

ÁLGEBRAS NÃO-ASSOCIATIVAS

LUIZ ANTONIO PERESI *

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo

Caixa Postal 66281, São Paulo-SP, Brazil, 05315-970

E-mail: peresi@ime.usp.br

Resumo

Estas notas tem por objetivo apresentar uma introdução a Teoria das Álgebras Não-Associativas. Este tópico da Álgebra tem importância não só por si mesmo mas também por suas conexões com outras áreas da Matemática, Física e Genética.

Consideramos as álgebras com composição, as álgebras alternativas, as álgebras de Jordan e as álgebras de Bernstein. Outra classe de álgebras muito importante é formada pelas álgebras de Lie, que não consideramos nestas notas.

Para cada classe de álgebras, apresentamos a motivação que levaram ao seu surgimento e enunciamos os teoremas de estrutura. Damos os argumentos principais das provas de alguns resultados sobre álgebras com composição, alternativas e de Jordan. Os detalhes destas provas podem ser encontrados no livro texto *Rings That Are Nearly Associative* de Zhevlakov et al [67]. As provas dos outros resultados podem ser encontradas nas referências citadas.

1 Introdução

1.1 Introdução Histórica

A fórmula que fornece as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em termos do radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ era conhecida na antiguidade entre os babilônios. Durante a renascença italiana (séculos XV e XVI), esforço considerável foi despendido com o objetivo de generalizar o método de resolver equações por radicais. O trabalho *Ars Magna*, publicado por Cardano em 1545, contém o método para resolver equações de grau 3 obtido por Scipione del Ferro e Tartaglia, e de grau 4 obtido por Ferrari.

No período compreendido entre a metade do século XVI e começo do século XIX, várias tentativas de generalização foram feitas pelos matemáticos do período, entre eles, Euler, Lagrange, Ruffini e Abel. Em 1833, Galois apresentou um critério para decidir se uma dada

*Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq (Brasil).

equação é ou não solúvel por radicais. Mais do que um critério, Galois apresentou uma teoria matemática interessante por si mesma, que teve grande influência no desenvolvimento da Álgebra.

A tentativa de resolver uma equação levava frequentemente a raízes quadradas de números negativos e, quando isto acontecia, considerava-se que a equação não tinha solução. Em 1572, Bombelli observou que radicais como $\sqrt{-1}$ não tinham significado mas era possível fazer contas com estes radicais quando eles se cancelavam. Os cálculos com números complexos foram se desenvolvendo, embora houvesse muitas dúvidas sobre a validade destes números, que eram chamados de *imaginários* ou *impossíveis*. A representação gráfica destes números como vetores ou pontos do plano foi mencionada por Wallis (1673), Wessel (1797), Argand (1813), Warren (1828) e Gauss (1832).

No início do século XIX, os matemáticos britânicos estavam isolados do continente, devido em grande parte à controvérsia sobre quem tivera prioridade na descoberta do Cálculo: o inglês Newton ou o alemão Leibniz. Este isolamento levou-os a um tipo de investigação que contribuiu de maneira decisiva para a fundamentação da Álgebra.

Nesta época, havia na Inglaterra quem se opusesse ao uso dos números negativos, alegando falta de fundamentação aceitável. Rejeitando os números negativos, estavam rejeitando os imaginários, toda a teoria de equações desenvolvida no continente e, em particular, O Teorema Fundamental da Álgebra provado por Gauss (todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ tem todas as suas raízes em $\mathbb{C}$, isto é, $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado). Maseres, por exemplo, reduziu a Álgebra à Álgebra Aritmética, em que os símbolos significavam apenas números positivos e a operação subtração só podia ser efetuada no caso em que o minuendo era maior ou igual ao subtraendo.

A primeira resposta satisfatória ao problema dos números negativos foi dada por Peacock (da Universidade de Cambridge) nos trabalhos *A Treatise On Algebra* de 1830 e *Report On The Recent Progress And Present State of Certain Branches of Analysis* de 1833. Peacock introduziu a *Álgebra Simbólica* justificando da seguinte maneira: “Quando generalizamos a operação denotada por $-$ de tal maneira que ela possa ser efetuada em todos os casos, devemos introduzir uma classe de quantidades cuja existência nunca foi contemplada na Álgebra Aritmética. Esta generalização é uma suposição já que não pode ser deduzida a partir da operação de subtração. A Álgebra Simbólica é a ciência que trata as combinações dos sinais e dos símbolos arbitrários, que não representam somente os números mas todas as espécies de quantidades, através de leis arbitrariamente definidas. Podemos assumir quaisquer leis para a combinação dos símbolos.”

A abordagem simbólica da Álgebra foi inicialmente rejeitada pelo matemático irlandês Hamilton. Em uma carta de 1835 a Graves, um amigo e correspondente matemático, Hamilton explicou sua relutância em aceitar as idéias de Peacock: “Eu e você Graves, pertencemos a polos distintos em Álgebra. Você, como Peacock, parece considerar a Álgebra como um sistema de sinais e suas combinações, enquanto que eu não fico satisfeito a menos que possa olhar através dos símbolos as coisas significativas.” Por ironia do destino, Hamilton foi o primeiro matemático a exercitar a liberdade pregada por Peacock, como veremos a seguir.

Em 1833, Hamilton apresentou uma reformulação dos números complexos: o número complexo $a + bi$ nada mais é do que o par ordenado (a, b) de números reais; o mistério envolvendo as raízes da equação $x^2 + 1 = 0$ desaparece pois suas raízes são $(0, 1)$ e $(0, -1)$;

as fórmulas $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ definem uma estrutura de corpo em $\mathbb{R}^2$. Motivado por problemas da Física, Hamilton tentou durante 10 anos definir uma multiplicação no $\mathbb{R}^3$ para obter igualmente um corpo (o que hoje sabemos ser impossível). Finalmente, em 1843, Hamilton conseguiu definir uma multiplicação em $\mathbb{R}^4$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$

em que $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$. Hamilton mostrou que todos os axiomas de corpo são satisfeitos exceto a comutatividade. Este sistema de números, denominados *quatêrnios*, foi o primeiro exemplo de corpo não-comutativo. Em 1847, Hamilton estava disposto a admitir: “*Existe uma ciência simbólica ou da linguagem que merece ser estudada.*”

Dois meses depois da descoberta dos quatêrnios, Graves introduziu os *octônios*, definindo uma multiplicação em $\mathbb{R}^8$. Este sistema de números foi descoberto independentemente por Cayley em 1845 e por esta razão são chamados também de *números de Cayley*. Este sistema de números não é comutativo e nem associativo (veja a Seção 2.2).

A partir daí, surgiram vários outros exemplos e generalizações. No seu trabalho *Lecture on Quaternions* de 1853, Hamilton introduziu os *números hipercomplexos*. Um sistema de números hipercomplexos é o conjunto de todos os símbolos da forma $x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$, em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais ou complexos e $e_1, e_2, \dots, e_n$ são as *unidades do sistema*. No artigo *A Memoir On The Theory of Matrices*, publicado em 1858, Cayley introduz o que chamamos hoje de *álgebra de matrizes*. Outras contribuições foram dadas por Grassmann (1844), Clifford (1878) e Sylvester (1884).

O problema da classificação dos sistemas de números hipercomplexos associativos, isto é, de álgebras associativas, foi estudado extensivamente durante a segunda metade do século XIX por B. Peirce e seu filho C. S. Peirce, Frobenius, Scheffers, Molien, Cartan e outros. Os resultados obtidos constituíam uma teoria satisfatória para álgebras sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Esta teoria de estrutura foi estendida para álgebras de dimensão finita sobre um corpo arbitrário por Wedderburn em 1907. Neste artigo, denominado *On Hypercomplex Numbers*, Wedderburn inclui uma seção sobre álgebras não-associativas.

Em 1927, Artin (estimulado pelos trabalhos de Noether) estendeu a teoria de Wedderburn para álgebras associativas satisfazendo condições de finitude para cadeias de ideais. Em 1945, Jacobson desenvolveu uma nova teoria de estrutura sem condições de finitude; a principal ferramenta usada nesta teoria foi um novo conceito de radical.

Até o fim dos anos 20 do século XX, a teoria desenvolveu-se principalmente como teoria de álgebras associativas. Mas, é claro que a história desta teoria está entrelaçada com a da teoria das álgebras não-associativas, e uma influenciou a outra. A partir dos anos 30, a investigação sobre as álgebras não-associativas avançou rapidamente em muitas direções.

Para quem está interessado em aprender mais sobre a história das álgebras não-associativas, recomendamos o artigo de Tomber [64].

1.2 Conceitos Básicos

Seja F um corpo infinito. Um espaço vetorial A sobre F é denominado uma *álgebra sobre F* se está definida em A uma operação de multiplicação, isto é, uma aplicação $(a, b) \in$

$A \times A \rightarrow ab \in A$, satisfazendo as seguintes relações:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b),$$

para todo $\alpha \in F$, $a, b, c \in A$.

Se a, b, c são elementos de uma álgebra A definimos o *associador* $(a, b, c) := (ab)c - a(bc)$ e o *comutador* $[a, b] := ab - ba$. Dizemos que A é uma *álgebra associativa* se $(a, b, c) = 0$ para todo $a, b, c \in A$ e que A é uma *álgebra comutativa* se $[a, b] = 0$ para todo $a, b \in A$.

O corpo F é uma álgebra associativa e comutativa sobre F . A *álgebra de matrizes* $M_n(F)$ formada por todas as matrizes $n \times n$ com coeficientes em F é associativa mas não é comutativa.

