^+(S, T) := |(S \setminus T, T \setminus S)|$; essa notação torna as coisas confusas demais para o meu gosto.

- **Proposição P.7.1.1_a (folclore):** Para todo par X, Y de conjuntos de vértices de um digrafo,

$$d^+(X \cup Y) + d^+(X \cap Y) + \eta = d^+(X) + d^+(Y),$$

sendo $\eta := d(X \setminus Y, Y \setminus X)$. Analogamente, $d^-(X \cup Y) + d^-(X \cap Y) + \eta = d^-(X) + d^-(Y)$.

- **Proposição P.7.1.1_b (folclore):** Para todo par X, Y de conjuntos de vértices de um digrafo, se $d^+(X \cap Y) = d^-(X \cap Y)$ então

$$d^+(X \setminus Y) + d^+(Y \setminus X) + \varepsilon = d^+(X) + d^+(Y),$$

sendo $\varepsilon := d(X \cap Y, \overline{X \cup Y})$. Analogamente, $d^-(X \setminus Y) + d^-(Y \setminus X) + \varepsilon = d^-(X) + d^-(Y)$.

Exercícios

- 16.3.1 Seja f uma função modular definida sobre 2^U . Suponha que $f(\emptyset) = 0$. Mostre que $f(X) = \sum_{x \in X} f(\{x\})$ para todo X em 2^U .
- 16.3.2 (E.7.1, Proposição P.7.1.3) Prove que para quaisquer X e Y em 2^U tem-se $N^+(X \cup Y) + N^+(X \cap Y) \leq N^+(X) + N^+(Y)$ e $N^-(X \cup Y) + N^-(X \cap Y) \leq N^-(X) + N^-(Y)$.
- 16.3.3 Seja D um digrafo e k um número natural. Suponha que $d^+(X) \geq k$ para todo conjunto não-trivial X de vértices. Digamos que X é **justo** se $d^+(X) = k$. Sejam X e Y dois conjuntos justos que se cruzam. Mostre que $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são justos.
- 16.3.4 Prove P.7.1.1_b.
- 16.3.5 Seja \mathcal{B} uma subcoleção de 2^U . Que propriedades \mathcal{B} deve ter para que possamos definir uma função submodular sobre \mathcal{B} ?
- 16.3.6 (E.8.52) Seja x um fluxo num digrafo D . Seja x_{\pm}^- a função definida por $x_{\pm}^-(X) := x^-(X) - x^+(X)$ para cada parte X de $V(D)$. Mostre que x_{\pm}^- é modular.
- 16.3.7 Seja f uma função submodular de 2^U em \mathbb{Z} . É verdade que $f(X \cup Y \cup Z) + f(X \cap Y \cap Z) \leq f(X) + f(Y) + f(Z)$ para quaisquer X, Y, Z em 2^U ?

16.4 Aplicação

- Teorema T.7.3.1_a (Menger): Sejam s e t dois vértices de um multi-digrafo⁷ D . Se $d^+(X) \geq k$ para todo conjunto X de vértices tal que $s \in X$ e $t \notin X$ então D tem k (s, t) -caminhos disjuntos nos arcos.

Prova por indução em $|A(D)|$.

⁷ Para que possamos fazer uma prova por indução baseada na submodularidade de d^+ , é preciso que o teorema seja enunciado para multi-digrafos.

Capítulo 17

Árvores geradoras divergentes disjuntas

Problema 9.5: Dado um digrafo D , um vértice z e um número natural k , encontrar k out-branchings disjuntos, todos com raiz z .

17.1 O teorema de Edmonds

- Proposição: Se D tem k out-branchings disjuntos, todos com raiz z , então $d^-(X) \geq k$ para todo conjunto X de vértices tal que $z \notin X \neq \emptyset$.

- **Teorema T.9.5.1 (Arc-disjoint branchings, Edmonds, 1973):** Seja z um vértice de um digrafo D e k um número. Se $d^-(X) \geq k$ para todo conjunto X de vértices tal que $z \notin X \neq \emptyset$ então D tem k out-branchings disjuntos, todos com raiz z .

Prova: Mostre que existe um out-branching F tal que $d_{D-A(F)}^-(X) \geq k - 1$ sempre que $z \notin X \neq \emptyset$. (Veja esboço da prova no apêndice B.1.)

- A prova de T.9.5.1 induz um algoritmo polinomial para o problema 9.5.
- Versão minimax de T.9.5.1: Para qualquer vértice z de qualquer digrafo, o número máximo de z -out-branchings mutuamente disjuntos é igual a $\min_x \lambda(z, x)$, sendo o mínimo tomado sobre todos os vértices x distintos de z .

Exercícios

17.1.1 (E.9.26) Deduza T.7.3.1_a (Menger) de T.9.5.1.

17.1.2 Prove T.7.3.1_a (Menger) pelo mesmo método usado na prova de T.9.5.1.

17.1.3 (E.9.27) Extraia da prova de T.9.5.1 um algoritmo polinomial que receba um digrafo D , um vértice z e um número k e devolva k z -out-branchings disjuntos ou um conjunto X tal que $z \notin X \neq \emptyset$ e $d^-(X) < k$. (Sugestão: Use fluxos.)

- 17.1.4 (E.9.28) Mostre que o exercício 17.1.3 não pode ser resolvido de maneira gulosa. Mais precisamente, exiba um digrafo D e um z -out-branching F tais que D tem dois z -out-branchings disjuntos mas $D - F$ não tem um z -out-branching.
- 17.1.5 (E.9.34 +) Prove o seguinte teorema de Frank. Um digrafo D tem k out-branchings disjuntos (não necessariamente todos com a mesma raiz) se e somente se $\sum_{i=1}^t d^-(X_i) \geq (t - 1)k$ para toda subpartição $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V . (Sugestão: Acrescente um novo vértice s e um conjunto mínimo de novos arcos de s a V de tal modo que s seja a raiz de k out-branchings no novo digrafo. Mostre que esse conjunto mínimo de novos arcos tem cardinalidade k .)

Capítulo 18

Árvores geradoras divergentes de custo mínimo

18.1 O problema

- Definição: Para qualquer digrafo (V, A) , uma **função-custo** é qualquer função de A em \mathbb{Z}_{\geq} . Se w é uma tal função e a é um arco, o número $w(a)$ é o **custo** (ou **w -custo** ou **custo em w**) de a . Para qualquer parte B de A , o número $w[B] := \sum_{a \in B} w(a)$ é o **custo** de B . Para qualquer subdigrafo T de (V, A) , o número $w[T] := w[A(T)]$ é o **custo** de T .
- **Problema 9.10** (out-branching de custo mínimo): Dado um digrafo (V, A) , uma função-custo w , e um vértice s , encontrar um s -out-branching que tenha custo mínimo.

18.2 Solução do problema

- Notação: Dado uma família¹ (\mathcal{L}, y) de partes de V e um arco a , seja $y[a]$ o número $\sum_{X \in \mathcal{L}: a \in (\bar{X}, X)} y(X)$.
Definição: Seja s um vértice e w uma função-custo de um digrafo (V, A) . Uma família (\mathcal{L}, y) de partes não-vazias de $V \setminus \{s\}$ é **w -disjunta** se $y[a] \leq w(a)$.
- Proposição: Seja s um vértice e w uma função-custo de um digrafo (V, A) . Para todo s -out-branching T e toda família w -disjunta (\mathcal{L}, y) de partes não-vazias de $V \setminus \{s\}$ tem-se $w[T] \geq |(\mathcal{L}, y)|$.
- **Teorema T.9.10.2 (Fulkerson, 1974)**: Se um digrafo D tem um s -out-branching então existe um s -out-branching T e uma família w -disjunta (\mathcal{L}, y) de partes não-vazias de $V \setminus \{s\}$ tal que $w[T] = |(\mathcal{L}, y)|$. Ademais, existe uma tal família (\mathcal{L}, y) em que \mathcal{L} é laminar.

Prova: algoritmo primal-dual.

¹ Veja apêndice A.

18.3 Generalização

Definição: Uma coleção \mathcal{E} de partes de um conjunto V é **inter-fechada** se $X \cup Y \in \mathcal{E}$ e $X \cap Y \in \mathcal{E}$ para todo par X, Y de elementos de \mathcal{E} que se interceptam.

Problema 9.10.1: Seja (V, A) um digrafo e \mathcal{E} uma coleção inter-fechada de partes de V . Dada uma função-custo w , encontrar uma parte B de A que minimize $w[B]$ sob a restrição $d_B^-(X) \geq 1$ para todo X em \mathcal{E} .

Solução: Essencialmente o mesmo algoritmo do problema 9.10.

Capítulo 19

Dijunções mínimas

Dado um digrafo (V, A) , queremos encontrar uma pequena alteração de A que torne o digrafo forte.

19.1 Dicortes e dijunções

- Neste capítulo, usaremos “fonte” e “sorvedouro” como abreviaturas de “conjunto-fonte” e “conjunto-sorvedouro”.

Proposição: Se X e Y são fontes então $X \cup Y$ e $X \cap Y$ também são fontes.

- Definição: Um **dicorte** (= *dicut*), ou **corte dirigido**, é qualquer conjunto da forma (X, \bar{X}) sendo X uma fonte.

Fato: Um digrafo é forte se e somente se não tem dicortes.

- Definição: Uma **dijunção** (= *dijoin*) é qualquer conjunto J de arcos tal que $J \cap C \neq \emptyset$ para todo dicorte C .

Exemplos: Se (V, A) tem um dicorte vazio então (V, A) não tem dijunção. Se (V, A) não tem dicortes vazios então A é uma dijunção.

- Notação: Se J é um conjunto de arcos então J^{-1} é o conjunto $\{(v, u) : uv \in J\}$.

J^{-1}

Propriedade: Um conjunto J de arcos é uma dijunção se e somente se o digrafo $(V, A \cup J^{-1})$ é forte.

Propriedade: Um conjunto J de arcos de um digrafo é uma dijunção se e somente se a contração¹ de J torna o digrafo forte.

¹ Seja uv um arco de um digrafo D . Seja A_u^- o conjunto dos arcos que entram em u e A_v^+ o conjunto dos arcos que saem de v . A **contração** de uv produz um digrafo com conjunto de vértices $(V \setminus \{u, v\}) \cup \{z\}$, sendo z um objeto que não pertence a V , e conjunto de arcos $(A \setminus (A_u^- \cup A_v^+)) \cup (B_z^- \cup B_z^+)$, sendo B_z^- o conjunto $\{xz : xu \in A_u^-\}$ e B_z^+ o conjunto $\{zy : vy \in A_v^+\}$. Esse digrafo é denotado por D/uv . Para qualquer conjunto F de arcos, denota-se por D/F o digrafo que resulta da contração de todos os arcos em F . (É claro que para cada uv em F um novo objeto z fora de V será usado como vértice de D/F .)

Exercícios

- 19.1.1 Dê um exemplo de uma dijunção minimal que não seja mínima.
- 19.1.2 Seja J uma dijunção minimal de um digrafo (V, A) . Mostre que $A \cap J^{-1}$ é vazio.
- 19.1.3 Seja J uma dijunção minimal de D . Seja a um elemento de J . Mostre que existe uma fonte F tal que $(F, \overline{F}) \cap J = \{a\}$.
- 19.1.4 Suponha que J é uma dijunção minimal. Seja H o subdigrafo induzido por J . Mostre que cada componente fraco de H é uma árvore orientada.

19.2 Dijunção mínima

Problema de Younger: Encontrar uma dijunção mínima num digrafo D .

- Proposição: Para toda dijunção J e toda coleção disjunta² \mathcal{C} de dicortes tem-se $|J| \geq |\mathcal{C}|$.
- **Teorema T.7.15.2 (Lucchesi–Younger, 1976):** Todo digrafo sem dicortes vazios tem uma dijunção J e uma coleção disjunta \mathcal{C} de dicortes tais que $|J| = |\mathcal{C}|$.

Veja esboço da prova no apêndice ??.

- Corolário minimax de T.7.15.2: Em qualquer digrafo sem dicortes vazios, uma dijunção mínima tem a mesma cardinalidade que uma coleção disjunta máxima de dicortes.
- Uma coleção \mathcal{S} de sorvedouros é **corte-disjunta** se $(\overline{S}, S) \cap (\overline{T}, T) = \emptyset$ para todo par S, T de elementos de \mathcal{S} .

Proposição: Para toda coleção disjunta \mathcal{C} de dicortes, existe uma coleção corte-disjunta \mathcal{S} de sorvedouros tal que \mathcal{S} é livre de cruzamentos e $|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}|$.

- Corolário C.8.8.10: Existe um algoritmo polinomial³ para encontrar os dois termos de T.7.15.2.
- Versão capacitada de T.7.15.2: Em qualquer digrafo (V, A) sem dicortes vazios, para qualquer função c de A em \mathbb{Z}_{\geq} , existe uma dijunção J e uma coleção c -disjunta \mathcal{C} de dicortes tais que $c(J) = |\mathcal{C}|$.

Aqui, uma coleção de dicortes é c -disjunta se cada arco a pertence a no máximo $c(a)$ elementos da coleção.

Exercícios

- 19.2.1 Mostre que basta provar a restrição de T.7.15.2 a digrafo acíclicos.

² Veja apêndice A.

³ O algoritmo é puramente combinatório, ou seja, não envolve a solução de um programa linear (por meio do algoritmo dos elipsóides, por exemplo).

- 19.2.2 Seja \mathcal{C} uma coleção disjunta de dicortes de um digrafo. Mostre que existe uma coleção corte-disjunta \mathcal{S} de sorvedouros tal que \mathcal{S} é livre de cruzamentos e $|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}|$.
- 19.2.3 Seja \mathcal{C} uma coleção disjunta de dicortes de um digrafo. É verdade que existe uma coleção corte-disjunta \mathcal{S} de sorvedouros tal que \mathcal{S} é laminar e $|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}|$?

19.3 Reorientações fortes mínimas

Para qualquer conjunto J de arcos, $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é o digrafo que se obtém quando invertemos a orientação de todos elementos de J .

- Fácil: Se o digrafo $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é forte então J é uma dijunção.
- Proposição:⁴ Se (V, A) é um digrafo sem dicortes de cardinalidade ≤ 1 e J é uma dijunção minimal de (V, A) então o digrafo $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é forte.

Veja prova no apêndice ??.

Exercícios

- 19.3.1 Seja J um subconjunto de A . Suponha que $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é forte. Mostre que J é uma dijunção.
- 19.3.2 Mostre que nem toda dijunção J de (V, A) é tal que $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é forte.
- 19.3.3 Suponha que um digrafo (V, A) tem um dicorte com um só arco. Mostre que não existe $J \subseteq A$ tal que $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$ é forte.
- 19.3.4 Seja J uma dijunção minimal de um digrafo (V, A) . Seja a o único arco de uma orelha trivial em uma decomposição em orelhas do digrafo $(V, A \cup J^{-1})$. Mostre que $a \notin J^{-1}$.
- 19.3.5 Seja J uma dijunção de (V, A) . Seja X um subconjunto de V que não é fonte em (V, A) mas é fonte em $(V, (A \setminus J) \cup J^{-1})$. Mostre que algum arco de J^{-1} sai de X .

19.4 A minimax “polar”

- Proposição: Para toda coleção disjunta \mathcal{J} de dijunções e todo dicorte C tem-se $|\mathcal{J}| \leq |C|$.
- **Conjetura (Woodall, 1978):** Todo digrafo tem uma coleção disjunta \mathcal{J} de dijunções e um dicorte C tais que $|\mathcal{J}| = |C|$.

O livro não trata desse assunto. Veja o livro de Schrijver [Sch03, p.962,p.1457].

⁴ Esse é o Teorema 55.1 (Frank) no livro de Schrijver [Sch03, p.946].

Exercícios

- 19.4.1 Mostre que é suficiente provar a conjectura de Woodall para digrafos acíclicos.
- 19.4.2 Seja D um digrafo acíclico dotado da seguinte propriedade: para toda fonte u e todo sorvedouro v , existe um caminho de u a v . Prove que D satisfaz o enunciado da conjectura de Woodall.

Capítulo 20

Aumento da arco-conexidade

Quantos arcos é necessário inserir em um digrafo para que ele se torne “mais forte”? Mais precisamente, quantos arcos é preciso inserir em um digrafo para transformá-lo num multi-digrafo arco- k -forte?

Vamos permitir que novos arcos sejam inseridos em paralelo com arcos já existentes. Por isso, é preciso estudar o problema no universo dos multi-digrafos.

20.1 O problema

Definição: Um **novarco** num multi-digrafo $D = (V, A)$ é qualquer elemento de V^{2-} , ou seja, qualquer par ordenado de vértices distintos. (Um novarco pode ou não estar em A .)

Notação: Para qualquer família¹ F de novarcos, denotaremos por $D + F$ o multi-digrafo $(V, A \cup F)$.² Se D é um digrafo e a é um novarco que não está em A então $D + \{a\}$ é um digrafo; senão $D + \{a\}$ é um multi-digrafo com duas cópias do arco a .