Seja V um espaço vetorial sobre F e denotemos por $L(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de V em V . A multiplicação TS dos operadores T e S é dada por $TS(v) = T(S(v))$ ($v \in V$). Temos então que $L(V)$ é uma álgebra associativa, denominada a *álgebra de operadores lineares* de V .

Se A é uma álgebra sobre F , a *dimensão* de A é a dimensão de A como espaço vetorial sobre F . Toda álgebra sobre F de dimensão finita n pode ser definida por uma *tábua de multiplicação* $v_i v_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ijk} v_k$, em que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de A e $\delta_{ijk} \in F$. Os escalares δ_{ijk} são denominados *constantes de estrutura* da álgebra correspondentes a base considerada. Por outro lado, se V é um espaço vetorial sobre F com base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e δ_{ijk} ($1 \leq i, j, k \leq n$) são escalares, a expressão $v_i v_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ijk} v_k$ define a multiplicação $ab = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \delta_{ijk} \right\} v_k$, em que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ e $b = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$, e V munido desta multiplicação é uma álgebra sobre F .

Vejamos um exemplo de uma álgebra que não é associativa. Seja V um espaço vetorial sobre F com base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Consideremos a multiplicação em V definida por $v_i v_j = \frac{1}{2} (v_i + v_j)$. O espaço V munido desta multiplicação é uma álgebra mas não é associativa pois, por exemplo, $(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

Ao longo do texto a palavra álgebra significa *álgebra não-associativa*, isto é, uma álgebra que não é necessariamente associativa.

Sejam A uma álgebra e $a \in A$. O operador linear $R_a : A \rightarrow A$, dado por $R_a(x) = xa$, é denominado *multiplicação à direita* por a .

Sejam A e B álgebras sobre F . A transformação linear $\phi : A \rightarrow B$ é denominada um *homomorfismo* se $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para todo $x, y \in A$. O *núcleo* de ϕ é o conjunto $\text{Ker}(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$. Quando ϕ é bijetor, dizemos que ϕ é um *isomorfismo*, a álgebra A é *isomorfa* a B e indicamos este fato por $A \cong B$. Por exemplo, quando V tem dimensão n , temos que $L(V) \cong M_n(F)$.

Um operador linear $a \in A \rightarrow \bar{a} \in A$ é denominado uma *involução* se satisfaz $\overline{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b} \bar{a}$, para todo $a, b \in A$.

Um elemento $a \neq 0$ de uma álgebra A é denominado *divisor de zero* se existe um $b \in A$, $b \neq 0$, tal que $ab = 0$.

Uma álgebra A é denominada *álgebra com divisão* se, para quaisquer elementos $a, b \in A$ com $a \neq 0$, cada uma das equações $ax = b$, $ya = b$ tem solução em A . Se A é uma álgebra de dimensão finita, então A é uma álgebra com divisão se e somente se A não tem divisores de zero. Toda álgebra associativa com divisão tem um elemento identidade.

Um *ideal à esquerda* (*à direita*) de uma álgebra A é um subespaço I de A tal que $aI \subset I$ ($Ia \subset I$). Quando I é ao mesmo tempo um ideal à esquerda e à direita, dizemos que I é um *ideal* de A .

Um ideal $M \neq A$ ($\neq \{0\}$) de uma álgebra A é *maximal* (*minimal*) se não existe um ideal I (J) de A , $I \neq M$, $I \neq A$ ($J \neq \{0\}$, $J \neq M$) tal que $M \subset I \subset A$ ($\{0\} \subset J \subset M$).

Uma álgebra A é *simples* quando $A^2 \neq \{0\}$ e os seus únicos ideais são $\{0\}$ e A . Toda álgebra com divisão é simples.

Uma álgebra A é denominada *artiniana* (*à esquerda*) se satisfaz a condição da cadeia descendente para ideais (*à esquerda*), isto é, se $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ é uma tal cadeia então existe $k \geq 1$ tal que $I_n = I_k$, para todo $n \geq k$. Toda álgebra de dimensão finita é artiniana.

Sejam A uma álgebra sobre F e I um ideal de A . Definimos em A a seguinte relação de equivalência: $a \equiv b$ se $a - b \in I$. A classe de equivalência determinada por a é $\bar{a} = a + I = \{a + b \mid b \in I\}$. A *álgebra quociente* de A por I é o conjunto $A/I = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ munido das operações $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \overline{a_1 + a_2}$, $\alpha \bar{a} = \overline{\alpha a}$, $\bar{a}_1 \bar{a}_2 = \overline{a_1 a_2}$ ($\alpha \in F$, $a, a_1, a_2 \in A$). A aplicação $\pi : A \rightarrow A/I$ dada por $\pi(a) = \bar{a}$ é um homomorfismo, denominado *homomorfismo canônico*.

Sejam $\{A_i\}_{i \in L}$ uma família de álgebras sobre F . Definindo no produto cartesiano $\prod_{i \in L} A_i$ as operações $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, $\alpha(a_i) = (\alpha a_i)$, $(a_i)(b_i) = (a_i b_i)$, obtemos uma álgebra sobre F denominada *produto direto* das álgebras A_i . A *soma direta* das álgebras A_i é a subálgebra de $\prod_{i \in L} A_i$ formada por todos os elementos (a_i) tais que $a_i = 0$, exceto para um número finito de índices $i \in L$. Quando L é um conjunto finito, digamos $L = \{1, \dots, k\}$, o produto direto coincide com a soma direta e ambos são denotados por $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$.

Sejam $\prod_{i \in L} A_i$ o produto direto das álgebras A_i e seja $\pi_k : \prod_{i \in L} A_i \rightarrow A_k$ a projeção na k -ésima coordenada, isto é, $\pi_k((a_i)) = a_k$. Uma álgebra B sobre F é denominada um *produto subdireto* das álgebras A_i se B é uma subálgebra de $\prod_{i \in L} A_i$ e $\pi_k(B) = A_k$, para todo $k \in L$.

Sejam A uma álgebra e $\{I_i\}_{i \in L}$ uma família de ideais de A . Vamos mostrar que a *álgebra quociente* $A / \bigcap_{i \in L} I_i$ é isomorfa a um produto subdireto das álgebras quocientes $\{A/I_i\}_{i \in L}$. Consideremos o homomorfismo $\theta : A \rightarrow \prod_{i \in L} A/I_i$, $\theta(a) = (a + I_i)$. Temos que $A / \bigcap_{i \in L} I_i$ é isomorfa a $\theta(A)$. A álgebra $\theta(A) = \{(a + I_i) \mid a \in A\}$ é um produto subdireto das álgebras A/I_i pois é uma subálgebra de $\prod_{i \in L} A/I_i$ e $\pi_k(\theta(A)) = A/I_k$ pois se $x = b + I_k$ ($b \in A$) temos $(b + I_i) \in \theta(A)$ e logo $\pi_k((b + I_i)) = b + I_k = x$.

Uma álgebra é denominada *associativa nas potências* se cada um de seus elementos gera uma subálgebra associativa. Seja A uma álgebra associativa nas potências. As potências de $a \in A$ estão bem definidas por $a^1 = a, \dots, a^{n+1} = a^n a$, e dizemos que a é *nilpotente* se existe um inteiro positivo k tal que $a^k = 0$. Quando todos os elementos de A (de um ideal I de A) são nilpotentes dizemos que A é uma *nilálgebra* (I é um *nilideal*).

Toda álgebra associativa nas potências A contem um único nilideal maximal $Nil(A)$ tal que a álgebra quociente $A/Nil(A)$ não contem nilideais não-nulos. Este ideal $Nil(A)$ é denominado o *nilradical* de A .

Seja A uma álgebra não-associativa. Definimos indutivamente as seguintes potências de A : $A^1 = A, \dots, A^n = A^{n-1}A + A^{n-2}A^2 + \dots + AA^{n-1}$; $A^{(0)} = A, \dots, A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$. Dizemos que A é *nilpotente* (*solúvel*) quando $A^k = \{0\}$ ($A^{(k)} = \{0\}$) para algum k . Quando A é nilpotente o menor k tal que $A^k = \{0\}$ é denominado o *índice de nilpotência* de A . Analogamente, definimos o *índice de solubilidade* de A .

Em outras palavras, a álgebra A é nilpotente quando existe um inteiro positivo k tal que

qualquer produto de k elementos de A (não importando a maneira como são associados) é igual a zero. A álgebra A é dita *localmente nilpotente* quando toda subálgebra finitamente gerada de A é nilpotente. Nenhuma álgebra simples pode ser localmente nilpotente (Zhevlakov et al [67], p. 138).

Albert conjecturou que toda nilálgebra associativa nas potências comutativa de dimensão finita é nilpotente. Esta conjectura ficou vários anos sem resposta até que Suttles apresentou o seguinte contra-exemplo em 1972. Seja A a álgebra comutativa com base $\{e_1, \dots, e_5\}$ e produtos não-nulos dado por $e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_3 = e_5$. Esta álgebra A é uma nilálgebra de nilíndice 4, é associativa nas potências e é solúvel, mas não é nilpotente (pois $A^3 = A^2$ e $A^2A^2 = \{0\}$).

Temos o seguinte problema em aberto.

Problema de Albert *Toda nilálgebra associativa nas potências comutativa de dimensão finita é solúvel?*

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Construimos o conjunto $M[X]$ dos *monômios não-associativos e não-comutativos* indutivamente como segue: se $x_i, x_j \in X$ então $x_ix_j \in M[X]$; se $u, v \in M[X] - X$ então $x_i(u)$, $(u)x_i$, $(u)(v) \in M[X]$. Seja

$$F[X] = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in F, u_i \in M[X] \right\}$$

o espaço vetorial sobre F gerado por $M[X]$. Os elementos de $F[X]$ são denominados *polinômios não-associativos* nas variáveis x_i . Definindo em $F[X]$ a multiplicação

$$\begin{aligned} x_i.x_j &= x_ix_j, \quad x_i.u = x_i(u), \quad u.x_i = (u)x_i, \quad u.v = (u)(v), \\ \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m \beta_j v_j \right) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_i \beta_j u_i.v_j, \end{aligned}$$

em que $x_i, x_j \in X$, $u, u_i, v_j \in M[X] - X$, obtemos uma álgebra denominada *álgebra não-associativa livre gerada por X* , que também denotamos por $F[X]$. Se A é uma álgebra sobre F e $\phi : X \rightarrow A$ é uma aplicação então existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : F[X] \rightarrow A$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & F[X] \\ & \searrow \phi & \downarrow \bar{\phi} \\ & & A \end{array}$$

A *álgebra associativa livre gerada por X* , denotada por $Ass[X]$, é a álgebra quociente $F[X]/Ass$, em que Ass denota o ideal de $F[X]$ gerado pelos elementos da forma (f_1, f_2, f_3) , em que $f_1, f_2, f_3 \in F[X]$.

Dizemos que um ideal I de $F[X]$ é um *T-ideal* se $\psi(I) \subset I$ para todo homomorfismo $\psi : F[X] \rightarrow F[X]$.

Um polinômio não-associativo $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F[X]$ é denominado uma *identidade* da álgebra A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Dizemos também que A *satisfaz f* ou que f *vale em A* . O conjunto de todas as identidades de A é um T-ideal, denominado *ideal de identidades* de A e é denotado por $T(A)$.

1.3 Estrutura das Álgebras Associativas

Nesta seção todas as álgebras são associativas.

Seja D uma álgebra com divisão. A álgebra D tem um elemento identidade 1. Sejam n um inteiro positivo e $M_n(D)$ a álgebra de matrizes com coeficientes em D . Seja E_{ij} a matriz cujo único elemento não-nulo é 1 e está na posição (i, j) . Vamos mostrar que $M_n(D)$ é uma álgebra simples. Claramente temos que $(M_n(D))^2 \neq \{0\}$. Seja $I \neq \{0\}$ um ideal de $M_n(D)$. Seja $P = (a_{ij})$ uma matriz não-nula em I . Temos que $a_{kl} \neq 0$ para algum k e algum l . Como I é um ideal temos $Q = \sum_{r=1}^n a_{kl} E_{rr} = \sum_{r=1}^n E_{rk} P E_{lr} \in I$. Como $a_{kl} \neq 0$, Q é uma matriz invertível e $Q^{-1} = \sum_{r=1}^n a_{kl}^{-1} E_{rr}$. Logo, $I_n = Q^{-1}Q \in I$ e temos então que $M_n(D) = M_n(D)I_n \subset I$. Portanto, $I = M_n(D)$.

Teorema 1. (Wedderburn) *Seja A uma álgebra associativa simples de dimensão finita sobre F . Então A é isomorfa à álgebra de matrizes $M_n(D)$, em que D é uma álgebra associativa com divisão. Além disso, n é único e D é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Seja I um ideal à direita minimal de A . Sejam $L(I)$ a álgebra dos operadores lineares de I , considerado como um espaço vetorial sobre F , e

$$D = \{T \in L(I) \mid TR_a = R_a T, \forall a \in A\}.$$

Temos que D é uma álgebra com divisão e que $a \in A \rightarrow R_a \in L_D(I)$ é um isomorfismo, em que $L_D(I)$ é a álgebra dos operadores lineares de I , considerado como um espaço vetorial sobre D . Se n é a dimensão de I sobre D , temos $L_D(I) \cong M_n(D)$ e portanto $A \cong M_n(D)$.

Se $A \cong M_n(D)$ e $A \cong M_{n'}(D')$, em que D e D' são álgebras com divisão, então temos um isomorfismo $\theta : M_n(D) \rightarrow M_{n'}(D')$. Se $F_{11} = \theta(E_{11})$ então F_{11} é semelhante a E'_{11} . Logo, existe uma matriz invertível $P \in M_{n'}(D')$ tal que $E'_{11} = P^{-1}F_{11}P$. Seja $\psi : M_{n'}(D') \rightarrow M_{n'}(D')$ o isomorfismo dado por $\psi(X) = P^{-1}XP$. Temos:

$$\begin{aligned} D &\cong E_{11}M_n(D)E_{11} \cong^{\theta} F_{11}M_{n'}(D')F_{11} \cong^{\psi} E'_{11}M_{n'}(D')E'_{11} \cong D', \\ n = \dim_D(M_n(D)E_{11}) &= \dim_{D'}(M_{n'}(D')F_{11}) = \dim_{D'}(M_{n'}(D')E'_{11}) = n'. \end{aligned}$$

Teorema 2. (Felsenszwalb [22]) *Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita. Então temos:*

- (i) *O nilradical $\text{Nil}(A)$ é nilpotente.*
- (ii) *A álgebra quociente $A/\text{Nil}(A)$ é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras associativas simples.*

O radical de Jacobson de uma álgebra A , denotado por $J(A)$, é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de A .

Quando A é uma álgebra artiniana, $J(A)$ é nilpotente e é a soma de todos os ideais nilpotentes à esquerda de A . Em particular, $\text{Nil}(A) \subset J(A)$. Por outro lado, como $A/\text{Nil}(A)$ não contém nilideais não-nulos e $J(A)/\text{Nil}(A)$ é um nilideal de $A/\text{Nil}(A)$, temos $J(A) \subset \text{Nil}(A)$. Portanto, neste caso, $J(A) = \text{Nil}(A)$.

Teorema 3. (Wedderburn-Artin) (Jacobson [44]) *Seja A uma álgebra associativa artiniana. Então existem inteiros positivos $n_1, \dots, n_r$ e álgebras com divisão $D_1, \dots, D_r$ tais que*

$A/J(A) \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$. Além disso, se $A/J(A) \cong M_{t_1}(D'_1) \oplus \cdots \oplus M_{t_s}(D'_s)$ é outra decomposição temos $r = s$, $n_i = t_i$ e $D_i \cong D'_i$ ($i = 1, \dots, r$, reordenando os índices se necessário).

Uma álgebra A é denominada *primitiva* (à direita) se existe um A -módulo (à direita) M irredutível e fiel. Isto significa que está definida uma adição $m_1 + m_2$ e uma multiplicação ma ($\forall m, m_1, m_2 \in M, a \in A$) que tem as seguintes propriedades: $(M, +)$ é um grupo comutativo, $(m_1 + m_2)a = m_1a + m_2a$, $(ma_1)a_2 = m(a_1a_2)$, $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2$ ($\forall m, m_1, m_2 \in M, a, a_1, a_2 \in A$) (A -módulo); se $a \in A$ e $Ma = \{0\}$ então $a = 0$ (fiel); os únicos A -submódulos de M são $\{0\}$ e M (irredutível). Toda álgebra simples é primitiva; em particular, a álgebra de matrizes $M_n(D)$ é primitiva.

Um ideal P de uma álgebra A é denominado *primitivo* quando a álgebra A/P é primitiva. O radical de Jacobson $J(A)$ é a interseção de todos os ideais primitivos de A .

Seja V um espaço vetorial sobre uma álgebra com divisão D . Seja S uma subálgebra de $L_D(V)$. Dizemos que S é *densa* se dados $x_1, \dots, x_n$ elementos linearmente independentes de V e $y_1, \dots, y_n$ elementos quaisquer de V existe $T \in S$ tal que $T(x_i) = y_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Teorema 4. (Jacobson [44]) *Seja A uma álgebra associativa. Então temos:*

(i) *A álgebra quociente $A/J(A)$ é isomorfa a um produto subdireto de álgebras associativas primitivas.*

(ii) (Chevalley) *Uma álgebra associativa é primitiva se e somente se é isomorfa a uma subálgebra densa de uma álgebra de operadores lineares de um espaço vetorial sobre uma álgebra associativa com divisão.*

2 Álgebras Com Composição

2.1 O Problema de Hurwitz

Se $z = a_1 + a_2i$ e $z' = b_1 + b_2i$ são números complexos, sabemos que $|zz'| = |z| |z'|$, isto é, que

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Isto mostra que o produto de duas somas de dois quadrados é novamente uma soma de dois quadrados. Uma pergunta que surge então é se isto pode ser generalizado para soma de n quadrados.

Em 1818, Degen construiu um exemplo para $n = 8$ que ficou sem divulgação. Hamilton construiu um exemplo para $n = 4$ (quatêrnios) e Graves e Cayley para $n = 8$ (octônios).

Em casos particulares surgiu então a idéia que vamos descrever a seguir. Se

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) = A_1^2 + \cdots + A_n^2 \quad (1)$$

então cada A_k é uma forma bilinear em $a = (a_i)$ e $b = (b_i)$, isto é,

$$A_k = \sum_{i,j=1}^n c_{ijk} a_i b_j.$$

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Se $v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$ identificamos v com (a_i) . Considerando as operações $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, $\lambda(a_i) = (\lambda a_i)$, $(a_i)(b_i) = (A_i)$, obtemos uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Esta álgebra é *normada* pois definindo $|a| = a_1^2 + \dots + a_n^2$ obtemos $|ab| = |a||b|$. Portanto, a existência de uma identidade do tipo (1) implica a existência de uma álgebra normada de dimensão n sobre $\mathbb{R}$.