Definição: Um **arco- k -fortificante** de um multi-digrafo D é uma família F de novarcos tal que $D + F$ é arco- k -forte (ou seja, tal que $\lambda(D + F) \geq k$).

Problema do Aumento da Arco-Conexidade: Dado um multi-digrafo D e um número natural k , encontrar um arco- k -fortificante mínimo de D .

- Denotaremos por $\psi_k(D)$ a cardinalidade de um arco- k -fortificante mínimo. (Essa notação não é padrão; seu uso será restrito ao presente capítulo.) $\psi_k(D)$
- Definição D.7.6.1: Seja $D = (V, A)$ um multi-digrafo e k um número natural. Uma **k -barreira positiva** é uma coleção disjunta³ de partes não-triviais X de V tais que $d^+(X) \leq k$. Uma **k -barreira negativa** é uma coleção disjunta de partes não-triviais X de V tais que $d^-(X) \leq k$.

¹ Veja apêndice A.

² Veja definição de \cup no apêndice A deste Roteiro.

³ Veja apêndice A.

O **tamanho** de uma k -barreira positiva \mathcal{F} é o número $\sum_{X \in \mathcal{F}} (k - d^+(X))$. O **tamanho** de uma k -barreira negativa \mathcal{F} é o número $\sum_{X \in \mathcal{F}} (k - d^-(X))$. O tamanho de uma k -barreira \mathcal{F} (positiva ou negativa) será denotado por $\|\mathcal{F}\|$.

- Proposição: Para todo arco- k -fortificante F e toda k -barreira \mathcal{F} tem-se $|F| \geq \|\mathcal{F}\|$.

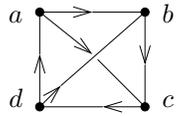


Figura 20.1: Encontre um arco-2-fortificante mínimo.

Exercícios

- 20.1.1 Calcule ψ_1 de um caminho.
- 20.1.2 Calcule ψ_2 de um ciclo.
- 20.1.3 Calcule ψ_1 de uma árvore divergente.
- 20.1.4 Seja D é uma árvore divergente com $n \geq 4$ vértices. É verdade que $\psi_2(D) = \sum_v (2 - d^+(v))$, sendo a soma tomada sobre todos os vértices v tais que $d^+(v) < 2$?
- 20.1.5 Exiba um torneio D com 5 ou mais vértices que não seja forte. Exiba um arco-2-fortificante mínimo de D .
- 20.1.6 Mostre que se $k = 1$ então é possível resolver o problema do aumento da arco-conexidade de um digrafo sem recorrer a arcos paralelos.
- 20.1.7 Discuta o problema de encontrar um arco- k -fortificante *minimal* de um multi-digrafo.
- 20.1.8 Explique a diferença entre o problema do aumento da arco-conexidade e o problema de Younger (veja capítulo 19 deste Roteiro). Dê exemplos.
- 20.1.9 Mostre que $\psi_k(D) \leq 2k(n - 1)$ para qualquer multi-digrafo D .
- 20.1.10 Seja D um digrafo acíclico. Mostre que $\psi_1(D) = \max\{q, r\}$ sendo q o número de fontes e r o número de sorvedouros de D .
- 20.1.11 Mostre que um multi-digrafo é arco- k -forte se e somente se $\|\mathcal{F}\| = 0$ para toda barreira \mathcal{F} .
- 20.1.12 Um conjunto de vértices pode fazer parte, ao mesmo tempo, de uma k -barreira positiva e uma k -barreira negativa? Discuta.
- 20.1.13 A propriedade " $|F| \geq \|\mathcal{F}\|$ " continua valendo se eliminarmos a cláusula "não-trivial" da definição de barreira?
- 20.1.14 Considere o problema do aumento da arco-conexidade com a restrição adicional de que o multi-digrafo resultante deve ser um digrafo (isto é, não deve ter arcos paralelos). Você sabe dizer alguma coisa sobre o problema? (Uma coisa é certa: se $k > n$ então esta versão do problema não tem solução.)
- 20.1.15 (E.7.14 +) Seja k um número natural, D um digrafo e s, t um par de vértices de D . Suponha que $\lambda_D(s, t) < k$. Seja F uma família mínima de novarcos tal que

$\lambda_{D+F}(s, t) \geq k$. Mostre que é possível escolher F de modo que todos os seus elementos sejam da forma st .

20.2 Primeiro passo da solução

Nesta seção e na seguinte, todo multi-digrafo tem um vértice s que recebe tratamento especial. Diremos que s é o **vértice especial** do multi-digrafo. Se V é o conjunto de vértices do multi-digrafo, escreveremos $V-s$ no lugar de $V \setminus \{s\}$. Diremos que uma parte X de $V-s$ é **não-trivial** se $\emptyset \neq X \neq V-s$.

- Definição: Um multi-digrafo H com conjunto de vértices V e vértice especial s é (s, k) -**forte** se $d^+(U) \geq k$ e $d^-(U) \geq k$ para toda parte não-trivial U de $V-s$. Pelo teorema de Menger, H é (s, k) -forte se e somente se para todo x e todo y em $V-s$ existem k (x, y) -caminhos em H dois a dois disjuntos nos arcos.

- Definição: Um multi-digrafo H com conjunto de vértices V e vértice especial s é $(s, k, +)$ -**forte** se $d^+(U) \geq k$ para toda parte não-trivial U de $V-s$.

Um multi-digrafo $(s, k, -)$ -**forte** é definido de maneira análoga (basta trocar “+” por “-”).

Fato: H é (s, k) -forte se e somente se H é, ao mesmo tempo, $(s, k, +)$ -forte e $(s, k, -)$ -forte.

- Definição: Um $(s, k, +)$ -**fortificante** de um multi-digrafo H com vértice especial s é uma família E^+ de novarcos da forma us , com $u \in V-s$, tal que o multi-digrafo $D+E^+$ é $(s, k, +)$ -forte. Um $(s, k, -)$ -**fortificante** é definido de maneira análoga.

Fato: Se E^+ é um $(s, k, +)$ -fortificante e E^- é um $(s, k, -)$ -fortificante então $H + (E^+ \dot{\cup} E^-)$ é (s, k) -forte.

- Fato: Para qualquer $(s, k, +)$ -fortificante E^+ de H e qualquer k -barreira positiva \mathcal{F}^+ de $H-s$ tem-se $|E^+| \geq \|\mathcal{F}^+\|$.

Fato: Para qualquer $(s, k, -)$ -fortificante E^- de H e qualquer k -barreira negativa \mathcal{F}^- de $H-s$ tem-se $|E^-| \geq \|\mathcal{F}^-\|$.

- **Lema L.7.6.2_a (Frank, 1992):** Para qualquer multi-digrafo $H = (V, A)$ com vértice especial s existe um $(s, k, +)$ -fortificante E^+ e uma k -barreira (positiva ou negativa) \mathcal{F} de $H-s$ tais que $|E^+| \leq \|\mathcal{F}\|$.

Prova no apêndice ??.

Lema L.7.6.2_b é análogo: basta trocar “+” por “-”.

Exercícios

- 20.2.1 Seja (V, A) um multi-digrafo com vértice especial s . Mostre que (V, A) é (s, k) -forte se e somente se para todo x e todo y em $V-s$ existem k (x, y) -caminhos dois a dois disjuntos nos arcos.

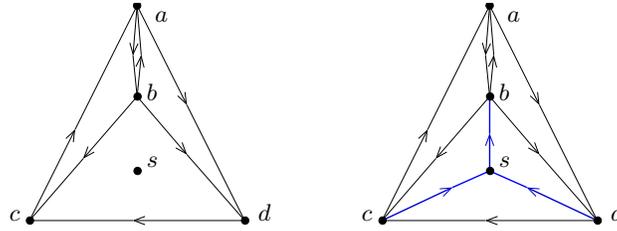


Figura 20.2: (Copiado da figura 7.5 do livro.) Seja H o digrafo à esquerda e H' o digrafo à direita. Sejam $E^+ := \{cs, ds\}$ e $E^- := \{sb\}$. Observe que E^+ é um $(s, 2, +)$ -fortificante e E^- é um $(s, 2, -)$ -fortificante de H . O digrafo H' , igual a $H + E^+ + E^-$, é $(s, 2)$ -forte (mas não é arco-2-forte). Observe que $\{\{c, d\}\}$ é uma 2-barreira positiva de $H - s$. Observe que $\{\{c\}, \{d\}\}$ é uma 2-barreira positiva de tamanho máximo de $H - s$. Observe que $\{\{b\}\}$ e $\{\{a, b\}\}$ são 2-barreiras negativas de tamanho máximo de $H - s$.

20.2.2 Seja $H = (V, A)$ um multi-digrafo com vértice especial s . Mostre que H é $(s, k, +)$ -forte se e somente se, para todo par x, y de elementos de $V - s$, existem k caminhos em H de x a $\{y, s\}$, dois a dois disjuntos nos arcos. Mostre que H é $(s, k, -)$ -forte se e somente se, para todo par x, y de elementos de $V - s$, existem k caminhos em H de $\{x, s\}$ a y , dois a dois disjuntos nos arcos.

20.2.3 Seja H um multi-digrafo com vértice especial s . Seja E^+ um $(s, k, +)$ -fortificante de H . Seja \mathcal{F}^+ uma k -barreira positiva de $H - s$. Mostre que $|E^+| \geq \|\mathcal{F}^+\|$.

20.3 Segundo passo: operação *splitting off*

- Definição: Seja H um multi-digrafo com vértice especial s . A operação **splitting off**⁴ consiste em trocar um par de arcos us, sv pelo novarco uv . O resultado da operação é o multi-digrafo $(H - \{us, sv\}) + \{uv\}$.
- Teorema T.7.5.2 (Mader's Directed Splitting Theorem, 1982): Seja H um multi-digrafo com vértice especial s . Se H é (s, k) -forte e $d^+(s) = d^-(s)$ então, para todo arco sv , existe um arco us tal que o *splitting off* do par us, sv produz um multi-digrafo (s, k) -forte.

Esboço da prova: apêndice ??.

- Corolário C.7.5.3 (Mader, 1982): Seja H um multi-digrafo com vértice especial s . Se H é (s, k) -forte e $d^+(s) = d^-(s)$ então existe uma seqüência $(u_1s, sv_1), \dots, (u_rs, sv_r)$ de pares de arcos, com $r := d^-(s)$, tal que o multi-digrafo $(H - s) + \{u_1v_1, \dots, u_rv_r\}$ é arco- k -forte.
- Exemplo: Seja H'' o primeiro digrafo da figura 20.2. O multi-digrafo $H := H'' + sb$ é $(s, 2)$ -forte. A seqüência de pares de arcos de que trata C.7.5.3 é $(cs, sb), (ds, sb)$. O digrafo $(H - s) + \{cb, db\}$ é arco-2-forte.

⁴ Seria melhor dizer *splicing*?

20.4 Solução do problema

- **Teorema T.7.6.3 (Frank’s Arc-Strong Connectivity Augmentation Theorem, 1992):** Para qualquer número natural k , todo multi-digrafo tem um arco- k -fortificante F e uma k -barreira \mathcal{F} tais que $|F| = \|\mathcal{F}\|$.

Prova: Usa L.7.6.2_a, L.7.6.2_b e T.7.5.2 (Mader). Veja apêndice ??.

- **Corolário minimax:** Em qualquer multi-digrafo, todo arco- k -fortificante mínimo tem o mesmo tamanho que uma k -barreira máxima. Em outras palavras, $\psi_k(D) = \gamma_k(D)$ para todo multi-digrafo D .

Aqui, $\gamma_k(D)$ denota o tamanho de uma k -barreira máxima.

$\gamma_k()$

- Existe um algoritmo polinomial combinatório (*Frank’s arc-strong connectivity augmentation algorithm*) para encontrar os objetos F e \mathcal{F} cuja existência é garantida por T.7.6.3.
- Teorema T.7.6.4 (Frank, 1992): O problema de encontrar uma família de novarcos que tenha custo mínimo e torne um multi-digrafo arco- k -forte é NP-completo.⁵

Exercícios

- 20.4.1 Interprete o teorema T.7.6.3 no caso em que o multi-digrafo dado é arco- k -forte.
- 20.4.2 Considere o problema do aumento da arco-conexidade restrito ao caso $k = 1$. Dê a definição mais simples que puder dos conceitos de fortificante e barreira. Enuncie a versão correspondente do teorema T.7.6.3.
- 20.4.3 Faça uma adaptação da prova do teorema T.7.6.3 ao caso $k = 1$. Faça todas as simplificações que puder.

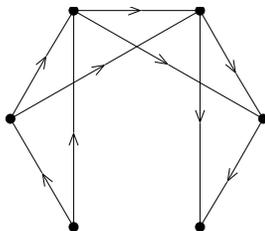


Figura 20.3: Exercício E.7.29. Esta é a figura 7.19 (p.412) do livro.

- 20.4.4 Digamos que uma **bbarreira** é uma coleção disjunta ou co-disjunta de partes não-triviais de V . Para qualquer bbarreira \mathcal{B} , defina $\|\mathcal{B}\| := \sum_{X \in \mathcal{B}} (k - d^+(X))$. Verifique que o seguinte teorema é equivalente a T.7.6.3: Se D não é arco- k -forte então existe um arco- k -fortificante F e uma bbarreira \mathcal{B} tal que $|F| = \|\mathcal{B}\|$.

⁵ Acho que isso é um raro exemplo de um problema NP-completo cuja versão sem custos nos arcos é polinomial.

- 20.4.5 (E.7.15 +) Considere o seguinte problema: Dado um número natural k , um digrafo D e um vértice s de D , encontrar uma família mínima de novarcos F tal que $D + F$ tem k out-branchings disjuntos, todos com raiz s . Mostre como reduzir esse problema ao problema do aumento de arco-conexidade. Obtenha uma fórmula minímax para o novo problema.
- 20.4.6 (E.7.29) Encontre um arco-2-fortificante mínimo e uma 2-barreira máxima no digrafo da figura 20.3.

Capítulo 21

Aumento da conexidade

Quantos arcos é preciso inserir em um digrafo para que ele se torne k -forte? Este problema é bem mais difícil que o problema do aumento da arco-conexidade (capítulo 20 deste Roteiro).

Não há necessidade de tratar de multi-digrafos neste capítulo, pois arcos paralelos não contribuem para a conexidade.

21.1 O problema

Definição: Um **novarco** num digrafo $D = (V, A)$ é qualquer par ordenado de vértices distintos. Para qualquer conjunto F de novarcos, denotaremos por $D + F$ o digrafo $(V, A \cup F)$.

Definição: Um **k -fortificante**¹ de um digrafo D é um conjunto F de novarcos tal que $D + F$ é k -forte (ou seja, tal que $\kappa(D + F) \geq k$).

Problema do Aumento da Conexidade: Dado um digrafo D e um número natural k , encontrar um k -fortificante mínimo de D .

- Podemos nos restringir ao caso $k \leq n - 2$. Se $k \geq n$, o problema não tem solução. Se $k = n - 1$, a solução é simples: basta lembrar que todo digrafo $(n - 1)$ -forte é completo.
- Denotaremos por $\varphi_k(D)$ a cardinalidade de um k -fortificante mínimo. (Essa notação $\varphi_k(D)$ não é padrão; seu uso será restrito ao presente capítulo.)

Exercícios

21.1.1 Calcule φ_1 de um caminho. Calcule φ_1 de uma árvore divergente.

¹ Não confunda k -fortificante com arco- k -fortificante.

- 21.1.2 Resolva o problema do aumento de conexidade no caso $k = 1$ (ou seja, calcule $\varphi_1(D)$ para qualquer digrafo D).
- 21.1.3 Explique a diferença entre o problema do aumento da conexidade e o problema de Younger (veja capítulo 19 deste Roteiro). Dê exemplos.
- 21.1.4 Calcule φ_2 de um ciclo.
- 21.1.5 Discuta o problema de encontrar um k -fortificante *minimal* de um digrafo.
- 21.1.6 Resolva o problema do aumento de conexidade no caso $k = n - 1$, sendo n o número de vértices do digrafo.
- 21.1.7 Resolva o problema do aumento de conexidade no caso $k = n - 2$, sendo n o número de vértices do digrafo.
- 21.1.8 (E.7.20) Seja D um torneio acíclico e $k \leq n - 2$. Mostre que D tem um k -fortificante com não mais que $k(k + 1)/2$ novarcos. Em outras palavras, mostre que $\varphi_k(D) \leq k(k + 1)/2$. (Sugestão: veja exercício 8.3.3.)
- 21.1.9 (Conjetura Cnj.7.7.13, Bang-Jensen, 1994) Seja D um digrafo semicompleto. Se $k \leq n - 2$, é verdade que $\varphi_k(D) \leq k(k + 1)/2$?
- 21.1.10 (Proposição P.7.7.14, Frank-Jordán, 1999) Para todo digrafo semicompleto D e todo $k \leq n - 2$, tem-se $\varphi_k(D) \leq k^2$.

21.2 Barreiras e o teorema de Frank-Jordán

Definição: Um *one-way pair* é um par (X, Y) de subconjuntos não-triviais de V tal que X é uma margem positiva e Y a correspondente margem negativa de um separador.² Portanto, (X, Y) é um *one-way pair* se X e Y são não-triviais, $X \cap Y = \emptyset$ e $N^+(X) \subseteq S \supseteq N^-(Y)$, sendo $S := \overline{X \cup Y}$.

Definição: O **tamanho** de um *one-way pair* (X, Y) é a cardinalidade do correspondente separador, ou seja, $|\overline{X \cup Y}|$.

- Definição: Dois *one-way pairs* (X, Y) e (X', Y') são **independentes** se $X \cap X' = \emptyset$ ou $Y \cap Y' = \emptyset$.
- Definição: Uma **k -barreira**³ é uma coleção de *one-way pairs* independentes, cada um dos quais tem tamanho $\leq k$.

Veja figura 7.8(b) do livro.

O **tamanho** de uma k -barreira \mathcal{F} é a soma $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{F}} (k - |\overline{X \cup Y}|)$. O tamanho de uma k -barreira \mathcal{F} será denotado por $\|\mathcal{F}\|$. O tamanho de uma k -barreira máxima de D será denotado por $\eta_k(D)$.

$\|\mathcal{F}\|$
 $\eta_k(D)$

- Proposição A: Para todo k -fortificante F e toda k -barreira \mathcal{F} tem-se $|F| \geq \|\mathcal{F}\|$.

² Veja subseção 5.2 deste Roteiro.

³ Não confunda esse conceito de barreira com o conceito de barreira associada ao aumento da arco-conexidade (seção 20.4 deste Roteiro).

Teorema T.7.7.3 (Vertex-Strong Connectivity Augmentation, Frank–Jordán, 1995):

Para todo digrafo D e todo número natural $k \leq n - 2$, existe um k -fortificante F e uma k -barreira \mathcal{F} tais que $|F| = \|\mathcal{F}\|$.

Corolário: Para todo digrafo D e todo número natural $k \leq n - 2$, um k -fortificante mínimo tem o mesmo tamanho que uma k -barreira máxima. Em outras palavras, $\varphi_k(D) = \eta_k(D)$ para todo D e todo $k \leq n - 1$.

- Teorema T.7.7.4 (Frank–Jordán, 1995): Existe um algoritmo polinomial para o problema do aumento da conexidade.

O algoritmo não é puramente combinatório: usa o método do elipsóide. Não se conhece um algoritmo combinatório.

Exercícios

- 21.2.1 Mostre que um digrafo é k -forte se e somente se $\|\mathcal{F}\| = 0$ para toda barreira \mathcal{F} .
- 21.2.2 (Proposição A) Seja F um k -fortificante e \mathcal{F} uma k -barreira. Mostre que $|F| \geq \|\mathcal{F}\|$.
- 21.2.3 Seja D uma árvore divergente. Calcule $\eta_1(D)$.
- 21.2.4 Calcule $\eta_2(C)$, sendo C um ciclo.
- 21.2.5 Seja \mathcal{X} uma coleção disjunta de partes não-triviais de V tal que $X \cup N^+(X) \neq V$ e $|N^+(X)| \leq k$ para todo X em \mathcal{X} . Seja \mathcal{F} a coleção de todos os pares da forma $(X, \overline{X \cup N^+(X)})$ com $X \in \mathcal{X}$. Mostre que \mathcal{F} é uma k -barreira. Mostre que $\|\mathcal{F}\| = \sum_{X \in \mathcal{X}} (k - |N^+(X)|)$. É verdade que toda k -barreira tem a forma descrita nesse exercício?
- 21.2.6 Seja D é uma árvore divergente com $n \geq 3$ vértices. Mostre diretamente (sem usar T.7.7.3) que $\varphi_2(D) = \sum_v (2 - d^+(v))$, sendo a soma tomada sobre todos os vértices v tais que $d^+(v) < 2$.
- 21.2.7 (T.7.7.10, Masuzawa–Hagihara–Tokura, 1987) Seja D é uma árvore divergente e $k \leq n - 2$. Deduza de T.7.7.3 que $\varphi_k(D) = \sum_v (k - d^+(v))$, sendo a soma tomada sobre todos os vértices v tais que $d^+(v) < k$.
- 21.2.8 (E.7.44) Para qualquer *one-way pair* (X, Y) , seja $h(X, Y) := |\overline{X \cup Y}|$. Prove que a função $h(\cdot, \cdot)$ é **bi-submodular** ou seja, para cada par $(X, Y), (X', Y')$ de *one-way pairs* tem-se

$$h(X \cup X', Y \cap Y') + h(X \cap X', Y \cup Y') \leq h(X, Y) + h(X', Y').$$

Sugestão: considere a contribuição de cada vértice v para cada lado da desigualdade.

- 21.2.9 (E.7.45) Seja D um digrafo k -forte mas não $(k+1)$ -forte. Digamos que um *one-way pair* (X, Y) é **crítico** se $|\overline{X \cup Y}| = k$. Como $\overline{X \cup Y}$ inclui um separador, a família \mathcal{F} de todos os *one-way pairs* críticos não é vazia. Prove que \mathcal{F} é livre de cruzamentos, ou seja, se (X, Y) e (X', Y') estão em \mathcal{F} e satisfazem $X \cap X' \neq \emptyset$ e $Y \cap Y' \neq \emptyset$ então $(X \cup X', Y \cap Y')$ e $(X \cap X', Y \cup Y')$ estão em \mathcal{F} . (Sugestão: Use exercício 21.2.8.)
- 21.2.10 Digamos que um *one-way pair* (X, Y) é *minimal* se não existe outro *one-way pair* (X', Y') tal que $X' \supseteq X$ e $Y' \supseteq Y$. Pergunta: É verdade que todo digrafo D tem uma k -barreira \mathcal{F} tal que $\|\mathcal{F}\| = \eta_k(D)$ e cada elemento de \mathcal{F} é minimal?

Capítulo 22

Orientações versus número cromático

Este capítulo repete parte dos resultados da seção 15.1.

22.1 O problema min lp

$lp(D)$ Notação: Para qualquer digrafo D , seja $lp(D)$ o comprimento de um caminho de comprimento máximo em D .

Problema min lp: Dado um digrafo simétrico¹ G , encontrar uma orientação D de G que minimize $lp(D)$.

Exercícios

- 22.1.1 Seja G um digrafo simétrico bipartido. Encontre um orientação de G que não tenha caminhos de comprimento 2.
- 22.1.2 Seja K um digrafo completo com 3 vértices. Obtenha uma orientação de K que não tenha caminhos de comprimento 2. Obtenha uma orientação de um digrafo completo com 5 vértices que não tenha caminhos de comprimento 4.
- 22.1.3 Seja G um digrafo simétrico dotado de um caminho de comprimento k . Mostre que existe uma orientação de D de G tal que $lp(D) \geq k$.
- 22.1.4 Seja D uma orientação de um digrafo simétrico G . Mostre que G tem um caminho de comprimento $lp(D)$. É verdade que G não tem caminho de comprimento maior que $lp(D)$?

¹ Convém lembrar que um digrafo simétrico é essencialmente o mesmo que um grafo.

22.2 Caminhos longos e número cromático

Definição: Uma **coloração** de um digrafo (V, A) é uma coleção de conjuntos estáveis que cobre V . (Um conjunto S de vértices é **estável** se nenhum arco tem ambas as pontas em S .) O **número cromático** de um digrafo D é a cardinalidade de uma coloração mínima de D . O número cromático de D é denotado por $\chi(D)$.

- Proposição: Todo digrafo simétrico G tem uma orientação D tal que $\text{lp}(D) \leq \chi(G) - 1$.
Por exemplo, todo digrafo simétrico bipartido tem uma orientação D tal que $\text{lp}(D) \leq 1$.
- Teorema T.8.4.1 (Gallai, 1968; Roy, 1967; Vitaver, 1962): Toda orientação D de um digrafo simétrico G é tal que $\text{lp}(D) \geq \chi(G) - 1$.
- Corolário: $\min_D \text{lp}(D) = \chi(G) - 1$, sendo o mínimo tomado sobre todas as orientações D de G . Portanto, resolver o problema $\min \text{lp}$ equivale a calcular o número cromático. Assim, o problema é NP-difícil.

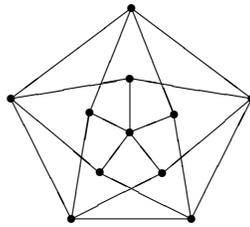


Figura 22.1: Grafo de Grötzsch. Veja exercício 22.2.8 e figura 8.16 do livro.

Exercícios

- 22.2.1 Deduza T.1.4.5 (Rédei) de T.8.4.1.
- 22.2.2 É verdade que $\text{lp}(D) = \chi(D) - 1$ para todo digrafo D ?
- 22.2.3 Por que a relação entre lp e χ não é do tipo minimax (no sentido da dualidade de programação linear)?
- 22.2.4 Seja D um digrafo acíclico. Para cada vértice v , seja $f(v)$ o comprimento de um caminho máximo dentre os que têm origem v . Mostre que para todo arco uv tem-se $f(u) > f(v)$.
- 22.2.5 A prova do teorema T.8.4.1 que aparece no livro contém alguns pequenos erros e inconsistências. Refaça a prova corrigindo esses defeitos.
- 22.2.6 Mostre que todo digrafo simétrico planar tem uma orientação D tal que $\text{lp}(D) \leq 3$.
- 22.2.7 (E.8.20) Encontre uma orientação do grafo de Petersen que não tenha caminhos de comprimento 3. Use essa orientação para encontrar uma 3-coloração do digrafo. (Use a técnica da prova do teorema T.8.4.1.)

22.2.8 (E.8.21) A figura 22.1 representa o grafo de Grötzsch. Seja G o correspondente digrafo simétrico (cada aresta da figura representa um par de arcos anti-paralelos). Prove que toda orientação de G tem um caminho de comprimento 3. Encontre uma orientação D de G tal que $lp(D) = 3$. Prove que para qualquer aresta e de G existe uma orientação de $G - e$ sem caminhos de comprimento 3.

Capítulo 23

Orientações e reorientações fortes

23.1 O problema básico

Problema 7.2: Dado um digrafo simétrico¹ G , encontrar uma orientação de G que seja forte.

Problema 7.2.R: Dado um digrafo anti-simétrico D , encontrar uma reorientação de D que seja forte.

- Proposição: Se um digrafo simétrico G tem uma orientação forte então G é arco-2-forte (ou seja, $d^-(X) \geq 2$ para todo conjunto não-trivial X de vértices).
- **Teorema T.1.6.2 (Robbins, 1939):** Todo digrafo simétrico arco-2-forte tem uma orientação forte.
Prova: Decomposição em orelhas “especial” que evita ciclos triviais.²
- Proposição: Se um digrafo anti-simétrico D tem uma reorientação forte então D é fracamente arco-2-conexo (ou seja, $d^-(X) + d^+(X) \geq 2$ para todo conjunto não-trivial X de vértices).
- **Corolário de T.1.6.2:** Todo digrafo anti-simétrico fracamente arco-2-conexo tem uma reorientação forte.

Exercícios

23.1.1 Mostre que os problemas 7.2 e 7.2.R são equivalentes.

23.1.2 (E.8.60 –) Sejam x e y dois vértices de um digrafo simétrico G . Em que condições G admite uma orientação D tal que x e y pertencem ao mesmo componente forte de D ?

¹ Um digrafo simétrico é essencialmente o mesmo que um grafo.

² Um ciclo é *trivial* se tem comprimento 2.

23.1.3 Uma **ponte** (= *bridge*) num digrafo simétrico é uma aresta $\{uv, vu\}$ dotada da seguinte propriedade: existe um conjunto X de vértices tal que $(X, \bar{X}) = \{uv\}$ e $(\bar{X}, X) = \{vu\}$. Mostre que um digrafo simétrico G é arco-2-forte se e somente se G é forte e não tem pontes.

23.2 Orientações e reorientações arco- k -fortes

Problema 8.6 (orientação arco- k -forte): Dado um digrafo simétrico G e um número natural k , encontrar uma orientação de G que seja arco- k -forte.

Problema 8.6.R (reorientação arco- k -forte): Dado um digrafo anti-simétrico D e um número natural k , encontrar uma reorientação de D que seja arco- k -forte.

- Proposição: Se um digrafo simétrico G tem uma orientação arco- k -forte então G é arco- $2k$ -forte.
- **Teorema T.8.6.3 (Nash-Williams, 1960)**: Todo digrafo simétrico³ arco- $2k$ -forte tem uma orientação arco- k -forte.
Esse teorema é um caso particular do T.8.7.6, que estudaremos adiante.
- Corolário C.8.8.8 (Frank, 1982): Existe um algoritmo polinomial (puramente combinatório) que resolve o problema 8.6 (orientação arco- k -forte).

Exercícios

- 23.2.1 Suponha que um digrafo simétrico G tem uma orientação arco- k -forte. Mostre que G é arco- $2k$ -forte.
- 23.2.2 Mostre que o problema 8.6.R é equivalente ao problema 8.6.
- 23.2.3 (E.8.46) Seja D um digrafo arco- k -forte. Seja C um ciclo em D . Seja D' o digrafo que resulta da inversão de todos os arcos de C . Mostre que D' é arco- k -forte.
- 23.2.4 (E.8.47 +) Sejam D e D' orientações arco- k -fortes de um digrafo simétrico G . Suponha que $d_D^-(v) = d_{D'}^-(v)$ para todo vértice v . Mostre que D pode ser transformado em D' mediante sucessivas inversões de arcos de ciclos.
- 23.2.5 (E.8.48) Sejam D e D' orientações arco- k -fortes de um digrafo simétrico G . Suponha que $d_D^-(u) < d_{D'}^-(u)$ para algum vértice u . Mostre existe um vértice v tal que $d_D^-(v) > d_{D'}^-(v)$ e que existe um (u, v) -caminho P' em D' . Em que condições a inversão dos arcos de P' produz um digrafo arco- k -forte?
- 23.2.6 Mostre que o seguinte teorema é equivalente a T.8.6.3: Todo digrafo anti-simétrico D tal que $d^-(X) + d^+(X) \geq 2k$ para toda parte não-trivial X de $V(D)$ admite uma reorientação arco- k -forte. (Veja exercício 23.2.2.)

³ Também vale para multi-digrafos simétricos.

23.2.7 (Teorema T.9.5.5) Mostre que todo digrafo simétrico arco- $2k$ -forte tem k árvores geradoras duas a duas disjuntas. (Dica: use os teoremas T.8.6.3 (Nash-Williams) e T.9.5.1 (Edmonds).)

Capítulo 24

Orientações com restrições dos graus de vértices

$f[X]$ Notação: Se f é uma função de V em \mathbb{Z} e X é uma parte de V então $f[X] := \sum_{x \in X} f(x)$.¹

24.1 Restrição dos graus de vértices

Problema 8.7.1_a: Dado um digrafo simétrico² $G = (V, A)$ e uma função f de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo vértice v .

Problema 8.7.1_b: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função g de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

Problema 8.7.1: Dado um e digrafo simétrico $G = (V, A)$ e funções f e g de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $f(v) \leq d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

- Definição: Para qualquer digrafo simétrico $G = (V, A)$ e qualquer subconjunto X de V , seja $e_G(X)$ o número de arestas de G com pelo menos uma ponta em X e $i_G(X)$ o número de arestas de G com ambas as pontas em X . (Note que $i_G(X) + e_G(\bar{X})$ é igual ao número de arestas de G , ou seja, a $\frac{1}{2}|A|$, qualquer que seja X .)
- Proposição a: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e f uma função de V em \mathbb{Z} . Se existe uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo v então $e_G(X) \geq f[X]$ para todo $X \subseteq V$.
Proposição b: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e g uma função de V em \mathbb{Z} . Se existe uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo v então $i_G(X) \leq g[X]$ para todo $X \subseteq V$.
- Teorema T.8.7.3_a (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e f uma

¹ Eu prefiro não escrever “ $f(X)$ ” como faz o livro para evitar confusão no caso em que f é a função d^- .

² Convém lembrar que um digrafo simétrico é essencialmente o mesmo que um grafo.

função de V em \mathbb{Z} . Se $e_G(X) \geq f[X]$ para todo $X \subseteq V$ então existe uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo vértice v .

Teorema T.8.7.3_b (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e g uma função de V em \mathbb{Z} . Se $i_G(X) \leq g[X]$ para todo $X \subseteq V$ então existe uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

Teorema T.8.7.3 (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e f e g funções de V em \mathbb{Z} . Se $f \leq g$ e $e_G(X) \geq f[X]$ e $i_G(X) \leq g[X]$ para todo $X \subseteq V$ então existe uma orientação D de G tal que $f(v) \leq d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

A prova é simples.

- A prova de T.8.7.3 induz um algoritmo polinomial para o problema 8.7.1.