Toda álgebra normada de dimensão finita é uma álgebra com divisão. Em 1878, Frobenius (e também C. S. Peirce em 1881) estabeleceu que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e quatêrnios são as únicas álgebras associativas com divisão de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$.

Em 1898, Hurwitz provou que identidades do tipo (1), isto é, identidades para soma de n quadrados que permitem composição, só existem para $n = 1, 2, 4, 8$.

O *problema de Hurwitz* consiste em encontrar formas quadráticas não-degeneradas (no lugar de soma de quadrados) sobre um corpo qualquer que permitem composição. Este problema foi resolvido por Dickson (1919), Albert (1942), Kaplansky (1953) e Jacobson (1958).

2.2 Álgebras Com Composição

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F . Sejam $n : V \rightarrow F$ uma forma quadrática e $f(x, y) := n(x+y) - n(x) - n(y)$ a forma bilinear simétrica associada. Dizemos que n *permite composição* se é possível definir em V uma multiplicação xy tal que $n(xy) = n(x)n(y)$.

Uma álgebra A com elemento identidade 1 sobre F é dita uma *álgebra com composição* se existe uma forma quadrática $n : A \rightarrow F$ tal que $n(xy) = n(x)n(y)$ ($\forall x, y \in A$) e $f(x, y)$ é *não-degenerada*, isto é, $f(a, x) = 0, \forall x \in A$, implica $a = 0$.

Seja $n : V \rightarrow F$ uma forma quadrática tal que $f(x, y)$ é não-degenerada. Suponhamos que n permite a composição xy . Então n admite uma composição $x.y$ tal que V munido da multiplicação $x.y$ é uma álgebra com composição. Portanto, o problema de Hurwitz é equivalente ao problema de descrever as álgebras com composição de dimensão finita.

Uma álgebra é dita *alternativa* se satisfaz as *leis alternativas* $(x, x, y) = 0$ e $(y, x, x) = 0$. Uma álgebra A sobre o corpo F com elemento identidade 1 é dita *quadrática* se $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$ para todo $x \in A$, em que $t : A \rightarrow F$ é uma forma linear e $n : A \rightarrow F$ é uma forma quadrática.

Toda álgebra com composição A é alternativa e quadrática. Mais precisamente, para todo $x \in A$, $x^2 - f(x, 1)x + n(x) = 0$. O operador linear $a \in A \rightarrow \bar{a} \in A$, em que $\bar{a} = f(a, 1) - a$, é uma involução. Temos $a + \bar{a} = f(a, 1) \in F$ e $a\bar{a} = n(a) \in F$.

Seja A uma álgebra com composição sobre F . Então A é uma álgebra simples ou $A \cong F \oplus F$. Para ver que isto é verdade, consideremos inicialmente um ideal I de A tal que $I \neq A$ e $\bar{I} = I$. Temos que $I \cap F = \{0\}$ e logo $a + \bar{a} = 0$ para todo $a \in I$. Logo, $f(a, x) = a\bar{x} + x\bar{a} = a\bar{x} + \bar{a}\bar{x} = 0$, para todo $a \in I, x \in A$, pois $a\bar{x} \in I$. Como f é não-degenerada segue então que $a = 0$. Logo, $I = \{0\}$. Agora, suponhamos que A não é simples. Vamos mostrar que $A \cong F \oplus F$. Existe um ideal T de A tal que $T \neq \{0\}$ e $T \neq A$. Temos que $T + \bar{T}$ é um ideal de A e $\overline{T + \bar{T}} = T + \bar{T}$. Pelo que foi observado, $T + \bar{T} = A$ pois $T + \bar{T} \neq \{0\}$. De modo análogo, vemos que $T \cap \bar{T} = \{0\}$. Portanto, $A = T \oplus \bar{T}$. Finalmente, se $t, s \in T$ e $t \neq 0$ então $s = (t + \bar{t})^{-1} (s + \bar{s}) t \in Ft$, donde segue que $T \cong F$ e $\bar{T} \cong F$.

Portanto, uma álgebra com composição sobre um corpo F é alternativa, quadrática, e é simples ou isomorfa a $F \oplus F$.

Para construir exemplos de álgebras com composição usamos o processo descrito a seguir.

Processo de Cayley-Dickson. Seja A uma álgebra sobre um corpo F . Suponhamos que A tem um elemento identidade 1, a dimensão de A é m e em A está definida uma involução $a \rightarrow \bar{a}$ tal que $a + \bar{a}$, $a\bar{a} \in F$, para todo $a \in A$. O processo de Cayley-Dickson consiste em construir a partir de A uma álgebra (A, α) ($\alpha \in F, \alpha \neq 0$) de dimensão $2m$. A álgebra (A, α) é obtida quando definimos no produto cartesiano $A \times A$ a multiplicação

$$(a_1, a_2) (a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \bar{a}_2, \bar{a}_1 a_4 + a_3 a_2).$$

O elemento $(1, 0)$ é um elemento identidade em (A, α) e $\overline{(a_1, a_2)} = (\bar{a}_1, -a_2)$ define uma involução em (A, α) . A álgebra (A, α) é associativa se e somente se A é associativa e comutativa. A álgebra (A, α) é alternativa se e somente se A é associativa. Se A é uma álgebra com composição, então (A, α) é uma álgebra com composição se e somente se A é associativa.

Temos os seguintes exemplos de álgebras com composição:

I. F (corpo de característica $\neq 2$), $n(x) = x^2$.

II. $K(\mu) = F \oplus Fv_1$, em que F é um corpo de característica qualquer, $v_1^2 = v_1 + \mu$ ($\mu \in F, 4\mu + 1 \neq 0$), $\overline{a + bv_1} = (a + b) - bv_1$.

III. $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$.

IV. $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$.

As álgebras $Q(\mu, \beta)$ e $C(\mu, \beta, \gamma)$ são construídas a partir de $K(\mu)$ pelo processo de Cayley-Dickson. No caso em que $\text{car}(F) \neq 2$, $K(\mu)$ também pode ser construída a partir de F por este processo.

As álgebras do tipo I, II são comutativas, as do tipo I, II e III são associativas e a do tipo IV é alternativa.

Se $x^2 - x - \mu$ é irredutível, a álgebra $K(\mu)$ é uma extensão quadrática separável de F . Quando $x^2 - x - \mu$ é redutível temos $K(\mu) = F \oplus F$.

A álgebra $Q(\mu, \beta)$ é denominada *álgebra de quatêrnios generalizada* e $C(\mu, \beta, \gamma)$ é denominada *álgebra de Cayley-Dickson*.

Quando F tem característica $\neq 2$ é possível escolher uma base $1, e_1, \dots, e_7$ de tal maneira que $C(\mu, \beta, \gamma)$ tem a tábua de multiplicação dada a seguir ($\alpha = \mu + \frac{1}{4}$). Quando $\alpha = \beta = \gamma = -1$ obtemos os casos clássicos: *álgebra de quatêrnios* e *álgebra de octônios*.

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha \beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha \beta e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha \gamma$	γe_3	$\alpha \gamma e_2$
e_6	e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta \gamma$	$-\beta \gamma e_1$
e_7	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha \beta e_4$	γe_3	$-\alpha \gamma e_2$	$\beta \gamma e_1$	$\alpha \beta \gamma$

Começando com $F_1 = F$ e $F_2 = K(\mu)$ podemos construir pelo Processo de Cayley-Dickson uma sequência de álgebras F_t ($t = 1, 2, 3, \dots$): $F_3 = Q(\mu, \beta)$, $F_4 = C(\mu, \beta, \gamma)$, $F_5 = (F_4, \gamma_5), \dots, F_t = (F_{t-1}, \gamma_t)$. Como F_4 não é associativa temos que F_5 não é alternativa. Que propriedade as álgebras F_t têm em comum? Daremos a resposta em seguida.

Uma álgebra não associativa é denominada *flexível* quando satisfaz a identidade $(x, y, x) = 0$.

Teorema 5. (Schafer [61]) *A álgebra F_t é flexível para todo t .*

2.3 Teorema de Hurwitz Generalizado

Vimos na Seção 2.2 as álgebras com composição de tipos I-IV. Vamos mostrar agora que estes são os únicos tipos possíveis.

Teorema 6. *Seja A uma álgebra com composição sobre um corpo F . Então A é uma das álgebras do tipo I-IV.*

Demonstração. Seja B uma subálgebra de A contendo o elemento identidade 1 de A tal que a restrição de f a B é não-degenerada. Então $A = B \oplus B^\perp$, em que $B^\perp = \{x \in A \mid f(x, y) = 0, \forall y \in B\}$. Se $B \neq A$ então existe $v \in B^\perp$ tal que $n(v) = -\alpha \neq 0$. Além disso, $B + vB = (B, \alpha)$, $1 \in B + vB$ e f restrita a $B + vB$ é não-degenerada.

Agora, suponhamos que $\text{car}(F) \neq 2$. Neste caso, f restrita a F é não-degenerada. Tomando $B = F$, temos que $B = A$ e neste caso $A = F$ é do tipo I, ou $B \neq A$. Se $B \neq A$ então A contém uma subálgebra B_1 do tipo II. Se $B_1 = A$ então A é do tipo II. Se $B_1 \neq A$ então tomando $B = B_1$ vemos que A contém uma subálgebra B_2 do tipo III. Se $B_2 = A$ então A é do tipo III. Se $B_2 \neq A$ tomando $B = B_2$ vemos que A contém uma subálgebra B_3 do tipo IV. Neste caso, necessariamente $B_3 = A$.

Finalmente, suponhamos que F tem característica 2. Neste caso, $A \neq F$ pois F não é uma álgebra com composição. Existe $a \in A - F$ tal que $a + \bar{a} \neq 0$. De fato, se $x + \bar{x} = 0$ ($\forall x \in A - F$) então $f(1, x) = 0$ ($\forall x \in A - F$). Como $f(1, \alpha) = 2\alpha$ para todo $\alpha \in F$, temos então que $f(1, x) = 0$ ($\forall x \in A$), contradizendo o fato de f ser não-degenerada. Pondo $s = (a + \bar{a})^{-1}a$ obtemos $s^2 = s + \mu$ ($\mu \in F$, $4\mu + 1 \neq 0$), $F + Fs$ é uma subálgebra de A do tipo II e f restrita a $F + Fs$ é não-degenerada. E, como fizemos acima, podemos provar que A é do tipo II, III ou IV.

Corolário 1. *Seja $n : V \rightarrow F$ uma forma quadrática não-degenerada. Se n admite composição então a dimensão de V é 1, 2, 4 ou 8. Além disso, se $\text{car}(F) \neq 2$ podemos escolher uma base de V tal que $n(x)$ assume uma das seguintes formas:*

- (i) $n(x) = x^2$,
 - (ii) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2$,
 - (iii) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2$,
 - (iv) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2 - \gamma x_5^2 + \alpha \gamma x_6^2 + \beta \gamma x_7^2 - \alpha \beta \gamma x_8^2$,
- em que $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha \beta \gamma \neq 0$.

2.4 Álgebras Com Composição Cindidas

Uma álgebra com composição A tem divisores de zero se e somente se $n(x) = 0$ para algum $x \neq 0$. Quando isto ocorre dizemos que A é uma álgebra com composição *cindida*. Por exemplo, $K(0)$, $Q(0, 1)$ e $C(0, 1, 1)$ são álgebras cindidas.

Uma álgebra com composição A é cindida se e somente se A contem um idempotente $e \neq 0, 1$. De fato, se A é cindida então existe $x \in A$ tal que $n(x) = 0$ e $x + \bar{x} = \alpha \neq 0$. O elemento $e = \alpha^{-1}x$ é um idempotente de A e $e \neq 0, 1$. Reciprocamente, se e é um idempotente de A com $e \neq 0, 1$ então $n(e) = 0$ e A é cindida.

Teorema 7. *Se A é uma álgebra com composição cindida sobre F então A é isomorfa a $K(0)$, $Q(0, 1)$ ou $C(0, 1, 1)$.*

Demonstração. Seja B uma subálgebra de A contendo o elemento identidade 1 de A . Suponhamos que f restrita a B é não-degenerada. Então se $B \neq \{0\}$ podemos encontrar $u \in B^\perp$ tal que $n(u) = -\alpha \neq 0$. Agora, se B contem um idempotente $e \neq 0, 1$ e $v = u + \alpha^{-1}(1 - \alpha)ue$ então $v \in B^\perp$ e $v^2 = 1$. Segue que $B + vB = (B, 1)$ contem 1 e além disso f restrita a $B + vB$ é não-degenerada.

Como A é cindida sabemos que A contem um idempotente $e \neq 0, 1$. A álgebra $K(0) = F \oplus Fe$ é uma subálgebra de A e um cálculo simples mostra que f restrita a $K(0)$ é não-degenerada. Se $A = K(0)$ o resultado está provado. Se $A \neq K(0)$ fazendo $B = K(0)$ vemos que A contem a subálgebra $Q(0, 1) = (K(0), 1)$. Se $A = Q(0, 1)$ o resultado está provado. Se $A \neq Q(0, 1)$ fazendo $B = Q(0, 1)$ encontramos a subálgebra $C(0, 1, 1) = (Q(0, 1), 1)$ em A . Mas neste caso temos necessariamente que $A = C(0, 1, 1)$.

Corolário 2. *Sobre um corpo algebricamente fechado F existem quatro álgebras com composição não-isomorfas: F , $K(0)$, $Q(0, 1)$, $C(0, 1, 1)$.*

Demonstração. Seja A uma álgebra com composição sobre F de dimensão > 1 . Sejam $a \in A - F$ e $\alpha \in F$ uma raiz de $x^2 - t(a)x + n(a) = 0$. Então $(a - \alpha)(a + \alpha - t(a)) = 0$ e $a - \alpha$ é um divisor de zero em A . Portanto, A é cindida e o resultado segue pelo Teorema 7.

A aplicação $K(0) = F \oplus Fv_1 \rightarrow F \oplus F$ que leva $\alpha + \beta v_1$ em $(\alpha + \beta, \alpha)$ fornece um isomorfismo entre $K(0)$ e $F \oplus F$. A álgebra $Q(0, 1)$ é isomorfa à álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 com coeficientes em F . Um isomorfismo é dado por

$$\alpha + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 v_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \gamma + \delta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

A álgebra $C(0, 1, 1)$ é isomorfa à álgebra $(M_2(F), 1)$ que é denotada por $C(F)$ e é denominada *álgebra de matrizes de Cayley-Dickson*.

Seja F um corpo qualquer (incluindo a possibilidade de F ser algebricamente fechado). Considerando uma extensão transcendente F_1 de F , é possível construir uma álgebra com composição sobre F_1 de dimensão 2, 4 e 8 que não tem divisores de zero.

2.5 Álgebras Com Composição Generalizadas

Vamos generalizar o conceito de álgebra com composição não exigindo que a álgebra tenha um elemento identidade. Chamamos esta álgebra de *álgebra com composição generalizada*.

O problema da classificação das álgebras com composição generalizadas foi estudado por Myung, Okubo e Osborn no começo dos anos 80, Faulkner em 1988, e Elduque e Myung [21] em 1993.

Okubo encontrou um exemplo de uma álgebra com composição generalizada sobre $\mathbb{C}$, a *álgebra de pseudo-octônios* P_8 , e generalizou este exemplo construindo a álgebra que vamos definir a seguir.

Seja F um corpo de característica $\neq 2, 3$ contendo $\sqrt{-3}$. Seja $sl(3, F) = \{X \in M_3(F) \mid tr(X) = 0\}$, em que $tr(X)$ é o traço da matriz X . Obtemos a álgebra $P_8(F)$, de dimensão 8 sobre F , definindo no espaço vetorial $sl(3, F)$ a multiplicação

$$X.Y = \mu XY + (1 - \mu)YX - \frac{1}{3}tr(XY)I,$$

em que $\mu = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{-3})$ e I é a matriz identidade 3×3 . Em particular, quando $F = \mathbb{C}$, obtemos a álgebra $P_8 = P_8(\mathbb{C})$.

Se $n(X) = \frac{1}{6}tr(X^2)$ então n é uma forma quadrática, a forma simétrica associada $f(X, Y) = \frac{1}{3}tr(XY)$ é não-degenerada e temos que $n(X.Y) = n(X)n(Y)$ para todo $X, Y \in P_8(F)$.

A álgebra $P_8(F)$ tem propriedades diferentes daquelas verificadas pelas álgebras com composição: $P_8(F)$ não é alternativa; $P_8(F)$ verifica $x^3 = n(x)x$ (no lugar da equação quadrática) e é flexível.

Quando F não contém $\sqrt{-3}$ ou $car(F) = 3$, definimos a álgebra $P_8(F)$ sobre F usando a tábua de multiplicação da álgebra $P_8(\bar{F})$, em que $\bar{F}$ é o fecho algébrico de F .

Em qualquer caso, a álgebra $P_8(F)$ é denominada *álgebra de Okubo*. Vamos usar o termo *álgebra de Hurwitz* para indicar uma das álgebras do tipo I-IV.

Se A é uma álgebra com composição generalizada. Um elemento $e \in A$ é denominado uma *para-unidade* se $f(e, e) = 1$ e $ex = xe = \bar{x} \ (\forall x \in A)$, em que $\bar{x} = 2f(e, x)e - x$. A álgebra A é denominada *para-Hurwitz* quando A , considerada como álgebra sobre alguma extensão $\tilde{F}$ de F , possui uma para-unidade. Se A é Hurwitz com elemento identidade e então $x.y = \bar{x}\bar{y}$ define uma nova multiplicação em A e munido desta multiplicação A é para-Hurwitz. Reciprocamente, se A é para-Hurwitz com para-unidade e , esta nova multiplicação transforma A em uma álgebra de Hurwitz com elemento identidade e . Neste sentido, existe uma correspondência entre as álgebras de Hurwitz e as álgebras para-Hurwitz.

As álgebras de Okubo e as álgebras para-Hurwitz são flexíveis.

Teorema 8. (Okubo [56]) *Seja A uma álgebra com composição generalizada flexível de dimensão finita sobre um corpo F de característica $\neq 2$. Então A é uma álgebra de Hurwitz ou uma álgebra para-Hurwitz ou a álgebra de Okubo.*

Seja F um corpo de característica $\neq 2, 3$. Suponhamos que F contém $\sqrt{-3}$. Seja A uma álgebra alternativa de dimensão finita sobre F satisfazendo

$$x^3 - t(x)x^2 + s(x)x - n(x) = 0,$$

em que $t : A \rightarrow F$ é uma forma linear, $s : A \rightarrow F$ é uma forma quadrática e $n : A \rightarrow F$ é uma forma cúbica. Dizemos que A é uma *álgebra alternativa de grau 3*. Se $A_0 = \{x \in A \mid t(x) = 0\}$, todo elemento $x \in A$ pode ser escrito como $x = x_0 - \frac{1}{3}t(x)$, em que $x_0 \in A_0$. Temos que $s(x) = -\frac{1}{2}t(x^2)$ para todo $x \in A_0$. Quando $t(x^2)$ é não-degenerada, dizemos que A é *separável* sobre F . Seja $\omega \neq 1$ uma raiz cúbica da unidade e note que $\omega = \mu^{-1}(\mu - 1)$ e $\sqrt{-3} = 2\omega + 1$. Definimos uma multiplicação $*$ em A_0 por

$$a * b = \omega ab - \omega^2 ba - \frac{1}{3}(2\omega + 1)t(ab),$$

em que $a, b \in A_0$. Em particular, quando $A = M_3(F)$ temos $A_0 = sl(3, F)$ e $a \in (A_0, *) \rightarrow \sqrt{-3} a \in P_8(F)$ é um isomorfismo. Além disso, $s(a * b) = s(a)s(b)$, para todo $a, b \in (A_0, *)$.