Exercícios

- 24.1.1 Prove as proposições a e b acima.
- 24.1.2 Interprete as condições $e_G(X) \geq f[X]$ e $i_G(X) \leq g[X]$ nos casos em que $|X| = 0$, $|X| = 1$, $|X| = n - 1$ e $|X| = n$.
- 24.1.3 O teorema T.8.7.3_a continua valendo se exigirmos $e_G(X) \geq f[X]$ apenas quando $X \neq V$?
- 24.1.4 A hipótese “ $f \leq g$ ” no enunciado de T.8.7.3 é necessária? Dê um exemplo (G, f, g) com a seguinte propriedade: existe uma orientação D' de G tal que $d_{D'}^-(v) \geq f$, existe uma orientação D'' de G tal que $d_{D''}^-(v) \leq g$, mas não existe uma orientação D de G tal que $f \leq d_D^-(v) \leq g$.
- 24.1.5 Resolva o seguinte problema: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função f de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^+(v) \geq f(v)$ para todo vértice v .
- 24.1.6 Mostre que problema 8.7.1_b equivale ao problema 8.7.1_a. Mostre que o teorema T.8.7.3_b é corolário de T.8.7.3_a.
- 24.1.7 Considere o seguinte problema: dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função a de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) = a(v)$ para todo v . Discuta em detalhe as diferenças e semelhanças entre esse problema e o problema do subdigrafo com dados graus (seção 9.3 deste Roteiro).
- 24.1.8 Considere o seguinte problema 8.7.1': dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função a de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) = a(v)$ para todo v . Use o teorema T.8.7.3 para mostrar que o problema 8.7.1' tem solução se e somente se $a[V] = \frac{1}{2}|A|$ e $i_G(X) \leq a[X]$ para todo $X \subseteq V$. (Essa condição equivale a $a[V] = \frac{1}{2}|A|$ e $e_G(X) \geq a[X]$ para todo X .)
- 24.1.9 Considere o seguinte problema 8.7.1': dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função a de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) = a(v)$ para todo v . Deduza do teorema T.3.8.4 de Gale (seção 7.5 deste Roteiro) condições necessárias e suficientes para que o problema 8.7.1' tenha solução. (Use a redução ao problema de b-fluxos esboçada no início da subseção §8.7.1 do livro.) Compare as condições obtidas com as do exercício 24.1.8.

- 24.1.10 Considere o seguinte problema: dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e funções a e b de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d_D^-(v) = a(v)$ e $d_D^+(v) = b(v)$ para todo v . De condições necessárias e suficientes para que o problema tenha solução. Procure formular as condições de maneira econômica, sem redundâncias.
- 24.1.11 Dê condições necessárias e suficientes para que um digrafo simétrico G tenha uma orientação D tal que $d_D^-(v) \geq 1$ e $d_D^+(v) \geq 1$ para todo vértice v . Procure dar condições simples e econômicas.
- 24.1.12 (Proposição P.9.5.8) Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e k um número natural. Mostre que G tem uma orientação D tal que $d_D^-(v) \leq k$ para cada vértice v se e somente se $i_G(X) \leq k|X|$ para toda parte X de V .
- 24.1.13 Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e sejam U e W partes de V tais que $U \cap W = \emptyset$. Em que condições G admite uma orientação em que todos os vértices de U são fontes e todos os vértices de W são sorvedouros?
- 24.1.14 (E.8.41 +) Prove o seguinte teorema T.8.7.1 (Landau, 1953): Seja $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ uma seqüência de números naturais. Existe um torneio com vértices $1, \dots, n$ tal que $d^-(i) = a_i$ para todo i se e somente se $\sum_{i=1}^k a_i \geq \binom{k}{2}$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$ e $\sum_{i=1}^n a_i = \binom{n}{2}$. (Sugestão: Veja exercício 24.1.8.)
- 24.1.15 (E.8.44) Deduza o teorema T.3.11.3 (Hall) do teorema T.8.7.3.
- 24.1.16 (E.8.42) Mostre como converter a prova do teorema T.8.7.3 em um algoritmo polinomial que receba G, f, g e devolva uma orientação apropriada de G ou mostre que uma tal orientação não existe.

24.2 Orientações fortes com restrição dos graus

Problema 8.7.1*_a: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função f de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo vértice v .

Problema 8.7.1*_b: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função g de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

Problema 8.7.1*: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e funções f e g de V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação forte D de G tal que $f(v) \leq d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo vértice v .

- $c(G)$
- Notação: O número de componentes fracas de um digrafo G é denotado por $c(G)$.
 - Proposição a: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e f uma função de V em \mathbb{Z} . Se existe uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo v então $e_G(V) \geq f[V]$ e $e_G(X) \geq f[X] + c(G-X)$ para toda parte não-trivial X de V .
Proposição b: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e g uma função de V em \mathbb{Z} . Se existe uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo v então $i_G(V) \leq g[V]$ e $i_G(X) + c(G-X) \leq g[X]$ para toda parte não-trivial X de V .
 - Teorema T.8.7.5_a (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico arco-2-forte. Seja f uma função de V em \mathbb{Z} . Se $e_G(V) \geq f[V]$ e $e_G(X) \geq f[X] + c(G-X)$

para toda parte não-trivial X de V então existe uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \geq f(v)$ para todo v .

Teorema T.8.7.5_b (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico arco-2-forte. Seja g uma função de V em \mathbb{Z} . Se $i_G(V) \leq g[V]$ e $i_G(X) + c(G-X) \leq g[X]$ para toda parte não-trivial X de V então existe uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo v .

Teorema T.8.7.5 (Frank–Gyárfás, 1978): Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico arco-2-forte. Sejam f e g duas funções de V em \mathbb{Z} tais que $f \leq g$. Se $e_G(V) \geq f[V]$ e $i_G(V) \leq g[V]$ e $e_G(X) \geq f[X] + c(G-X)$ e $i_G(X) + c(G-X) \leq g[X]$ para toda parte não-trivial X de V então existe uma orientação forte D de G tal que $f(v) \leq d_D^-(v) \leq g(v)$ para todo v .

O livro não dá a prova; mas ela não é muito diferente da prova de T.8.7.3.

Exercícios

- 24.2.1 Prove as proposições que precedem T.8.7.5 acima.
- 24.2.2 É verdade que T.8.7.5_a continua valendo sem a condição $e_G(V) \geq f[V]$? No teorema T.8.7.5_a, que sentido faz a expressão “ $e_G(X) \geq f[X] + c(G-X)$ ” quando $X = \emptyset$?
- 24.2.3 É verdade que T.8.7.5 continua valendo se a condição “ G é arco-2-forte” não for explicitamente imposta?
- 24.2.4 Dê condições necessárias e suficientes para que um digrafo simétrico G tenha uma orientação forte D tal que $d_D^-(v) \geq k$ para todo vértice v . Compare com as condições do teorema T.8.6.3 de Nash-Williams (note que os dois problemas são muito diferentes).
- 24.2.5 Deduza do teorema T.8.7.5_b: Todo digrafo simétrico arco-2-forte G admite uma orientação forte D de G tal que $d_D^-(v) \leq \lceil d_G^-(v)/2 \rceil$ para todo vértice v .

Capítulo 25

Orientações com restrições dos graus de conjuntos

Este capítulo dá um salto em abstração; ele generaliza o capítulo 24 ao introduzir restrições sobre os graus de entrada de conjuntos arbitrários de vértices.

25.1 O problema

Definição: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função h de 2^V em \mathbb{Z} , diremos que uma orientação D de G é h -boa se $d_D^-(X) \geq h(X)$ para todo X em 2^V .

Problema 8.7.2 ($d^- \geq h$): Dado um digrafo simétrico¹ $G = (V, A)$ e uma função h de 2^V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação h -boa de G .

Este problema é uma generalização do problema 8.6 (orientação arco- k -forte), do problema 8.7.1, do problema 8.7.1*, e de vários outros. (Veja exercícios 25.1.3, 25.1.4, 25.1.6 e 25.3.1.)

- $e_{\mathcal{F}}$
- Notação: Dada uma partição \mathcal{F} de V , seja $e_{\mathcal{F}}$ o número de arestas de G com pontas em elementos distintos de \mathcal{F} . Portanto, $e_{\mathcal{F}} := \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{F}} d_G^-(X)$.
 - Condições necessárias: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e h uma função de 2^V em \mathbb{Z} . Se G tem uma orientação h -boa então (a) $h(\emptyset) \leq 0$ e $h(V) \leq 0$, (b) $d_G^-(X) \geq h(X)$ para toda parte X de V , (c) $d_G^-(X) \geq h(X) + h(\bar{X})$ para toda parte X de V , (d) $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$ para toda partição \mathcal{F} de V e (e) $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(\bar{X})$ para toda partição \mathcal{F} de V . (Esses itens não são mutuamente independentes.)
- Só trataremos do caso em que $h \geq 0$. Nesse caso, (b) é conseqüência de (c) e $h(\emptyset) = h(V) = 0$.

¹ Um digrafo simétrico é essencialmente o mesmo que um grafo.

Exercícios

- 25.1.1 Prove as Condições necessárias acima.
- 25.1.2 Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e h uma função de 2^V em \mathbb{Z} . Suponha que $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$ para toda partição \mathcal{F} de V . Mostre que $d_G^-(X) \geq h(X) + h(\bar{X})$ para toda parte não-trivial X de 2^V .
- 25.1.3 (Problema 8.6) Mostre que o problema 8.6 (orientação arco- k -forte) é um caso particular do problema 8.7.2.
- 25.1.4 (Problema 8.7.1) Mostre que o problema 8.7.1_a é um caso particular do problema 8.7.2. (Sugestão: Defina $h(\{v\}) := f(v)$ para cada v em V e $h(X) := 0$ para cada parte não-unitária X de V .) Mostre que o problema 8.7.1_b é um caso particular do problema 8.7.2. (Sugestão: Defina $h(\{v\}) := d_G^-(v) - g(v)$ para cada v em V e $h(X) := d_G^-(X)$ para cada parte não-unitária X de V .)
- 25.1.5 Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e g uma função de V em \mathbb{Z} . Considere o problema 8.7.2 com h definida da seguinte maneira: $h(V \setminus \{v\}) := g(v)$ para cada v em V e $h(X) := 0$ para todo X tal que $|X| \neq |V| - 1$. É verdade que esse problema equivale ao problema 8.7.1_b?
- 25.1.6 (Out-branchings disjuntos) Considere o seguinte problema: dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$, um vértice s e um número k , encontrar uma orientação de G que tenha k out-branchings disjuntos, todos com raiz s . Mostre que esse problema é um caso particular do problema 8.7.2.
- 25.1.7 ($d^+ \geq h$) Considere o seguinte problema: Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função h de 2^V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D de G tal que $d^+(X) \geq h(X)$ para todo X em 2^V . Mostre que esse problema é equivalente ao problema 8.7.2.
- 25.1.8 ($d^- \leq h$) Considere o seguinte problema 8.7.2': Dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e uma função h' de 2^V em \mathbb{Z} , encontrar uma orientação D' de G tal que $d_{D'}^-(X) \leq h'(X)$ para todo X em 2^V . Esse problema é equivalente ao problema 8.7.2?
- 25.1.9 ($h \leq d^- \leq h'$) Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e h, h' duas funções de 2^V em \mathbb{Z} . Suponha que existe uma orientação D de G tal que $d_D^-(X) \geq h(X)$ para todo $X \subseteq V$. Suponha que existe uma orientação D' de G tal que $d_{D'}^-(X) \leq h'(X)$ para todo $X \subseteq V$. É verdade que existe uma orientação D'' de G tal que $h(X) \leq d_{D''}^-(X) \leq h'(X)$ para todo $X \subseteq V$?

25.2 Restrições leves

Notação: Se $G = (V, A)$ é um digrafo e S, T são partes de V , denotaremos por $d_G^+(S, T)$ o número de arcos de G que têm ponta inicial em S e ponta final em T .

Definição: Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e h uma função de 2^V em \mathbb{Z} . Para quaisquer X e Y em 2^V , a **desigualdade G -supermodular** é a relação $h(X \cup Y) + h(X \cap Y) + \zeta \geq h(X) + h(Y)$, onde $\zeta = d_G^+(X \setminus Y, Y \setminus X)$.

- Definição: Dizemos que uma função h de 2^V em \mathbb{Z} é **cruz- G -supermodular** (= *cross-*

sing G -supermodular) se a desigualdade G -supermodular vale para todo par X, Y de elementos de 2^V que se cruzam.

- **Teorema T.8.7.6_A (Frank, 1980):** Seja G um digrafo simétrico e h uma função cruz- G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Se $h \geq 0$ e $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$ e $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(\bar{X})$ para toda partição \mathcal{F} de V então G tem uma orientação h -boa.

Prova do teorema: mais tarde, depois de estudar fluxos submodulares.

- Os teoremas T.8.6.3 (Nash-Williams) e T.8.7.3_a (Frank–Gyárfás) são corolários de T.8.7.6_A. Acho que T.8.7.5 (Frank–Gyárfás) também é um corolário de T.8.7.6_A.
- Definição: Uma função h é **simétrica** se $h(\bar{X}) = h(X)$ para todo X .

Corolário 8.7.6_B de T.8.7.6_A: Seja G um digrafo simétrico e h uma função cruz- G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Se $h \geq 0$, h é simétrica, e $d_G^-(X) \geq 2h(X)$ para todo X em 2^V então G tem uma orientação h -boa.

O teorema T.8.6.3 (Nash-Williams) é corolário desse corolário.

Exercícios

- 25.2.1 Prove o corolário 8.7.6_B de T.8.7.6_A.
- 25.2.2 (E.8.51) Mostre que o teorema T.8.6.3 (Nash-Williams) é um caso especial de T.8.7.6 (Frank). (Veja exercício 25.1.3.)
- 25.2.3 (8.7.6 \Rightarrow 8.7.3) Deduza o teorema T.8.7.3_a (Frank–Gyárfás) de T.8.7.6_A. (Veja exercício 25.1.4.)
- 25.2.4 Dê um exemplo de um digrafo simétrico G e uma função cruz- G -supermodular h de 2^V em \mathbb{Z} tais que $h \geq 0$ e $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$ para toda partição \mathcal{F} de V mas G não tem uma orientação h -boa.
- 25.2.5 Seja G um digrafo simétrico e h uma função cruz- G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Seja D uma orientação de G . Para todo elemento não-trivial X de 2^V , seja $f(X) := d_D^-(X) - h(X)$. Mostre que f é submodular nos pares X, Y de conjuntos que se cruzam.
- 25.2.6 O teorema T.8.7.5 é corolário de T.8.7.6_A?
- 25.2.7 ($d^- \leq h$) Considere o problema 8.7.2' do exercício 25.1.8. Deduza o seguinte corolário do teorema T.8.7.6_A: Seja G um digrafo simétrico e h' uma função cruz- G -submodular de 2^V em \mathbb{Z} . Se $h'(X) \leq d_G^-(X)$ para todo X e $e_{\mathcal{F}} \leq \sum_{X \in \mathcal{F}} h'(X)$ e $e_{\mathcal{F}} \leq \sum_{X \in \mathcal{F}} h'(\bar{X})$ para toda partição \mathcal{F} de V então existe uma orientação D' de G tal que $d_{D'}^-(X) \leq h'(X)$ para todo X em 2^V .

25.3 Restrições mais pesadas

- Definição: Dizemos que uma função h de 2^V em \mathbb{Z} é **inter- G -supermodular** (= *intersecting G -supermodular*) se a desigualdade G -supermodular vale para todo par X, Y de elementos de 2^V que se interceptam.

- **Teorema T.8.7.6_C (Frank, 1980):** Seja G um digrafo simétrico e h uma função inter- G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Se $h \geq 0$ e $h(\emptyset) = 0$ e $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$ para toda partição \mathcal{F} de V então G tem uma orientação h -boa.

(Se aceitarmos partições com blocos vazios, a hipótese $h(\emptyset) = 0$ é supérflua: ela segue de $h \geq 0$ e $e_{\mathcal{F}} \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} h(X)$.)

Exercícios

- 25.3.1 (Interessante) Considere o seguinte problema: dado um digrafo simétrico $G = (V, A)$, um vértice s e um número k , encontrar uma orientação de G que tenha k out-branchings disjuntos, todos com raiz s . (Veja exercício 25.1.6.) Dê condições necessárias e suficientes para que o problema tenha solução.
- 25.3.2 (E.8.57 +) Seja s um vértice de um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e k um número natural. Prove diretamente (sem usar o teorema 8.7.6) que G admite uma orientação D tal que $d_D^+(X) \geq k$ para cada parte não-trivial X de $V \setminus \{s\}$ se e somente se $\sum_{1 \leq i < j \leq p} e(V_i, V_j) \geq k(p-1)$ para toda partição $\{V_1, \dots, V_p\}$ de V , sendo $e(V_i, V_j)$ o número de arestas com uma ponta em V_i e outra em V_j .
- 25.3.3 Seja s um vértice de um digrafo simétrico $G = (V, A)$ e seja k um número natural. Queremos uma orientação D de G que tenha k out-branchings disjuntos, todos com raiz s . É verdade que uma tal orientação existe se e somente se $d_G^-(X) \geq 2k$ para toda parte não-vazia X de $V \setminus \{s\}$?
- 25.3.4 Seja G um digrafo simétrico e s um vértice de G . Dê condições necessárias e suficientes para que G tenha uma orientação em que existe um s -out-branching e um s -in-branching mutuamente disjuntos.

25.4 Restrições ainda mais pesadas

- Definição: Dizemos que uma função h de 2^V em \mathbb{Z} é **plenamente G -supermodular** (= *fully G -supermodular*) se a desigualdade G -supermodular vale para todo par X, Y de elementos de 2^V .
- **Corolário 8.7.6_D de T.8.7.6_A (Frank, 1980):** Seja G um digrafo simétrico e h uma função plenamente G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Se $h \geq 0$ e $d_G^-(X) \geq h(X) + h(\bar{X})$ para todo X em 2^V então G tem uma orientação h -boa.²

Exercícios

- 25.4.1 Seja $G = (V, A)$ um digrafo simétrico e h uma função supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Mostre que h é plenamente G -supermodular.

² Veja exercício 25.4.2.

- 25.4.2 (Bom) Seja G um digrafo simétrico e h uma função plenamente G -supermodular de 2^V em \mathbb{Z} . Suponha que $h \geq 0$ e que $h(\emptyset) = h(V) = 0$. Mostre que $d_G^-(X) \geq h(X) + h(\overline{X})$ para toda parte X de V . Use isso para reescrever o enunciado do corolário 8.7.6_D.
- 25.4.3 Dê uma prova direta (ou seja, independente de T.8.7.6_A) do corolário 8.7.6_D.

Capítulo 26

Fluxos submodulares

Este capítulo dá um grande salto em abstração e generaliza os resultados dos capítulos 19, 23 e 25 deste Roteiro.

26.1 Fluxos com retenção restrita

Definição: Um **fluxo** num digrafo $D = (V, A)$ é qualquer função x de A em \mathbb{Q} . Um **fluxo inteiro** é qualquer função x de A em \mathbb{Z} . (Note que um fluxo pode ter valores negativos.)

Notação: Seja x um fluxo. O **efluxo** de x numa parte S de V é o número $x^+(S) := \sum_{a \in (S, \bar{S})} x(a)$. O **influxo** de x em S é o número $x^-(S) := \sum_{a \in (\bar{S}, S)} x(a)$. A **retenção** de x é a função x_+ definida por $x_+(S) := x^-(S) - x^+(S)$ para todo S em 2^V .

Problema 8.8 (fluxo submodular): Dado um digrafo¹ $D = (V, A)$, fluxos inteiros l e u ,² uma subcoleção \mathcal{F} de 2^V e uma função b de \mathcal{F} em \mathbb{Z} ,³ encontrar um fluxo inteiro x tal que $l \leq x \leq u$ e $x_+(S) \leq b(S)$ para cada S em \mathcal{F} .

Exemplo: Tome $\mathcal{F} := 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$ e $b(S) := d^-(S) - 3$ para cada S em \mathcal{F} . Encontre um fluxo inteiro x tal que $0 \leq x \leq 1$ e $x_+(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} .

- Definição: Um fluxo x (inteiro ou não) é **viável** se $l \leq x \leq u$ e $x_+(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} .

Notação: Seja $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ o conjunto de todos os fluxos viáveis em D . $\mathcal{P}()$

- O problema 8.8 pode ser formulado assim: Encontrar um fluxo inteiro em $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$.

¹ O digrafo não precisa ser simétrico.

² As funções l e u podem assumir valores negativos; mas em muitas aplicações temos simplesmente $l(a) = 0$ e $u(a) = 1$ para todo a em A .

³ A função b pode assumir valores negativos.

- Casos particulares do problema 8.8: o problema do b-fluxo viável inteiro numa rede (veja exercício 26.1.3), o problema 8.7.1, o problema 8.7.1*, o problema 8.6 (orientação arco- k -forte, veja exercício 26.1.4), o problema 8.7.2 ($d^- \geq h$), e vários outros.

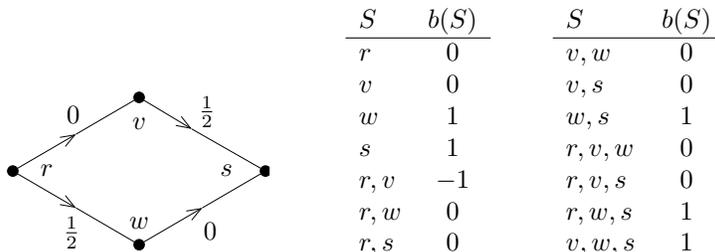


Figura 26.1: Fluxo x em $\mathcal{P}(D, 0, 1, \mathcal{F}, b)$, com $\mathcal{F} = 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$. Não existe fluxo inteiro em $\mathcal{P}(D, 0, 1, \mathcal{F}, b)$. Note que b não é cruz-submodular.

Exercícios

- 26.1.1 (E.8.52) (importante) Seja x um fluxo num digrafo (V, A) . Mostre que as funções x^- e x^+ são submodulares. Mostre que x_+^- é modular.
- 26.1.2 (Importante) Seja x um fluxo num digrafo D . Mostre que $x_+^-(S) = \sum_{s \in S} x_+^-(\{s\})$ para todo S . Mostre que $x_+^-(X_1 \cup \dots \cup X_t) = x_+^-(X_1) + \dots + x_+^-(X_t)$ para toda subpartição⁴ $\{X_1, \dots, X_t\}$ de V .
- 26.1.3 (b-fluxo em redes) Mostre que o problema do b-fluxo viável inteiro numa rede (veja seção 7.5 deste Roteiro) é um caso particular do problema 8.8. (Dica: cuide do caso $\sum_{v \in V} b(v) = 0$; os demais casos não têm solução.)
- 26.1.4 (Problema 8.6) Mostre que o problema 8.6 (orientação arco- k -forte) é um caso particular do problema 8.8. (Dica: Transforme o problema da orientação de digrafos simétricos num problema de reorientação de digrafos anti-simétricos.)
- 26.1.5 ($x_-^+ \leq b$) Considere o problema 8.8' que se obtém quando trocamos " $x_+^-(S) \leq b(S)$ " por " $x_-^+(S) \leq b(S)$ " no enunciado do problema 8.8. (A função x_-^+ é definida da maneira óbvia: $x_-^+(S) := x^+(S) - x^-(S)$.) Mostre que os dois problemas são equivalentes.
- 26.1.6 ($x_+^- \geq b$) Considere o problema 8.8" que se obtém quando trocamos " $\leq b(S)$ " por " $\geq b(S)$ " no enunciado do problema 8.8. Mostre que os dois problemas são equivalentes.
- 26.1.7 ($x_+^- = b$) Considere o problema que se obtém quando trocamos " $\leq b(S)$ " por " $= b(S)$ " no enunciado do problema 8.8. Discuta esse novo problema. Ele é equivalente ao problema 8.8?

⁴ Uma **subpartição** de V é uma coleção disjunta de partes de V .

26.2 Relaxação do problema: condições necessárias

A **relaxação** do problema 8.8 é o resultado da substituição de “encontrar um fluxo inteiro” por “encontrar um fluxo” no enunciado do problema 8.8. A relaxação do problema 8.8 consiste, essencialmente, em decidir se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ é vazio.

Uma condição necessária óbvia para que $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não seja vazio é $l \leq u$. Há outras condições necessárias menos óbvias:

- **Condição necessária A:** Se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então $l^-(S) - u^+(S) \leq b(S)$ para cada S em \mathcal{F} .
- **Condição necessária B:** Se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então $l^-(X_1 \cup \dots \cup X_t) - u^+(X_1 \cup \dots \cup X_t) \leq b(X_1) + \dots + b(X_t)$ para qualquer subcoleção disjunta $\{X_1, \dots, X_t\}$ de \mathcal{F} .
- **Condição necessária C:** Se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então $l^-(Y_1 \cap \dots \cap Y_t) - u^+(Y_1 \cap \dots \cap Y_t) \leq b(Y_1) + \dots + b(Y_t)$ para qualquer subcoleção co-disjunta $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ de \mathcal{F} .
- **Condição necessária D:** Se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então $l^-(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) - u^+(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) \leq b[\mathcal{Y}_1] + \dots + b[\mathcal{Y}_t]$,⁵ para quaisquer subcoleções $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_t$ de \mathcal{F} tais que cada \mathcal{Y}_i é co-disjunta e $\bigcap \mathcal{Y}_i \cap \bigcap \mathcal{Y}_j = \emptyset$ quando $i \neq j$.

Aqui, $b[\mathcal{Y}_i]$ denota a soma $\sum_{Y \in \mathcal{Y}_i} b(Y)$.

$b[\mathcal{Y}_i]$

- Uma observação que pode ser útil: Se \mathcal{Y} é uma subcoleção co-disjunta de \mathcal{F} então $\{\bigcap \mathcal{Y}\} \cup \{\bar{Y} : Y \in \mathcal{Y}\}$ é uma partição de V . Reciprocamente, para qualquer partição \mathcal{X} de V e qualquer elemento Z de \mathcal{X} , a coleção $\{\bar{X} : X \in \mathcal{X}, X \neq Z\}$ é co-disjunta e $Z = \bigcap_{X \in \mathcal{X}, X \neq Z} \bar{X}$.

Exercícios

- 26.2.1 Prove a condição necessária A. Em particular, mostre que $b(S) \geq 0$ sempre que $S \in \mathcal{F}$ e $d^-(S) = d^+(S) = 0$.
- 26.2.2 Prove que a condição necessária A é um caso particular da condição necessária B. Prove que a condição necessária A é um caso particular da condição necessária C. Prove que a condição necessária B é um caso particular da condição necessária D. Prove que a condição necessária C é um caso particular da condição necessária D.
- 26.2.3 Prove a condição necessária B. Essa condição vale para qualquer subcoleção $\{X_1, \dots, X_t\}$ de \mathcal{F} ? (Veja exercício 26.1.2.)
- 26.2.4 Prove a condição necessária C.
- 26.2.5 Prove a condição necessária D.
- 26.2.6 Suponha que o par (\mathcal{F}, b) tem a seguinte propriedade: para qualquer subcoleção disjunta $\{X_1, \dots, X_t\}$ de \mathcal{F} , o conjunto $X_1 \cup \dots \cup X_t$ está em \mathcal{F} e $b(X_1 \cup \dots \cup X_t) \leq$

⁵ Se $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_p\}$ então $\bigcap \mathcal{Y}$ denota o conjunto $Y_1 \cap \dots \cap Y_p$.

$b(X_1) + \dots + b(X_t)$. Mostre que a condição necessária B é consequência da condição necessária A.

26.2.7 Suponha que o par (\mathcal{F}, b) tem a seguinte propriedade: para qualquer subcoleção co-disjunta $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ de \mathcal{F} , o conjunto $Y_1 \cap \dots \cap Y_t$ está em \mathcal{F} e $b(Y_1 \cap \dots \cap Y_t) \leq b(Y_1) + \dots + b(Y_t)$. Mostre que a condição necessária C é consequência da condição necessária A.

26.2.8 Suponha que o par (\mathcal{F}, b) tem a seguinte propriedade: para quaisquer subcoleções co-disjuntas $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_t$ de \mathcal{F} tais que $\bigcap \mathcal{Y}_i \cap \bigcap \mathcal{Y}_j = \emptyset$ quando $i \neq j$, tem-se $\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t \in \mathcal{F}$ e $b(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) \leq \sum_{i=1}^t \sum_{Y \in \mathcal{Y}_i} b(Y)$. Mostre que a condição necessária D é consequência da condição necessária B.

26.2.9 (+) Seja $D = (V, A)$ um digrafo e k um número natural. Seja $\mathcal{F} := 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$ e $b(S) := d^-(S) - k$ para todo S em \mathcal{F} . Suponha que $d^-(S) + d^+(S) \geq 2k$ para todo S em \mathcal{F} . (a) Mostre que $-d^+(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} . (b) Mostre que $-d^+(X_1 \cup \dots \cup X_t) \leq b(X_1) + \dots + b(X_t)$ para toda subcoleção disjunta $\{X_1, \dots, X_t\}$ de \mathcal{F} . (c) Mostre que $-d^+(Y_1 \cap \dots \cap Y_t) \leq b(Y_1) + \dots + b(Y_t)$ para toda subcoleção co-disjunta $\{Y_1, \dots, Y_t\}$ de \mathcal{F} . (d) Mostre que $-d^+(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) \leq b[\mathcal{Y}_1] + \dots + b[\mathcal{Y}_t]$, para quaisquer subcoleções $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_t$ de \mathcal{F} tais que cada \mathcal{Y}_i é co-disjunta e $\bigcap \mathcal{Y}_i \cap \bigcap \mathcal{Y}_j = \emptyset$ quando $i \neq j$.

26.3 Fluxos submodulares

Seja \mathcal{F} uma subcoleção de 2^V e b uma função de \mathcal{F} em \mathbb{Z} .

- Definição: O par (\mathcal{F}, b) é **plenamente submodular** (= *fully submodular*) se, para todo par X, Y de elementos de \mathcal{F} , os conjuntos $X \cup Y$ e $X \cap Y$ estão em \mathcal{F} e $b(X \cup Y) + b(X \cap Y) \leq b(X) + b(Y)$.

Exemplo: Se $\mathcal{F} = 2^V$ e $b(S) = \sum_{s \in S} b(\{s\})$ para cada $S \subseteq V$ então (\mathcal{F}, b) é plenamente submodular.

- Definição: O par (\mathcal{F}, b) é **inter-submodular** (= *intersecting submodular*) se, para todo par X, Y de elementos de \mathcal{F} que se interceptam, $X \cup Y$ e $X \cap Y$ estão em \mathcal{F} e $b(X \cup Y) + b(X \cap Y) \leq b(X) + b(Y)$.
- Definição: O par (\mathcal{F}, b) é **cruz-submodular** (= *crossing submodular*) se, para todo par X, Y de elementos de \mathcal{F} que se cruzam, $X \cup Y$ e $X \cap Y$ estão em \mathcal{F} e $b(X \cup Y) + b(X \cap Y) \leq b(X) + b(Y)$.
- Definição: Se o par (\mathcal{F}, b) é plenamente, inter- ou cruz-submodular e x é um fluxo tal que $x_+(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} , dizemos que x é um **fluxo submodular** (= *submodular flow*).

Exercícios

- 26.3.1 Seja $\mathcal{F} := \{\emptyset, V\}$ e b uma função de \mathcal{F} em \mathbb{Z} . Mostre que (\mathcal{F}, b) é plenamente submodular.
- 26.3.2 Seja $\mathcal{F} := \{\{v\} : v \in V\}$ e seja b uma função de \mathcal{F} em \mathbb{Z} . O par (\mathcal{F}, b) é plenamente submodular?
- 26.3.3 Se (\mathcal{F}, b) é um par plenamente submodular, é verdade que, em geral, $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $V \in \mathcal{F}$? Se (\mathcal{F}, b) é um par inter-submodular, é verdade que, em geral, $V \in \mathcal{F}$? Explique.
- 26.3.4 Seja (V, A) um digrafo e b uma função de 2^V em \mathbb{Z} . Suponha que $b(S) = \sum_{s \in S} b(\{s\})$ para cada $S \subseteq V$. Mostre que o par $(2^V, b)$ é plenamente submodular. A restrição de b a $2^V \setminus \{\emptyset, V\}$ também é plenamente submodular?
- 26.3.5 Seja (\mathcal{F}, b) um par plenamente submodular. Suponha que $\emptyset \in \mathcal{F}$ e $b(\emptyset) \geq 0$. Mostre que a condição necessária B decorre da condição necessária A.
- 26.3.6 Seja (\mathcal{F}, b) um par plenamente submodular. Suponha que $V \in \mathcal{F}$ e $b(V) \geq 0$. Mostre que a condição necessária C decorre da condição necessária A.

26.4 O teorema de Edmonds–Giles

- **Teorema T.8.8.1 (Edmonds–Giles, 1977), versão simplificada:**⁶ Seja $D = (V, A)$ um digrafo e sejam l e u dois fluxos inteiros. Seja (\mathcal{F}, b) um par cruz-submodular. Se existe um fluxo x tal que $l \leq x \leq u$ e $x_+^-(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} então também existe um tal fluxo inteiro.

Em outras palavras, se (\mathcal{F}, b) é cruz-submodular e $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então o problema 8.8 tem solução.

Prova: veja Schrijver [Sch03].

Exemplo: veja figura 26.1.

- Conseqüência de T.8.8.1: para resolver o problema 8.8, basta encontrar condições suficientes para que $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ seja não-vazio. A seção seguinte discute tais condições.

Exercícios

- 26.4.1 (T.8.8.1 \Rightarrow T.8.6.3) Mostre que o teorema T.8.6.3 (Nash-Williams) é corolário de T.8.8.1.
- 26.4.2 Mostre que a hipótese “ (\mathcal{F}, b) é cruz-submodular” é essencial em T.8.8.1.
- 26.4.3 Adapte o enunciado de T.8.8.1 depois de trocar “submodular” por “supermodular”. Adapte o enunciado de T.8.8.1 depois de trocar “ $x_+^-(S) \leq b(S)$ ” por “ $x_+^+(S) \leq b(S)$ ”. Adapte o enunciado de T.8.8.1 depois de trocar “ $x_+^-(S) \leq b(S)$ ” por “ $x_+^-(S) \geq b(S)$ ”. Em cada caso, prove a versão adaptada a partir de T.8.8.1.