Se F não contém $\sqrt{-3}$, consideramos o corpo $K = F(\sqrt{-3}) = F(\omega)$ e uma álgebra alternativa de dimensão finita e de grau 3 sobre K , munida de uma involução $-$ do *segundo tipo*, isto é, que satisfaz $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{xy} = \overline{y} \overline{x}$, $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha} \overline{x}$, para todo $\alpha \in K$ e $x, y \in A$, em que $\alpha \rightarrow \overline{\alpha}$ é o único F -automorfismo de K de grau 2. Se $\tilde{A}_0 = \{x \in A \mid t(x) = x, \overline{x} = -x\}$ então $\tilde{A}_0$ é fechado sob a multiplicação $*$, $(\tilde{A}_0, *)$ é uma álgebra sobre F e $s(a * b) = s(a)s(b)$, para todo $a, b \in \tilde{A}_0$. Como $s(\overline{a}) = s(a)$ para todo $a \in \tilde{A}_0$, temos que $s(\tilde{A}_0) \subset F$ e então s restrita a $\tilde{A}_0$ é uma forma quadrática sobre F .

Teorema 9. (Elduque e Myung [21]) *Seja B uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica $\neq 2, 3$. Suponhamos que B não é uma álgebra de Hurwitz.*

(i) *Se F contém $\sqrt{-3}$, então B é uma álgebra com composição generalizada flexível sobre F se e somente se existe uma álgebra alternativa separável de grau 3 A sobre F tal que B é isomorfa a $(A_0, *)$. Além disso, duas tais álgebras B são isomorfas se e somente se as correspondentes álgebras alternativas A são isomorfas.*

(ii) *Se F não contém $\sqrt{-3}$, então B é uma álgebra com composição generalizada flexível se e somente se existe uma álgebra alternativa separável de grau 3 sobre $F(\sqrt{-3})$ com uma involução do segundo tipo tal que B é isomorfa a $(\tilde{A}_0, *)$. Além disso, duas tais álgebras B são isomorfas se e somente se as correspondentes álgebras alternativas A são isomorfas como álgebras com involução.*

2.6 Álgebras Com Pseudo-Composição

Seja F um corpo de característica $\neq 2, 3$ e seja A uma álgebra comutativa sobre F . Dizemos que A é uma *álgebra com pseudo-composição* se existe uma forma bilinear simétrica não-nula $\phi : A \times A \rightarrow F$ tal que

$$x^3 = \phi(x, x)x, \quad \forall x \in A.$$

A forma ϕ é única e é denominada *norma* de A . Definimos o *radical* de ϕ como sendo o conjunto $Rad\phi = \{x \in A \mid \phi(x, y) = 0, \forall y \in A\}$.

Quando A é uma álgebra com pseudo-composição e ϕ é a sua norma temos $\phi(x^2, x^2) = \phi(x, x)^2$, $\forall x \in A$. Compare esta equação com a equação $n(xy) = n(x)n(y)$ ($\forall x, y \in A$) satisfeita pelas álgebras com composição.

Para simplificar, vamos supor que F é algebricamente fechado. Neste caso, a álgebra com pseudo-composição A sobre F tem um idempotente e e $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{-1}$, em que

$A_\alpha = \{z \in A \mid ez = \alpha z\}$ ($\alpha = \frac{1}{2}, -1$). Quando $A_{-1} = \{0\}$ ou $A_{\frac{1}{2}} = \{0\}$ dizemos que A é do tipo quadrático pois

$$x^2 + \beta(x)x + \gamma(x, x)e = 0 \quad (\forall x \in A),$$

em que $\beta : A \rightarrow F$ é uma forma linear e $\gamma : A \times A \rightarrow F$ é uma forma bilinear simétrica.

O teorema de estrutura das álgebras com pseudo-composição é dado a seguir.

Teorema 10. (Meyberg e Osborn [53]) *Seja A uma álgebra com pseudo-composição sobre um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2, 3$. Então $\text{Rad}\phi$ é um ideal de A , e um dos seguintes casos acontece:*

- (i) A é do tipo quadrático;
- (ii) $A/\text{Rad}\phi$ é do tipo quadrático;
- (iii) A pode ser construída a partir de uma álgebra alternativa quadrática com composição.

3 Álgebras Alternativas

A estrutura das álgebras alternativas simples foi obtida através dos trabalhos de Zorn (1930), Schafer (1943), Albert (1952), Skornyakov (1950), Bruck e Kleinfeld (1951), Kleinfeld (1953) e Zhevlakov (1967).

Os teoremas de estrutura das álgebras alternativas foram obtidas por Kleinfeld (1955), Slater (1969, 1970, 1971), Zhevlakov (1972) e Shestakov (1976).

Como já definimos na Seção 2.2, uma álgebra é alternativa quando satisfaz as identidades $(x, x, y) = 0$ e $(y, x, x) = 0$. O primeiro resultado fundamental sobre as álgebras alternativas é dado a seguir.

Teorema 11. (Artin) *Em uma álgebra alternativa, quaisquer dois elementos geram uma subálgebra associativa.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra alternativa e A_0 a subálgebra gerada por $a, b \in A$. Para concluir que A_0 é associativa, devemos provar que, para produtos finitos arbitrários u_1, u_2, u_3 dos elementos a, b , temos $(u_1, u_2, u_3) = 0$. Fazemos isto por indução sobre $n = d(u_1) + d(u_2) + d(u_3)$, em que $d(u_i)$ é o número de fatores em u_i . Se $n = 3$ o resultado é claro e este é o primeiro passo da indução. Suponhamos que $n > 3$ e (como hipótese de indução) que se v_1, v_2, v_3 são produtos finitos de a, b e $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) < n$ temos $(v_1, v_2, v_3) = 0$. Usando esta hipótese de indução, podemos supor sem perda de generalidade, que $u_1 = t_1 a, u_2 = t_2 a$. Usando algumas identidades que valem para as álgebras alternativas, temos que $(u_1, u_2, u_3) = -a(t_1 u_3, t_2, a) = 0$, pois $d(t_1 u_3) + d(t_2) + d(a) < n$.

Corolário 3. *Toda álgebra alternativa é associativa nas potências.*

3.1 Álgebras Alternativas Quadráticas Simples

Como observamos na Seção 2.2, toda álgebra com composição A sobre um corpo F (a menos do caso $A = F \oplus F$) é alternativa, quadrática e simples. O seguinte teorema fornece uma recíproca para este fato.

Teorema 12. *Toda álgebra alternativa, quadrática e simples é uma álgebra com composição ou um corpo de característica 2.*

Demonstração. Seja A uma álgebra quadrática sobre um corpo F . Isto significa que $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$, em que $t(x), n(x) \in F$ e são unicamente determinados por $x \in A$. Além disso, temos que $x \in A \rightarrow t(x) \in F$ é uma forma linear e $x \in A \rightarrow n(x) \in F$ é uma forma quadrática. Agora, com a hipótese adicional de que A é alternativa, podemos verificar que $n(xy) = n(x)n(y)$, para todo $x, y \in A$.

Suponhamos que A é alternativa, quadrática e simples. Consideremos a forma bilinear simétrica $f(x, y) := n(x + y) - n(x) - n(y)$. O conjunto

$$W = \{a \in A \mid f(a, A) = 0\}$$

é um ideal de A . Como A é simples, temos que $W = \{0\}$ ou $W = A$. No primeiro caso, f é não-degenerada e A é uma álgebra com composição. No segundo caso, $f = 0$ e então $n(x + y) = n(x) + n(y)$. Logo, $n : A \rightarrow F$ é um homomorfismo de anéis e $\ker(n)$ é um ideal de A . Mas, como $\ker(n) \neq A$ e A é simples, temos que $\ker(n) = \{0\}$. Assim, A é isomorfa ao subanel $\theta(A) = \{n(x) \mid x \in A\}$ de F . Mais ainda, $\theta(A)$ é um corpo pois se $x \in A$ e $n(x) \neq 0$ então o inverso de $n(x)$ é $n(n(x)^{-1}x) \in \theta(A)$. Logo, A é um corpo e A tem característica 2 pois $1 + 1 = 2 = f(1, 1) = 0$.

3.2 Álgebras Alternativas Simples

Seja A uma álgebra qualquer sobre um corpo F . O conjunto

$$N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = \{0\}\}$$

é denominado *centro associativo* de A e o conjunto

$$K(A) = \{n \in A \mid [n, A] = \{0\}\}$$

é denominado *centro comutativo* de A . O *centro* de A é o conjunto

$$Z(A) = N(A) \cap K[A].$$

Temos que $N(A)$ e $Z(A)$ são subálgebras de A . Quando A é alternativa, $K(A)$ é uma subálgebra de A e $3K(A) \subset N(A)$. Logo, toda álgebra alternativa e comutativa de característica $\neq 3$ é associativa.