⁶ Isto é apenas um corolário do célebre teorema de Edmonds–Giles. Segundo aquele teorema, se $l \leq u$ e (\mathcal{F}, b) é cruz-submodular então o sistema $\langle l \leq x \leq u, x_+^-(S) \leq b(S), S \in \mathcal{F} \rangle$ é TDI (= *totally dual integral*).

26.5 Condições de existência para fluxos submodulares

- **Teorema T.8.8.3 (Frank, 1982):** Seja $D = (V, A)$ um digrafo e l, u dois fluxos inteiros tais que $l \leq u$. Seja (\mathcal{F}, b) um par plenamente submodular. Se $l^-(S) - u^+(S) \leq b(S)$ para cada S em \mathcal{F} então $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio.

Este teorema combinado com T.8.8.1 dá condições suficientes para existência de solução do problema 8.8.

- **Teorema T.8.8.4 (Frank, 1984):** Seja $D = (V, A)$ um digrafo e l, u dois fluxos inteiros tais que $l \leq u$. Seja (\mathcal{F}, b) um par inter-submodular. Se $l^-(X_1 \cup \dots \cup X_t) - u^+(X_1 \cup \dots \cup X_t) \leq b(X_1) + \dots + b(X_t)$ para toda subcoleção disjunta $\{X_1, \dots, X_t\}$ de \mathcal{F} então $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio.

O livro não dá a prova.

- **Teorema T.8.8.5 (Frank, 1984):** Seja $D = (V, A)$ um digrafo e l, u dois fluxos inteiros tais que $l \leq u$. Seja (\mathcal{F}, b) um par cruz-submodular. Se $l^-(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) - u^+(\bigcap \mathcal{Y}_1 \cup \dots \cup \bigcap \mathcal{Y}_t) \leq b[\mathcal{Y}_1] + \dots + b[\mathcal{Y}_t]$, para quaisquer subcoleções $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_t$ de \mathcal{F} tais que cada \mathcal{Y}_i é co-disjunta e $\bigcap \mathcal{Y}_i \cap \bigcap \mathcal{Y}_j = \emptyset$ quando $i \neq j$ então $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio.

O livro não dá a prova.

Exercícios

- 26.5.1 (T.8.8.3 \Rightarrow T.3.8.2) Deduza de T.8.8.3 o teorema de Hoffman T.3.8.2. (Veja exercício 26.1.3.)
- 26.5.2 (T.8.8.3 \Rightarrow T.3.8.3+3.8.4) Deduza de T.8.8.3 os teoremas de Gale T.3.8.3 e T.3.8.4. (Veja exercício 26.1.3.)
- 26.5.3 Enuncie a variante de T.8.8.3 que tem “supermodular” no lugar “submodular”. Enuncie a variante de T.8.8.3 que tem “ $x_+^-(S) \leq b(S)$ ” no lugar de “ $x_+^-(S) \leq b(S)$ ”. Enuncie a variante de T.8.8.3 que tem “ $x_+^-(S) \geq b(S)$ ” no lugar de “ $x_+^-(S) \leq b(S)$ ”. Mostre que cada uma das variantes decorre de T.8.8.3.
- 26.5.4 Considere o seguinte problema: dado um digrafo $D = (V, A)$, um vértice s e um número k , encontrar uma reorientação de D que tenha k out-branchings disjuntos, todos com raiz s . (Veja exercício 25.1.6 e exercício 25.3.1.) Dê condições necessárias e suficientes para que o problema tenha solução. (Dica: Use T.8.8.4.)
- 26.5.5 (T.8.8.5 \Rightarrow T.8.6.3) Deduza T.8.6.3 (Nash-Williams) de T.8.8.5. (Veja exercício 26.4.1. Alternativamente, veja exercício 26.2.9.)
- 26.5.6 (E.8.66) (T.8.8.5 \Rightarrow T.8.7.6) Deduza o teorema T.8.7.6_D (Frank) de T.8.8.3. Deduza o teorema T.8.7.6_C (Frank) de T.8.8.4. Deduza o teorema T.8.7.6_A (Frank) de T.8.8.5. (Esse último é uma generalização de exercício 26.5.5.)
- 26.5.7 Mostre que as condições de T.8.8.4 não são suficientes para provar T.8.8.5.

26.6 Fluxo submodular de custo mínimo

Problema 8.8*: Dado um fluxo c em D ,⁷ encontrar x em $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ que seja inteiro e minimize cx .⁸

- A **relaxação** do problema 8.8* consiste em encontrar x em $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ que minimize cx . Essa relaxação tem solução se e somente se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio.⁹
- **Teorema T.8.8.1 (Edmonds–Giles, 1977) generalizado:**¹⁰ Seja $D = (V, A)$ um digrafo e l, u dois fluxos inteiros tais que $l \leq u$. Seja c um terceiro fluxo. Seja (\mathcal{F}, b) um par cruz-submodular. Se $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ não é vazio então existe um fluxo inteiro x em $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ que minimiza cx . Se, além disso, c é inteiro então o dual do problema de minimizar cx sob as restrições $l \leq x \leq u$ e $x_+^-(S) \leq b(S)$ para todo S em \mathcal{F} tem uma solução inteira.^{11 12}

Exercícios

26.6.1 Prove o teorema T.7.15.2 (Lucchesi–Younger) a partir do teorema T.8.8.1 (Edmonds–Giles).

⁷ O fluxo c será interpretado como *custo*: para cada arco a , o número $c(a)$ é o custo de a .

⁸ A expressão cx é uma abreviatura de $\sum_{a \in A} c(a)x(a)$.

⁹ Como $l \leq x \leq u$, o conjunto $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ é limitado por baixo, isto é, existe um número L tal que $cx \geq L$ para todo x em $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$. Se l tivesse valores em $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ e u tivesse valores em $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, seria necessário exigir explicitamente que $\mathcal{P}(D, l, u, \mathcal{F}, b)$ seja limitado por baixo para garantir a existência de solução.

¹⁰ Esta é uma generalização da nossa versão anterior de T.8.8.1. A versão anterior corresponde ao caso $c = 0$ desta.

¹¹ O problema dual tem solução porque \mathcal{P} não é vazio e cx é limitado por baixo (uma vez que $l \leq x \leq u$).

¹² A versão completa de T.8.8.1 é ainda mais geral: ela conclui que o sistema $(l \leq x \leq u, x_+^-(S) \leq b(S), S \in \mathcal{F})$ é TDI (= *totally dual integral*).

Capítulo 27

Fluxo inteiro nenhures nulo

(Veja verbete [Nowhere-zero flows](#) na Wikipedia.) Este capítulo trata, implicitamente, de certas orientações de digrafos simétricos.¹

Definição: Um **fluxo inteiro nenhures nulo** (= *nowhere-zero flow*) num digrafo simétrico G é uma circulação² x em G , com valores em \mathbb{Z}_{\geq} , tal que $x(uv) - x(vu) \neq 0$ para toda aresta $\{uv, vu\}$.

- Uma **ponte** (= *bridge*) num digrafo simétrico é uma aresta $\{uv, vu\}$ dotada da seguinte propriedade: existe um conjunto X de vértices tal que $(X, \bar{X}) = \{uv\}$ e $(\bar{X}, X) = \{vu\}$. Todo digrafo simétrico fracamente conexo sem pontes é arco-2-forte.

Fato A: Se um digrafo simétrico tem uma ponte então não tem fluxo nenhures nulo.

Fato B: Todo digrafo simétrico sem pontes admite um fluxo nenhures nulo.

Corolário: Todo digrafo simétrico arco-2-forte admite um fluxo nenhures nulo.

- Definição: Seja x um fluxo nenhures nulo num digrafo simétrico $G = (V, A)$. Seja A_x o conjunto de $\{uv \in A : x(uv) > x(vu)\}$. Diremos que $G_x := (V, A_x)$ é o **digrafo-suporte** de x . É claro que G_x é uma orientação de G .
- Definição: Se x é um fluxo num digrafo simétrico então a **normalização** de x é o fluxo \dot{x} definido da seguinte maneira: para cada aresta $\{uv, vu\}$, se $x(uv) > x(vu)$ então $\dot{x}(uv) = x(uv) - x(vu)$ e $\dot{x}(vu) = 0$.

Fato: Se x é um fluxo nenhures nulo num digrafo simétrico G então a normalização \dot{x} de x também é um fluxo nenhures nulo em G . Ademais, a restrição de \dot{x} ao digrafo-suporte G_x de G é uma circulação e $\dot{x}(a) > 0$ para todo arco a de G_x .

¹ Convém lembrar que digrafos simétricos são essencialmente o mesmo que grafos.

² Uma *circulação* é um fluxo x tal que $x^-(v) = x^+(v)$ para todo vértice v .

Exercícios

- 27.0.1 Mostre que um digrafo simétrico tem um fluxo nenhures nulo se e somente se cada uma de suas componentes fracas tem um tal fluxo.
- 27.0.2 Prove os fatos A e B acima.
- 27.0.3 (E.8.22) Suponha que um digrafo simétrico G tem um fluxo nenhures nulo x . Mostre que o digrafo-suporte de x é forte.

27.1 k -Fluxo nenhures nulo

Definição: Para qualquer inteiro positivo k , um k -fluxo nenhures nulo (= *nowhere-zero k -flow*) num digrafo simétrico é um fluxo nenhures nulo com valores em $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Seja x um k -fluxo nenhures nulo num digrafo simétrico G e seja \hat{x} a normalização de x . A restrição de \hat{x} ao digrafo-suporte G_x tem valores em $\{1, \dots, k-1\}$.

Problema 8.5: Dado um digrafo simétrico G e um inteiro positivo k , encontrar um k -fluxo nenhures nulo em G .

Motivação: Veja abaixo a conjectura de Tutte sobre 5-fluxos nenhures nulos.

- **Proposição P.8.5.1** (folclore, importante): Um digrafo simétrico G tem um 2-fluxo nenhures nulo se e somente se $d_G^-(v)$ é par para todo vértice v de G .
- Proposição P.8.5.4 (folclore): Um digrafo simétrico 3-regular³ tem um 3-fluxo nenhures nulo se e somente se G é bipartido.

(Veja exercício exercício 27.1.2.)

- Definição: Uma j -coloração das arestas de um digrafo simétrico G é uma coleção G_1, \dots, G_j de subdigrafos simétricos de G tal que $A(G_1) \cup \dots \cup A(G_j) = A(G)$ e $d_{G_i}^-(v) \leq 1$ para cada i e cada vértice v .⁴

Teorema T.8.5.5 (folclore): Um digrafo simétrico 3-regular G tem um 4-fluxo nenhures nulo se e somente se G tem uma 3-coloração das arestas.

(Veja exercício 27.1.4.)

- **Teorema T.8.5.6** (folclore): Um digrafo simétrico $G = (V, A)$ tem um 4-fluxo nenhures nulo se e somente se G tem dois subdigrafos simétricos $G_1 = (V, A_1)$ e $G_2 = (V, A_2)$ tais que $A_1 \cup A_2 = A$ e $d_{G_i}^-(v)$ é par para cada v e cada i .

(Veja exercício E.8.28.)

³ Todo o vértice v é tal que $d^-(v) = d^+(v) = 3$.

⁴ É evidente que nenhum digrafo simétrico admite uma $(\Delta-1)$ -coloração das arestas, sendo $\Delta := \max\{d^-(v) : v \in V\}$. Como se sabe, todo digrafo simétrico admite uma Δ -coloração ou uma $(\Delta+1)$ -coloração das arestas.

Exercícios

- 27.1.1 (Definição alternativa de k -fluxo nenhures nulo) Mostre que o problema 8.5 é equivalente ao seguinte: dado um digrafo anti-simétrico $D = (V, A)$ e um inteiro positivo k , encontrar uma circulação inteira x em D tal que $x(a) \neq 0$ e $1 - k \leq x(a) \leq k - 1$ para todo a em A .
- 27.1.2 Prove a proposição P.8.5.4 (sem recorrer ao conceito de mod- k -fluxo).
- 27.1.3 (E.8.26) Encontre um 4-fluxo nenhures nulo no digrafo simétrico da figura 8.17 (p.470) do livro.
- 27.1.4 Prove o teorema T.8.5.5 (sem recorrer ao conceito de mod- k -fluxo).
- 27.1.5 (E.8.29) Mostre (sem recorrer ao conceito de mod- k -fluxo) que o digrafo completo sobre 4 vértices admite uma 3-coloração das arestas mas não tem um 3-fluxo nenhures nulo.
- 27.1.6 (E.8.28 +) Prove o teorema T.8.5.6 (sem recorrer ao conceito de mod- k -fluxo).
- 27.1.7 (E.8.27) Um **mod- k -fluxo nenhures nulo** (também conhecido como \mathbb{Z}_k -**fluxo nenhures nulo**) em um digrafo simétrico G é um fluxo x em G com valores em $\{0, 1, \dots, k-1\}$ tal que $x(uv) - x(vu) \neq 0$ para toda aresta $\{uv, vu\}$ e $x^-(v) \equiv x^+(v) \pmod{k}$ para todo vértice v . A figura 8.18 (p.470) do livro define um mod-5-fluxo nenhures nulo x no grafo de Petersen. A partir de x , construa um 5-fluxo nenhures nulo no grafo.

27.2 5-Fluxo nenhures nulo e a conjectura de Tutte

- **Conjetura Cnj.8.5.8 (Tutte, 1954):** Todo digrafo⁵ simétrico arco-2-forte tem um 5-fluxo nenhures nulo.

Esta é uma generalização do teorema das 4 cores.⁶

- Teorema (Jaeger, 1976): Todo digrafo⁷ simétrico arco-2-forte tem um 8-fluxo nenhures nulo.
- **Teorema T.8.5.10 (Seymour, 1981):** Todo digrafo⁸ simétrico arco-2-forte tem um 6-fluxo nenhures nulo.

O livro não dá a prova (mas ela é muito interessante).

⁵ Também se aplica a multi-digrafos.

⁶ Mais precisamente, a generalização do teorema das 4 cores é a seguinte **conjetura do 4-fluxo**: todo digrafo simétrico arco-2-forte sem *Petersen minor* tem um 4-fluxo nenhures nulo.

⁷ Também vale para multi-digrafos.

⁸ Também vale para multi-digrafos.

Exercícios

- 27.2.1 (E.8.30 +) Seja G um digrafo simétrico arco-3-forte. Mostre que G tem subdigrafos geradores simétricos T_1 , T_2 e T_3 tais que (1) cada T_i é uma árvore⁹ e (2) nenhuma das arestas de G pertence às três árvores. (Dica: Use o teorema T.9.5.5. Veja exercício 23.2.7.)
- 27.2.2 (E.8.31 +) (Teorema de Jaeger, 1976) Mostre (sem recorrer ao conceito de mod- k -fluxo) que todo digrafo simétrico arco-2-forte tem um 8-fluxo nenhures nulo. (Sugestão: Basta provar o teorema para digrafos simétricos arco-3-fortes. Use o resultado do exercício E.8.30 para construir um 8-fluxo nenhures nulo. Compare com a prova de T.8.5.7.)

⁹ Veja nossa definição de árvore na seção 1.2.

Capítulo 28

Ciclos disjuntos e realimentação

28.1 Ciclos disjuntos

- Definição: Uma coleção de ciclos num digrafo é **disjunta** se cada vértice do digrafo pertence a no máximo um dos ciclos.

Problema 10.3: Dado um digrafo D , encontrar uma coleção disjunta máxima de ciclos.

- Teorema T.10.3.4 (folclore?): O problema 10.3 é NP-difícil.

$\nu_0(D)$

- Notação: Denota-se por $\nu_0(D)$ a cardinalidade de um coleção disjunta máxima de ciclos.

28.2 Realimentação de vértices

- Definição: Um **retorno de vértices**, ou **realimentação de vértices** (= *feedback vertex set*), de um digrafo $D = (V, A)$ é uma parte S de V tal que $D - S$ é acíclico.

Problema FVS (*feedback vertex set*): Dado um digrafo D , encontrar um retorno de vértices mínimo.

$\tau_0(D)$

- Notação: Denota-se por $\tau_0(D)$ a cardinalidade de um retorno de vértices mínimo.

Proposição: Para qualquer digrafo D , $\nu_0(D) \leq \tau_0(D)$.

- Teorema T.10.3.2 (Karp, 1972): O problema FVS é NP-difícil.

Teorema T.10.3.3 (Bang-Jensen–Thomassen, 1992): A restrição do problema FVS a torneios é NP-difícil.

- Teorema T.10.3.5 (Alon, 1996): Se $\delta^+(D) \geq 64k$ então $\nu_0(D) \geq k$.

O livro não dá as provas.

28.3 Ciclos arco-disjuntos

- Definição: Uma coleção de ciclos num digrafo é **arco-disjunta** se cada arco do digrafo pertence a no máximo um dos ciclos.

Problema 10.3-A: Dado um digrafo D , encontrar uma coleção arco-disjunta máxima de ciclos.

- Proposição P.10.3.1: O problema 10.3-A é polinomialmente equivalente ao problema 10.3.

Teorema T.10.3.4 (folclore?): O problema 10.3-A é NP-difícil.

- Notação: Denota-se por $\nu_1(D)$ a cardinalidade de um coleção arco-disjunta máxima de ciclos. $\nu_1(D)$

28.4 Realimentação de arcos

- Definição: Um **retorno de arcos**, ou **realimentação de arcos** (= *feedback arc set*), de um digrafo $D = (V, A)$ é uma parte F de A tal que $D - F$ é acíclico.

Problema FAS (*feedback arc set*): Dado um digrafo D , encontrar um retorno de arcos mínimo.

- Notação: Denota-se por $\tau_1(D)$ a cardinalidade de um retorno de arcos mínimo. $\tau_1(D)$

Proposição: Para qualquer digrafo D , $\nu_1(D) \leq \tau_1(D)$.

- Proposição P.10.3.1: O problema FAS é polinomialmente equivalente ao problema FVS.

Teorema T.10.3.2 (Karp, 1972): O problema FAS é NP-difícil.

Teorema 10.4.4: O problema FAS restrito a torneios é NP-difícil.

- Corolário C.10.3.6 (de T.10.3.5): Todo digrafo D com $\delta^+(D) \geq k$ tem $\nu_1(D) \geq k^2/128$.

Prova: Exercício 28.4.2.

- Problema 10.3.3 (do subdigrafo acíclico máximo): Dado um digrafo D , encontrar um subdigrafo acíclico de D que tenha o maior número possível de arcos.

O problema é equivalente a FAS. (Exercício 28.4.1.)

- Teorema T.10.3.15 (Lucchesi–Younger, 1976): Existe um algoritmo polinomial para a restrição do problema FAS a digrafos planares.

Prova segue de C.8.8.10, que por sua vez segue de T.7.15.2

Corolário C.10.3.16 (Lucchesi–Younger, 1976): Em todo digrafo planar D tem-se $\nu_1(D) = \tau_1(D)$.

Exercícios

- 28.4.1 (E.10.14 –) Considere o problema de encontrar um subdigrafo acíclico máximo de um digrafo D . Mostre que esse problema equivale a encontrar uma permutação v_1, \dots, v_n de $V(D)$ que minimize o número de arcos $v_i v_j$ tais que $i > j$.
- 28.4.2 (E.10.23) Prove o corolário C.10.3.6. Dica: Mostre que se $\delta^+(D) \geq k$ então D tem pelo menos $k/64$ ciclos disjuntos. Remova os arcos desses ciclos e continue recursivamente.

28.5 Prova da conjectura de Younger

- Conjetura (Younger, 1973): Para todo k existe um número t_0 tal que todo digrafo D tem $\nu_0(D) \geq k$ ou $\tau_0(D) \leq t_0$. Para todo k existe um número t_1 tal que todo digrafo D tem $\nu_1(D) \geq k$ ou $\tau_1(D) \leq t_1$.

As duas partes da conjectura são equivalentes e $t_0 = t_1$.

- Teorema T.10.4.2 (Reed–Robertson–Seymour–Thomas, 1996): Para todo inteiro $c \geq 1$ existe um inteiro $t_0(c)$ tal que, para todo digrafo D com $\nu_0(D) < c$ tem-se $\tau_0(D) \leq t_0(c)$.

Prova: difícil.

Exercícios

- 28.5.1 (E.10.20 –) Suponha que os números t_0 e t_1 previstos na conjectura de Younger existam. Mostre que eles são iguais.

Apêndice A

Coleções e famílias

A.1 Coleções disjuntas

- Uma **coleção** é o mesmo que um conjunto. Uma **parte** de um conjunto U é o mesmo que um subconjunto de U .
- Uma coleção de partes de um conjunto U é **disjunta** se seus elementos são dois a dois disjuntos. Uma **subpartição** (= *subpartition*) de U é o mesmo que uma coleção disjunta de partes de U .
- Dois subconjuntos X e Y de U são **co-disjuntos** (= *co-disjoint*) se $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$, ou seja, se $X \cup Y = U$, ou seja, se $\overline{X} \subseteq Y$.¹ Uma coleção de partes de U é **co-disjunta** se seus elementos são dois a dois co-disjuntos.
- Uma coleção \mathcal{F} de partes de U é **2-disjunta** se cada elemento de U pertence a no máximo dois elementos de \mathcal{F} .

Exercícios

- A.1.1 Seja \mathcal{C} uma coleção de partes de um conjunto U . O que é um elemento *máximo* de \mathcal{C} ? O que é um elemento *maximal* de \mathcal{C} ? O que é um elemento *mínimo* de \mathcal{C} ? O que é um elemento *minimal* de \mathcal{C} ?
- A.1.2 (E.1.1) Sejam X e Y dois conjuntos finitos. Mostre que $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$.
- A.1.3 (E.1.2) Sejam X e Y dois conjuntos finitos. Mostre que $|X \cup Y|^2 + |X \cap Y|^2 \geq |X|^2 + |Y|^2$.

¹ Num digrama de Venn, é melhor desenhar \overline{X} e Y que X e Y .

$$\begin{aligned}
U &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \\
\mathcal{B} &= \{\{a, c, e\}, \{b, d\}, \{g, h\}\} \\
\mathcal{C} &= \{\{a, f\}, \{b, d\}, \{e\}, \{f, g\}\}
\end{aligned}$$

F	$\mu(F)$
$\{a, f\}$	1
$\{a, c, e\}$	1
$\{b, d\}$	2
$\{e\}$	1
$\{f, g\}$	1
$\{g, h\}$	1

$$\{\{a, f\}, \{a, c, e\}, \{b, d\}, \{b, d\}, \{e\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}$$

Figura A.1: \mathcal{B} é uma coleção disjunta de partes de U . \mathcal{C} é uma coleção (não-disjunta) de partes de U . A família $(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mu)$ é 2-disjunta. A última linha da figura dá uma representação não-convencional da família.

A.2 Famílias disjuntas

Nesta seção, U é um conjunto finito arbitrário. Para qualquer parte X de U , denotaremos $U \setminus X$ por \overline{X} . Denotaremos por 2^U a coleção de todos os subconjuntos de U .

(\mathcal{F}, μ) • Uma **família** é um par (\mathcal{F}, μ) onde \mathcal{F} é uma coleção e μ é uma função de \mathcal{F} em $\{1, 2, 3, \dots\}$. Para cada F em \mathcal{F} , diremos que $\mu(F)$ é a **multiplicidade** de F .

$|\mathcal{F}, \mu|$ A **cardinalidade** de uma família (\mathcal{F}, μ) é o número $|\mathcal{F}, \mu| := \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F)$.

Muitas vezes, trataremos de famílias (\mathcal{F}, μ) em que \mathcal{F} é uma coleção de partes de um conjunto U .

Exemplo 1: Sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} duas subcoleções de 2^U . Para cada X em $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, defina $\mu(X) := 2$; para os demais elementos X de $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, defina $\mu(X) := 1$. Agora, $(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mu)$ é uma família de partes de U e $|\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mu| = |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}|$.

• Uma família (\mathcal{F}, μ) de partes de U é **1-disjunta** se $\sum_{F \in \mathcal{F}: F \ni a} \mu(F) \leq 1$ para todo a em U , ou seja, se cada elemento a de U pertence a no máximo um membro da família. Se (\mathcal{F}, μ) é 1-disjunta então a coleção \mathcal{F} é disjunta e $\mu(\mathcal{F}) = \{1\}$.

• Uma família (\mathcal{F}, μ) de partes de U é **2-disjunta** se $\sum_{F \in \mathcal{F}: F \ni a} \mu(F) \leq 2$ para todo a em U , ou seja, se cada elemento a de U pertence a no máximo dois membros da família. Se (\mathcal{F}, μ) é 2-disjunta então \mathcal{F} é 2-disjunta e $\mu(\mathcal{F}) \subseteq \{1, 2\}$.

Exemplo 2: Seja \mathcal{B} uma subcoleção disjunta de 2^U e \mathcal{C} outra subcoleção disjunta de 2^U . Defina μ de modo que $\mu(X) = 2$ para X em $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ e $\mu(X) = 1$ para os demais elementos X de $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Então a família $(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mu)$ é 2-disjunta.

• Notação simplificada: Às vezes convém deixar a função μ sub-entendida e denotar uma família (\mathcal{F}, μ) simplesmente por \mathcal{F} . Essa simplificação exige atenção, pois torna

ambígua a expressão $|\mathcal{F}|$: se \mathcal{F} for entendido como uma mera coleção então $|\mathcal{F}|$ é a cardinalidade (ordinária) da coleção, mas se \mathcal{F} for entendido como uma família então $|\mathcal{F}|$ significa $|(\mathcal{F}, \mu)|$.

No exemplo 2 acima, a família $(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}, \mu)$ será denotada por $\mathcal{B} \dot{\cup} \mathcal{C}$. O símbolo $\dot{\cup}$ ajuda a distinguir a família $\mathcal{B} \dot{\cup} \mathcal{C}$, da coleção $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Temos $|\mathcal{B} \dot{\cup} \mathcal{C}| = |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}|$, enquanto $|\mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}|$.

- Mais notação simplificada: Uma família (\mathcal{F}, μ) pode ser representada por uma expressão da forma $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$. A função μ implícita nessa notação é definida assim: $\mu(F)$ é o número de índices i tais que $F_i = F$.

Exercícios

- A.2.1 Seja \mathcal{F} uma coleção 2-disjunta e suponha que $\mu(F) \leq 2$ para todo F em \mathcal{F} . É verdade que a família (\mathcal{F}, μ) é 2-disjunta?
- A.2.2 Seja \mathcal{F} uma família 2-disjunta de partes de U . É verdade que existem subcoleções \mathcal{B} e \mathcal{C} de 2^U tais que $\mathcal{F} = \mathcal{B} \dot{\cup} \mathcal{C}$?

Apêndice B

Algumas provas

Este apêndice contém as versões resumidas de algumas provas.

B.1 Prova do Teorema T.9.5.1

\mathcal{X}_z Notação: Dado um vértice z de um digrafo D , seja \mathcal{X}_z a coleção $\{X : \emptyset \neq X \subseteq V(D) \setminus \{z\}\}$.

T.9.5.1 (Edmonds, 1973): Seja z um vértice de um digrafo D e k um número. Se $d^-(X) \geq k$ para todo X em \mathcal{X}_z então D tem k out-branchings disjuntos, todos com raiz z .

Definição: Uma subárvore z -divergente F é **boa** se $d_{D-A(F)}^-(X) \geq k - 1$ para todo X em \mathcal{X}_z .

Lema principal: D tem um z -out-branching bom.

Prova do lema:

1. Seja F subárvore z -divergente boa tq $V(F) \neq V(D)$.
2. Tese: existe arco uv saindo de $V(F)$ tq $F + uv$ é boa.
3. $L := D - A(F)$.
4. X é **problemático** se $d_L^-(X) = k - 1$.
5. Caso 1: não existe conj problemático X tq $X \not\subseteq V(F)$.
6. Então qualquer uv saindo de $V(F)$ serve.
7. Caso 2: existe conj problemático T tq $T \not\subseteq V(F)$.
8. Escolha T minimal.
9. $d_L^-(T \setminus V(F)) = d^-(T \setminus V(F)) \geq k$ e $d_L^-(T) = k - 1$.
10. Logo, existe uv em $(T \cap V(F), T \setminus V(F))$ (por que?).
11. uv não entra em conj problemático.
 - a. Suponha que uv entra em um conj problemático T' .
 - b. Então $T \cap T'$ é problemático e $T \cap T' \not\subseteq V(F)$ (por que?).
 - c. Contradição da minimalidade de T (por que?).
12. Portanto, $F + uv$ é boa (por que?).

B.1.1 Exercícios

2.1.1 Responda os “por que?”.

Apêndice C

Soluções de alguns exercícios

Este apêndice contém as soluções de alguns exercícios.

C.1 Exercício 26.6.1

T.7.15.2 (Lucchesi–Younger, 1976): Em todo digrafo sem dicortes vazios, toda dijunção mínima J e toda coleção disjunta máxima \mathcal{C} de dicortes têm a mesma cardinalidade.

Queremos deduzir T.7.15.2 da versão forte do teorema T.8.8.1 (Edmonds–Giles) (veja seção 26.6). Mais precisamente, queremos deduzir T.7.15.2 da variante de T.8.8.1 que tem $x^+ \leq b$ no lugar de $x^- \leq b$.

1. Seja $D = (V, A)$ um digrafo sem dicortes vazios.
2. Sejam l e u os fluxos em D definidos por $l(a) := 0$ e $u(a) := 1$ para todo arco a .
3. Seja \mathcal{F} a coleção de todos os conjuntos-sorvedouro não-triviais de D :

$$\mathcal{F} := \{ W \in 2^V \setminus \{\emptyset, V\} : d^+(W) = 0 \} .$$

Seja b a função definida por $b(W) := -1$. Observe que (\mathcal{F}, b) é cruz-submodular.

3. Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os fluxos x tais que $l \leq x \leq u$ e $x^+(W) \leq b(W)$ para todo W em \mathcal{F} . É claro que $x^+(W) = 0$ para todo W e portanto \mathcal{P} é o conjunto de todos os fluxos x tais que

$$l \leq x \leq u \quad \text{e} \quad x^-(W) \geq 1 \quad \text{para todo } W \text{ em } \mathcal{F} .$$

Como D não tem cortes vazios, o fluxo que vale 1 em todo arco pertence a \mathcal{P} . Portanto, \mathcal{P} não é vazio.

4. Se x é um fluxo inteiro em \mathcal{P} então $x(a) \in \{0, 1\}$ para todo arco a e o conjunto

$$J := \{ a \in A : x(a) = 1 \}$$

é uma dijunção. Reciprocamente, toda dijunção corresponde a um x inteiro em \mathcal{P} . Assim, para encontrar uma dijunção mínima basta resolver o problema 8.8* no conjunto \mathcal{P} com c

definido por $c(a) = 1$ para todo a . Em outras palavras, encontrar uma dijunção mínima é o mesmo que minimizar cx com x em \mathcal{P} .

5. Seja \mathcal{P}^* o conjunto de todos os pares (y, z) tais que y uma função¹ de \mathcal{F} em \mathbb{Q}_{\geq} e z um fluxo não-negativo e

$$\sum_{W \in \mathcal{F}(a)} y(W) - z(a) \leq 1 \quad \text{para cada arco } a, \quad (\text{C.1})$$

sendo $\mathcal{F}(a) := \{W \in \mathcal{F} : (\overline{W}, W) \ni a\}$.

6. Considere o problema de maximizar o valor da expressão

$$y1 - z1 := \sum_{W \in \mathcal{F}} y(W) - \sum_{a \in A} z(a)$$

para (y, z) em \mathcal{P}^* . Esse problema é o dual (no sentido da dualidade de programação linear) do problema de minimizar cx com x em \mathcal{P} . Portanto, $cx \geq y1 - z1$ para todo x em \mathcal{P} e todo (y, z) em \mathcal{P}^* .

7. Observe que \mathcal{P}^* não é vazio, pois o par $(0, 0)$ pertence a \mathcal{P}^* .

8. Como \mathcal{P} e \mathcal{P}^* não são vazios, o teorema fundamental da programação linear garante que existem \tilde{x} em \mathcal{P} e (\tilde{y}, \tilde{z}) em \mathcal{P}^* tais que

$$c\tilde{x} = \tilde{y}1 - \tilde{z}1.$$

De acordo com a versão forte de T.8.8.1, podemos supor que

$$\tilde{x}, \tilde{y} \text{ e } \tilde{z} \text{ são inteiras.}$$

Em particular, \tilde{x} leva A em $\{0, 1\}$.

9. Podemos supor que $\tilde{y}(W) \in \{0, 1\}$ para todo W . Para verificar isso, aplique recursivamente o seguinte raciocínio. Suponha que $\tilde{y}(W_0) \geq 2$ para algum W_0 . Seja a_0 um arco em (\overline{W}, W) e observe que $\tilde{z}(a_0) \geq 1$ em virtude de (C.1). Tome y definido por $y(W_0) := \tilde{y}(W_0) - 1$ e $y(W) := \tilde{y}(W)$ para todo $W \neq W_0$. Tome z definido por $z(a_0) := \tilde{z}(a_0) - 1$ e $z(a) := \tilde{z}(a)$ para todo $a \neq a_0$. Então (y, z) está em \mathcal{P}^* e $y1 - z1 = \tilde{y}1 - \tilde{z}1$.