Se A é simples então $Z(A) = \{0\}$ ou $Z(A)$ é um corpo. Se A é simples e *central* sobre F (isto é, $Z(A) = F$) e K é uma extensão de F , então o produto tensorial $K \otimes_F A$ é simples e central sobre K .

No que segue A é uma álgebra alternativa.

Seja $ZN(A)$ o ideal de A gerado pelos elementos $[n, a]$ ($n \in N[A], a \in A$). Temos que $(ZN[A], A, A) \subset N[A]$.

Vamos mostrar que se A é simples e não é associativa então $N[A] = Z[A]$. Suponhamos o contrário, isto é, que $N(A)$ não está contido em $Z(A)$. Temos então que $ZN[A] \neq \{0\}$ e como A é simples segue que $ZN(A) = A$. Logo, $(A, A, A) = (ZN(A), A, A) \subset N[A]$. Como

A não é associativa, existe $n = (x, y, z) \neq 0$ e sabemos que $n \in N[A]$. Por outro lado, $(x, y, A) \subset (A, A, A) \subset N(A)$ e podemos verificar que disto segue que $\langle n \rangle^2 = \{0\}$, em que $\langle n \rangle$ denota o ideal de A gerado por n . Logo, sendo A simples, temos que $\langle n \rangle = \{0\}$ levando a uma contradição.

Lema 1. *Suponhamos que a álgebra alternativa A satisfaz a identidade $[x, y]^n = 0$. Então, os elementos nilpotentes de A formam um ideal de A .*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que A é associativa. A álgebra $\bar{A} = A/Nil(A)$ não contém nilideais não-nulos. Seja $x \in A$ um elemento nilpotente; temos $x^k = 0$ para algum k . Suponhamos que $x \notin Nil(A)$. Segue que $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x}^k = 0$. Usando a identidade $[x, y]^n = 0$ podemos provar que $\bar{x} \bar{y}$ é nilpotente para todo $\bar{y} \in \bar{A}$. Logo, $\bar{x} \bar{A}$ é um nilideal à direita de $\bar{A}$. Um resultado devido a Levitzki afirma que toda nilálgebra, associativa, finitamente gerada e que satisfaz uma identidade polinomial, é nilpotente. Logo, $\bar{x} \bar{A}$ é localmente nilpotente. Notemos que $\bar{x} \bar{A} \neq \{0\}$ pois se $\bar{x} \bar{A} = \{0\}$ então $\bar{x}$ gera um nilideal não-nulo de $\bar{A}$. Mas então o radical de Levitzki (isto é, o radical localmente nilpotente) $\mathcal{L}(\bar{A})$ de $\bar{A}$ é $\neq \{0\}$. Mas $\mathcal{L}(\bar{A})$ é um nilideal de $\bar{A}$, o que leva a uma contradição. Portanto, $x \in Nil(A)$. Suponhamos, agora, que A é alternativa. Sejam $x, y \in A$ elementos nilpotentes. Pelo Teorema 11, a álgebra B gerada por x, y é associativa. Pelo caso que já foi provado, os elementos nilpotentes de B formam o ideal $Nil(B)$. Portanto, $x + y$ é nilpotente. De modo análogo, podemos provar que se x é nilpotente e y é um elemento arbitrário de A então xy e yx são nilpotentes.

Observamos acima que toda álgebra alternativa e comutativa de característica $\neq 3$ é associativa. Observemos agora que se A é uma álgebra alternativa, comutativa e simples então A é um corpo. Sejam $a, b, c \in A$ e suponhamos que $(a, b, c) \neq 0$. Podemos provar que toda álgebra alternativa e comutativa verifica a identidade $(x, y, z)^2 = 0$. Logo, $(a, b, c)^2 = 0$. Como A é comutativa, A satisfaz $[x, y]^n = 0$. Logo, pelo Lema 1, os elementos nilpotentes de A formam um ideal I e este ideal contém o elemento não-nulo (a, b, c) . Temos então que $I \neq \{0\}$ e logo $I = A$ pois A é simples. Portanto, A é uma nilálgebra satisfazendo uma identidade polinomial e isto implica que A é localmente nilpotente. Mas este fato junto com a simplicidade não é possível. Logo, devemos ter $(a, b, c) = 0$, para todo $a, b, c \in A$, e A é associativa. Mas uma álgebra associativa, comutativa e simples é um corpo.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. A álgebra alternativa livre, determinada por X e denotada por $Alt[X]$, é a álgebra quociente $F[X]/Alt$, em que Alt denota o ideal de $F[X]$ gerado pelos elementos da forma (f_1, f_1, f_2) , (f_2, f_1, f_1) ($f_1, f_2 \in F[X]$). Temos que $N_{Alt[X]}(A) \subset N[A]$, em que

$$N_{Alt[X]}(A) = \{p(a_1, \dots, a_n) \mid n \geq 1, p(x_1, \dots, x_n) \in N(Alt[X]), a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

O centro associativo $N(Alt[X])$ de $Alt[X]$ contém os elementos

$$n_1(x, y) = [x, y]^4, \quad n_2(x, y) = [x, y]^2([x, y] \circ [x, yx]), \quad n_3(x, y) = [x, y]^2[x, yx]^2,$$

em que $[x, y] \circ [x, yx] = \frac{1}{2}\{[x, y][x, yx] + [x, yx][x, y]\}$. Estes elementos são não-nulos em $Alt[X]$ pois são não-nulos na álgebra associativa livre $Ass[X]$.

O teorema principal sobre as álgebras alternativas simples é o seguinte:

Teorema 13. *Seja A uma álgebra alternativa, não-comutativa e simples sobre um corpo F . Suponhamos que $N_{\text{Alt}[X]}(A) \subset Z(A)$. Então $Z(A)$ é um corpo e A é uma álgebra de quatêrnios generalizada $Q(\mu, \beta)$ ou uma álgebra de Cayley-Dickson $C(\mu, \beta, \gamma)$ sobre o seu centro $Z(A)$.*

Demonstração. Do fato de A ser simples temos que $Z(A) = \{0\}$ ou $Z(A)$ é um corpo. Vamos provar que $Z(A) \neq \{0\}$. Para todo $x, y \in A$ temos que

$$[x, y]^4 \in N_{\text{Alt}[X]}(A) \subset Z(A).$$

Basta portanto provar que existem $a, b \in A$ tais que $[a, b]^4 \neq 0$. Suponhamos o contrário, isto é, que $[x, y]^4 = 0$, $\forall x, y \in A$. Então

$$\{[x, y] \mid x, y \in A\} \subset I,$$

em que I é o ideal formado pelos elementos nilpotentes de A . Como A é não-comutativa, certamente $I \neq \{0\}$ e a simplicidade de A fornece $I = A$. Logo, A é nilálgebra e, como A satisfaz a identidade $[x, y]^4 = 0$, A é localmente nilpotente, o que leva a uma contradição pois A é simples. Portanto, existem $a, b \in A$ tais que $[a, b]^4 \neq 0$, $Z(A) \neq \{0\}$ e então $Z(A)$ é um corpo.

Consideremos a álgebra A como uma álgebra sobre $Z(A)$. Esta álgebra continua simples. Seja K uma extensão de $Z(A)$. A álgebra $A_K = K \otimes_{Z(A)} A$ é alternativa, simples e central sobre K . Como $n_i(x, y) \in N(\text{Alt}[X])$ e $N_{\text{Alt}[X]}(A) \subset Z(A)$ (por hipótese) temos $(n_i(x, y), z, t) = [n_i(x, y), z] = 0$, para todo $x, y, z, t \in A$ e $i = 1, 2, 3$. Estas identidades continuam válidas quando tomamos $x, y, z, t \in A_K$. Portanto, $n_i(x, y) \in Z(A_K) = K$, para todo $x, y \in A_K$, $i = 1, 2, 3$. Por outro lado, provamos acima que existem $a, b \in A$ tais que $n_1(a, b) = [a, b]^4 \neq 0$. Podemos concluir disto que A_K é uma álgebra quadrática. Assim, A_K é uma álgebra alternativa, quadrática e simples, e não é comutativa. Logo, pelo Teorema 12, A_K é uma álgebra com composição. É possível concluir disto que A é uma álgebra com composição. Portanto, $A = Q(\mu, \beta)$ ou $A = C(\mu, \beta, \gamma)$ para algum $\mu, \beta, \gamma \in F$.

Corolário 4. *(Kleinfeld) Se A é uma álgebra alternativa, simples e A não é associativa então o centro $Z(A)$ de A é um corpo e A é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre $Z(A)$.*

Demonstração. Se A é comutativa então A é um corpo, contradizendo a hipótese de que A não é associativa. Logo, A não é comutativa. Por outro lado, $N_{\text{Alt}[X]}(A) \subset N[A] = Z(A)$. Logo, podemos aplicar o Teorema 13 e concluir que A é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre $Z(A)$.

Como toda álgebra com divisão é simples, usamos o Corolário 4 para obter o seguinte resultado:

Corolário 5. *(Bruck-Kleinfeld-Skornyakov) Se A é uma álgebra alternativa com divisão e A não é associativa então $Z(A)$ é um corpo e A é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre $Z(A)$.*

3.3 Estrutura das Álgebras Alternativas

Pelo Corolário 3, toda álgebra alternativa A é associativa nas potências. Logo, o nilradical $Nil(A)$ está bem definido (veja a Seção 1.2). Quando A tem dimensão finita, $Nil(A)$ é nilpotente.