10. Podemos supor que $\sum_{W \in \mathcal{F}(a)} \tilde{y}(W) \leq 1$ para todo arco a . Para verificar isso, faça o seguinte raciocínio. Suponha que $\sum_{W \in \mathcal{F}(a_0)} \tilde{y}(W) > 1$ para algum a_0 . Então existem W_1 e W_2 em $\mathcal{F}(a_0)$ tais que $\tilde{y}(W_1) = 1$ e $\tilde{y}(W_2) = 1$. Tome y definido assim: $y(W_1) := 0$ e $y(W) := \tilde{y}(W)$ para todo $W \neq W_1$. Observe que $\tilde{z}(a_0) \geq 1$ em virtude de (C.1). Tome z definido assim: $z(a_0) := \tilde{z}(a_0) - 1$ e $z(a) := \tilde{z}(a)$ para todo $a \neq a_0$. Então (y, z) está em \mathcal{P}^* e $y1 - z1 = \tilde{y}1 - \tilde{z}1$.

11. Seja \tilde{J} o conjunto $\{a \in A : \tilde{x}(a) = 1\}$. É claro que $|\tilde{J}| = c\tilde{x}$.

12. Seja $\tilde{\mathcal{C}}$ o conjunto $\{W \in \mathcal{F} : \tilde{y}(W) = 1\}$. Em virtude de 9 e 10, a coleção $\tilde{\mathcal{C}}$ é corte-disjunta e portanto $|\tilde{\mathcal{C}}| \leq |\tilde{J}|$. Para completar a prova, resta mostrar que $|\tilde{\mathcal{C}}| = |\tilde{J}|$.

13. Em virtude de 9, $|\tilde{\mathcal{C}}| = \sum_{W \in \mathcal{F}} \tilde{y}(W) \geq \tilde{y}1 - \tilde{z}1 = c\tilde{x} = |\tilde{J}| \geq |\tilde{\mathcal{C}}|$. Logo, $|\tilde{\mathcal{C}}| = |\tilde{J}|$. \square

¹ Uma função definida em \mathcal{F} é o mesmo que um vetor indexado por \mathcal{F} .

Bibliografia

- [BJG02] J. Bang-Jensen and G. Gutin. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2002. 2
- [Sch03] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003. 55, 63, 93

Índice Remissivo

Numbers

V^{2-} , 9

$u \rightarrow v$, 10

$u \nrightarrow v$, 10

$\lambda(D)$, 25

$\lambda(s, t)$, 27

$\kappa(D)$, 25

$\chi(D)$, 51, 75

$\kappa(s, t)$, 27

$\psi_k(D)$, 65

$\gamma_k(D)$, 69

$\varphi_k(D)$, 71

\cup , 105

$D + F$, 65, 71

(X, Y) , 23

A^{-1} , 12

D^{-1} , 12

$f[X]$, 31, 80

$x_{\pm}^{\pm}()$, 29

$x_{\pm}^{-}()$, 89

A

A , 10

$A(D)$, 10

$\alpha()$, 52

acíclico, 17

adjacentes

(vértices), 9

Alon, 100

anti-simétrico, 11

2-aproximação, 53

arborescence, 16

arco, 9

arco-

conexidade, 25

local, 27

k -conexo, 28

k -forte, 26

fortificante, 65

arcos

anti-paralelos, 10

paralelos, 13

aresta, 10

árvore, 11

divergente, 14

geradora, 15

orientada, 11

B

$BG()$, 34

Bang-Jensen-Thomassen, 100

barreira, 65, 72

negativa, 65

positiva, 65

bipartido, 11

semicompleto, 11

bipartite representation, 34

branching, 16

C

$c(G)$, 82

C., 2

C.1.5.2, 42

C.10.3.16, 101

C.10.3.6, 101

C.4.9.2, 45

C.5.5.6, 44

C.5.6.2, 47

C.5.6.3, 47

C.5.6.6, 47

C.7.1.2, 55

C.7.2.3, 19

C.7.2.4, 53

C.7.2.5, 19

C.7.2.6, 19

C.7.3.2, 33, 34

C.7.4.1, 34

C.7.5.3, 68

C.8.8.10, 62

C.8.8.7, 78

caminho, 14

hamiltoniano, 41

Camion, 42
 carteiro chinês, 37
 CDCa, 52
 CDCaCi, 38
 CDCi, 38
 ciclo, 17
 hamiltoniano, 41
 trivial, 17
 circulação, 30
 Cnj., 2
 Cnj.8.5.8, 98
 co-disjunto, 103
 cobertura, 36
 cobertura disjunta
 por caminhos, 52
 por caminhos e ciclos, 38
 por ciclos, 38
 coleção, 103
 co-disjunta, 103
 disjunta, 103
 2-disjunta, 103
 laminar, 55
 coloração
 das arestas, 97
 dos vértices, 51, 75
 completo, 11
 componente, 82
 forte, 20
 fraca, 15
 comprimento, 14
 conexidade, 25
 local, 27
 conexo
 fracamente, 11
k-conexo, 28
 conjunto
 estável, 51, 75
 trivial, 9
 conjunto-
 fonte, 9
 sorvedouro, 10
 contração, 61
 corte, 23
 dirigido, 61
 (*s, t*)-corte, 23
 corte-disjunta, 62
 cruz-
 submodular, 92
 G-supermodular, 85
 cruzam
 (conjuntos se cruzam), 54
cycle factor, 38

D

$d^-()$, 9
 $d^+()$, 9
D/a, 61
D/J, 61
 decomposição em orelhas, 19
 demandas, 30
 dicorte, 61
 digrafo
 anti-simétrico, 11
 bipartido, 11
 bipartido semicompleto, 11
 das componentes fortes, 20
 euleriano, 11
 hamiltoniano, 41
 regular, 11
 simétrico, 11
 dijunção, 61
 Dilworth, 52
 disjunção, 103
 disjunta
 (coleção), 103
 (família), 104
 2-disjunta, 62
 (coleção), 103
 (família), 104
c-disjunta, 62
 distância, 15
 domina, 9

E

E., 2
 E.1.1, 103
 E.1.15, 17
 E.1.18, 41
 E.1.2, 103
 E.1.26, 42
 E.1.29, 18
 E.1.30, 18
 E.1.31, 16
 E.1.32, 19
 E.1.34, 53
 E.1.36, 19
 E.1.37, 19
 E.1.44, 12, 30
 E.1.46, 21
 E.1.49, 35
 E.1.5, 10
 E.1.50, 20
 E.1.53, 49
 E.1.54, 49
 E.1.55, 49

- E.1.58, 18
 E.1.6, 11
 E.1.62, 39
 E.1.63, 49
 E.1.65, 49
 E.1.7, 12
 E.1.84, 20
 E.10.14, 102
 E.10.20, 102
 E.10.23, 102
 E.2.32, 15
 E.2.34, 15
 E.2.35, 15
 E.3.1, 31
 E.3.10, 29
 E.3.31, 31
 E.3.47, 31
 E.3.54, 37
 E.3.59, 38
 E.3.61, 38
 E.3.63, 40
 E.3.66, 37
 E.3.68, 38
 E.3.70, 39
 E.4.2, 21
 E.4.23, 46
 E.4.25, 46
 E.4.27, 44
 E.4.28, 44
 E.5.12, 43
 E.5.13, 44
 E.5.14, 44
 E.5.28, 50
 E.5.8, 53
 E.7.1, 56
 E.7.10, 27
 E.7.11, 35
 E.7.12, 27
 E.7.14, 66
 E.7.15, 70
 E.7.16, 33
 E.7.17, 35
 E.7.19, 35
 E.7.2, 20
 E.7.20, 72
 E.7.26, 35
 E.7.27, 35
 E.7.29, 70
 E.7.44, 73
 E.7.45, 73
 E.7.5, 26
 E.7.50, 27
 E.7.51, 25
 E.7.7, 35
 E.7.8, 27
 E.7.9, 27
 E.8.20, 75
 E.8.21, 76
 E.8.22, 97
 E.8.26, 98
 E.8.27, 98
 E.8.28, 98
 E.8.29, 98
 E.8.30, 99
 E.8.31, 99
 E.8.41, 82
 E.8.42, 82
 E.8.44, 82
 E.8.46, 27, 78
 E.8.47, 78
 E.8.48, 78
 E.8.51, 86
 E.8.52, 56, 90
 E.8.57, 87
 E.8.60, 77
 E.8.66, 94
 E.9.26, 57
 E.9.27, 57
 E.9.28, 58
 E.9.34, 58
 Edmonds, 57
 Edmonds–Karp, 32
 Edmonds–Giles, 93, 95
 efluxo, 29
 emparelhamento, 36
 perfeito, 36
 estável, 52
 (conjunto), 51, 75
 euleriano, 11
 excesso, 29
F
 $\varphi_k(\cdot)$, 71
 família, 104
 2-disjunta, 104
 disjunta, 104
 w -disjunta, 59
 fecho transitivo, 21
 fluxo, 29
 inteiro, 29
 nenhures nulo, 96
 submodular, 92
 viável, 30, 31, 89
 k -fluxo, 97

- nenhures nulo, 97
 fonte, 9
 forte, 18
 k -forte, 26
 fortificante, 65, 71
 fracamente
 arco- k -conexo, 28
 conexo, 11
 k -conexo, 28
 Frank, 63, 67, 69, 78, 86, 87, 94
 Frank–Gyárfás, 81, 83
 Frank–Jordán, 72, 73
 função-custo, 59
- G**
- $\gamma_k(\cdot)$, 69
 Gallai, 75
 Gallai–Milgram, 52
 gerador
 (subdigrafo), 15
 Goldberg–Tarjan, 32
 grafo, 11
graph, 11
 grau
 de entrada, 9
 de saída, 9
- H**
- Hall, 36
- I**
- in-branching*, 16
 induzido, 15
 influxo, 29
 inter-
 fechada, 60
 submodular, 92
 G -supermodular, 86
 intercalação de caminhos, 45
 interceptam
 (conjuntos se interceptam), 54
 internamente disjuntos, 33
- J**
- Jaeger, 98
- K**
- $\kappa(D)$, 25
 $\kappa(s, t)$, 27
 Karp, 100, 101
 König, 36
- L**
- L., 2
 L.4.10.3, 43
 L.7.6.2, 67
 $\lambda(D)$, 25
 $\lambda(s, t)$, 27
 laminar, 55
 Landau, 82
 livre de
 cruzamentos, 55
 interceptações, 55
 localmente semicompleto, 43
 Lucchesi–Younger, 62, 101
- M**
- m , 10
 Mader, 68
 margem, 23, 24
 negativa, 23
 positiva, 23, 24
 Masuzawa–Hagihara–Tokura, 73
 maximal, 103
 máximo, 103
 Menger, 33
 Meyniel, 47
 minimal, 103
 mínimo, 103
 mod- k -fluxo, 98
 modular, 55
 Moon, 42
 multi-digrafo, 13
 multipartido
 semicompleto, 49
 multiplicidade, 104
- N**
- n , 10
 $N^+(\cdot)$, 9
 $N^-(\cdot)$, 9
 $N(\cdot)$, 36
 Nash–Williams, 78
 nenhures nulo
 (fluxo), 96
 novarco, 65, 71
nowhere-zero k -flow, 97
 número
 cromático, 51, 75
 de componentes, 82
- O**
- one-way pair*, 72
 ordem acíclica, 17
 orelha
 aberta, 19

- fechada, 19
 - trivial, 19
- orientação
 - de digrafo, 12
- orientada
 - (árvore), 11
- out-branching*, 16
- P**
- P., 2
- P.1.4.2, 17
- P.1.4.3, 18
- P.1.4.4, 18
- P.1.4.6, 53
- P.1.6.1, 20
- P.10.3.1, 101
- P.3.11.6, 39
- P.3.11.8, 38
- P.3.11.8', 38
- P.4.10.1, 45
- P.4.3.1, 21
- P.6.11.1, 53
- P.7.1.1, 56
- P.7.1.3, 56
- P.7.7.14, 72
- P.8.5.1, 97
- P.8.5.4, 97
- paralelos, 13
- parte, 103
- path factor*, 52
- path-cycle factor*, 38
- pc(), 52
- pcc*(), 38
- perfeito
 - (emparelhamento), 36
- PIC, 45
- plenamente
 - submodular, 92
 - G -supermodular, 87
- ponta
 - final, 9
 - inicial, 9
- ponte, 26, 78, 96
- problema
 - 10.3, 100
 - 10.3-A, 101
 - 10.3.3, 101
 - 4.3, 22
 - 5.4.4, 46
 - 7.2, 77
 - 7.2.R, 77
 - 8.5, 97
 - 8.6, 78
 - 8.6.R, 78
 - 8.7.1, 80
 - 8.7.1*, 82
 - 8.7.2, 84
 - 8.8, 89
 - 8.8*, 95
 - 9.10, 59
 - 9.10.1, 60
 - 9.5, 57
 - CDCi, 38
 - cycle subdigraph*, 39
 - da orientação arco- k -forte, 78
 - da orientação forte, 77
 - da reorientação arco- k -forte, 78
 - da reorientação forte, 77
 - de Younger, 62
 - do aumento da arco-conexidade, 65
 - do aumento da conexidade, 71
 - do caminho hamiltoniano, 41
 - do caminho máximo, 51
 - do ciclo hamiltoniano, 41
 - do subdigrafo acíclico máximo, 101
 - do subdigrafo gerador com graus especificados, 37
 - FAS, 101
 - FVS, 100
 - min lp, 74
 - minCDCa, 52
 - minCDCaCi, 38
 - minSGF, 53
 - MSSS, 53
 - $\psi_k()$, 65
 - Q**
 - \mathbb{Q} (rationais), 10
 - \mathbb{Q}_{\geq} , 10
 - R**
 - Rédei, 42
 - raiz, 14
 - realimentação
 - de arcos, 101
 - de vértices, 100
 - rede, 29
 - com demandas, 30
 - redondo, 43
 - redução transitiva, 22
 - Reed–Robertson–Seymour–Thomas, 102
 - regular, 11
 - k -rei, 15
 - reorientação, 12
 - representação bipartida, 34

- retenção, 29
 retorno
 de arcos, 101
 de vértices, 100
 Robbins, 77
 Roy, 75
- S**
- $SC()$, 20
 semicompleto, 11
 separa de, 23, 24
 separador, 23
 (s, t) -separador, 24
 Seymour, 98
 SGF, 53
 simétrico, 11
 simetrização, 12
 sorvedouro, 9
splitting off, 68
 subconjunto
 trivial, 9
 subdigrafo, 15
 submodular, 55, 92
 cruz-, 92
 inter-, 92
 plenamente, 92
 subpartição, 103
 supermodular, 55
 G -supermodular, 85, 86, 87
 cruz-, 85
 inter-, 86
 plenamente, 87
- T**
- T., 2
 T.1.4.5, 42
 T.1.5.1, 42
 T.1.6.2, 77
 T.1.8.1, 19
 T.10.3.15, 101
 T.10.3.2, 100, 101
 T.10.3.3, 100
 T.10.3.4, 100, 101
 T.10.3.5, 100
 T.10.4.2, 102
 T.2.10.1, 15
 T.2.2.2, 16
 T.3.10.3, 32
 T.3.10.4, 32
 T.3.11.1, 36
 T.3.11.11, 39
 T.3.11.2, 36
 T.3.11.3, 36
 T.3.11.4, 37
 T.3.11.5, 37
 T.3.5.3, 31
 T.3.5.5, 31
 T.3.6.3, 32
 T.3.8.2, 30
 T.3.8.3, 31, 32
 T.3.8.4, 31
 T.4.3.2, 22
 T.4.4.6, 20
 T.4.9.1, 45
 T.5.2.1, 52
 T.5.3.1, 52
 T.5.3.2, 52
 T.5.4.2, 46
 T.5.5.1, 44
 T.5.5.2, 44
 T.5.5.5, 44
 T.5.6.1, 48
 T.5.6.5, 48
 T.5.6.7, 47
 T.5.7.1, 50
 T.5.7.3, 50
 T.5.7.4, 50
 T.5.7.9, 50
 T.7.15.2, 62
 T.7.2.2, 19
 T.7.3.1, 33, 34, 56
 T.7.5.2, 68
 T.7.6.3, 69
 T.7.6.4, 69
 T.7.7.10, 73
 T.7.7.3, 73
 T.7.7.4, 73
 T.8.4.1, 75
 T.8.5.10, 98
 T.8.5.5, 97
 T.8.5.6, 97
 T.8.6.3, 78
 T.8.7.1, 82
 T.8.7.3, 81
 T.8.7.5, 83
 T.8.7.6, 86, 87
 T.8.8.1, 93, 95
 T.8.8.3, 94
 T.8.8.4, 94
 T.8.8.5, 94
 T.9.10.2, 59
 T.9.5.1, 57
 T.9.5.5, 79
 TDI, 93
 torneio, 11

totally dual integral, 93

transitivo, 21

transposto, 12

trivial

(orelha), 19

(subconjunto), 9

Tutte, 98

U

$\dot{\cup}$, 105

união disjunta, 105

V

V , 10

$V(D)$, 10

V^{2-} , 9

valor (de fluxo), 30

vetor de excessos, 29

Vitaver, 75

W

Woodall, 47, 63

X

$\chi()$, 51, 75

Y

Younger, 102

Z

\mathbb{Z} (inteiros), 10

\mathbb{Z}_{\geq} , 10

$\mathbb{Z}_{>}$, 10