Teorema 14. (Schafer [62]) *Seja A uma álgebra alternativa de dimensão finita. Então $A/Nil(A)$ é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras simples. Cada uma destas álgebras simples ou é associativa (e, neste caso, isomorfa a uma álgebra de matrizes sobre uma álgebra associativa com divisão) ou é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre o seu centro.*

No que segue A é uma álgebra alternativa de dimensão qualquer (inclusive infinita).

Um ideal à direita I de A é chamado *ideal à direita modular* se existe $e \in A$ tal que $x - ex \in I$, para todo $x \in A$. Se I é um ideal à direita modular de A então $(I : A) = \{a \in A : Aa \subset I\}$ é o maior ideal de A contido em I .

A álgebra A é denominada *primitiva* (à direita) se A contém um ideal à direita modular maximal I e este ideal não contém ideais não-nulos; neste caso, $(I : A) = \{0\}$. Toda álgebra de Cayley-Dickson é primitiva. Um ideal I de A é denominado *primitivo* se A/I é uma álgebra primitiva.

Uma álgebra B é *prima* se para quaisquer ideais não-nulos I e J de B temos $IJ \neq 0$. Toda álgebra alternativa primitiva é prima.

Teorema 15. (Kleinfeld) *Toda álgebra alternativa primitiva ou é associativa primitiva ou é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre seu centro.*

Demonstração. Suponhamos que A é primitiva e não é associativa. Como A é primitiva, A tem um ideal à direita modular maximal I . O fato de A ser prima e $(I : A) = \{0\}$ implica $I = \{0\}$. Logo, não existem ideais à direita próprios em A . Portanto, A é simples e, pelo Corolário 4, A é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre o seu centro.

Seja A uma álgebra sobre F . Quando A não contém um elemento identidade, podemos construir a álgebra $A^\#$ que contém A e tem um elemento identidade. Como espaço vetorial $A^\# = F \oplus A$ e a multiplicação em $A^\#$ é definida por

$$(\alpha + a)(\beta + b) = (\alpha\beta) + (\alpha b + \beta a + ab).$$

Um ideal I de A é denominado *quasi-regular* se, para todo $x \in I$, o elemento $1 - x$ tem um inverso em $A^\#$. O *radical quasi-regular* $Rad(A)$ de A é o maior ideal à direita quasi-regular de A e também é a interseção de todos os ideais à direita modulares maximais de A .

Teorema 16. (Zhevlakov et al [67]) *Seja A uma álgebra alternativa artiniana. Então temos:*

- (i) *O radical $Rad(A)$ é o maior ideal nilpotente de A .*
- (ii) *A álgebra quociente $A/Rad(A)$ é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras de matrizes (sobre álgebras associativas com divisão) e álgebras de Cayley-Dickson.*

Teorema 17. (Kleinfeld) *Seja A uma álgebra alternativa. Então temos:*

- (i) *O radical $Rad(A)$ é a interseção de todos os ideais primitivos de A .*
- (ii) *A álgebra quociente $A/Rad(A)$ é isomorfa a um produto subdireto de álgebras primitivas associativas ou de álgebras de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Seja I_α um ideal à direita modular maximal de A . O ideal $Q_\alpha = (I_\alpha : A)$ é o maior ideal de A contido em I_α . O homomorfismo canônico $A \rightarrow A/Q_\alpha$ leva I_α em I_α/Q_α , que é um ideal à direita modular maximal de A/Q_α e não contém ideais não-nulos de A/Q_α . Logo, A/Q_α é uma álgebra primitiva e segue que Q_α é primitivo. Como $Q_\alpha \subset I_\alpha$ temos então

$$\cap Q \subset \cap Q_\alpha \subset \cap I_\alpha = \text{Rad}(A),$$

em que Q percorre o conjunto dos ideais primitivos de A .

Por outro lado, seja Q um ideal primitivo de A . Então, A/Q é primitiva e segue do Teorema 15 que A/Q é uma álgebra associativa primitiva ou uma álgebra de Cayley-Dickson. Em qualquer caso, $\text{Rad}(A/Q) = \{0\}$. O homomorfismo canônico $A \rightarrow A/Q$ estabelece uma correspondência entre os ideais à direita modulares maximais de A e os de A/Q . Logo, $\text{Rad}(A)$ é levado em $\text{Rad}(A/Q) = \{0\}$. Portanto, $\text{Rad}(A) \subset Q$ e segue que $\text{Rad}(A) \subset \cap Q$.

Como $\text{Rad}(A) = \cap Q$, em que Q percorre o conjunto dos ideais primitivos de A , segue que $A/\text{Rad}(A)$ é um produto subdireto de A/Q . Mas A/Q é uma álgebra associativa primitiva ou uma álgebra de Cayley-Dickson.

A álgebra A é *semiprima* quando $I = \{0\}$ é o único ideal de A tal que $I^2 = \{0\}$. O *radical primo* de A é o menor ideal $P(A)$ de A tal que a álgebra quociente $A/P(A)$ é semiprima. O ideal $P(A)$ pode não ser nilpotente, mas é um nilideal. Um ideal I de A é *primo* quando A/I é prima. O radical $P(A)$ é a interseção dos ideais primos de A .

Os radicais de A estão relacionados pelas seguintes inclusões:

$$P(A) \subset \text{Nil}(A) \subset \text{Rad}(A).$$

Um *anel de Cayley-Dickson* é um subanel B de uma álgebra de Cayley-Dickson C sobre F tal que o centro $Z = Z(B)$ está contido em F e $Z^{-1}B = C$, em que $Z^{-1}B = \{z^{-1}b \mid z \in Z - \{0\}, b \in B\}$.

Teorema 18. (Zhevlakov et al [67])

- (i) Se A é uma álgebra alternativa então $A/P(A)$ é isomorfa a um produto subdireto de álgebras primas.
- (ii) Toda álgebra alternativa prima de característica $\neq 3$, que não é associativa, é um anel de Cayley-Dickson.

4 Álgebras de Jordan

4.1 Álgebras de Jordan Especiais e Excepcionais

As álgebras conhecidas como álgebras de Jordan apareceram pela primeira vez no trabalho de Jordan, von Neumann e Wigner publicado no Annals of Mathematics em 1934. Estes autores mostraram que as propriedades estatísticas de um sistema mecânico quântico ficavam mais simples, quando descritas usando a álgebra $M_n(\mathbb{R})^{(+)}$. Esta álgebra é obtida quando consideramos a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{R})$ e trocamos a multiplicação usual AB das matrizes A e B pela multiplicação

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Uma álgebra é denominada *álgebra de Jordan* se é comutativa e verifica a *identidade de Jordan* $(x^2, y, x) = 0$.

Se A é uma álgebra associativa (ou alternativa), então a álgebra $A^{(+)}$ obtida quando trocamos o produto xy de dois elementos de A pelo *produto de Jordan*

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

é uma álgebra de Jordan.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n ($2 \leq n \leq \infty$) sobre F , $f : V \times V \rightarrow F$ uma forma bilinear simétrica e $J(V, f) = F \oplus V$. Definimos uma multiplicação em $J(V, f)$ da seguinte maneira: $(\alpha + x)(\beta + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) + (\beta x + \alpha y)$. Obtemos uma álgebra de Jordan denominada *álgebra de Jordan de grau 2* ou *álgebra de Jordan da forma bilinear simétrica f* . Esta álgebra é comutativa e é quadrática pois, para todo $a = \alpha + x \in J(V, f)$, temos $a^2 - t(a)a + n(a) = 0$, em que $t(a) = 2\alpha$ e $n(a) = \alpha^2 - f(x, x)$. Reciprocamente, toda álgebra quadrática comutativa A é uma álgebra de Jordan de grau 2. Mais precisamente, $A = J(V, g)$, em que $V = \{x \in A \mid t(x) = 0\}$ e $g(x, y) = xy$ ($x, y \in V$). A álgebra $J(V, f)$ é simples quando f é não-degenerada e não é finitamente gerada quando $n = \infty$.

Seja A uma álgebra com involução $- : a \in A \rightarrow \bar{a} \in A$. Seja $H(A, -) = \{x \in A \mid \bar{x} = x\}$. Temos que $(H(A, -), +, \circ)$ é uma álgebra. Denotemos por A_n a álgebra das matrizes $n \times n$ com coeficientes em A . O operador $-^t : A_n \rightarrow A_n$ definido por $\overline{(a_{ij})}^t = (\bar{a}_{ji})$ é uma involução de A_n . Para simplificar a notação denotamos por $H(A_n)$ a álgebra $H(A_n, -^t)$. Se a involução $-$ satisfaz $a + \bar{a}, a\bar{a} \in F$ ($\forall a \in A$), $H(A_n)$ é uma álgebra de Jordan e $n > 3$, então A é necessariamente associativa.

Se A é uma álgebra associativa (ou alternativa) então $H(A, -)$ é uma subálgebra de $A^{(+)}$, logo, é uma álgebra de Jordan. Denotemos por $C = C(\mu, \beta, \gamma)$ uma álgebra de Cayley-Dickson (veja a Seção 2.2). As álgebras $H(C)$, $H(C_2)$ e $H(C_3)$ são álgebras de Jordan. Como C não é associativa, temos que $H(C_n)$ não é uma álgebra de Jordan para $n > 3$.

Uma álgebra de Jordan J é dita *álgebra de Jordan especial* se existe uma álgebra associativa A tal que J é uma subálgebra de $A^{(+)}$. No caso em que isto não é possível, J é dita uma *álgebra de Jordan excepcional*.

Se A é associativa ou alternativa então $A^{(+)}$ é uma álgebra de Jordan especial. Se A é associativa a afirmação é trivial. Suponhamos que A é alternativa com 1. Consideremos o homomorfismo $L : a \in A \rightarrow L_a \in \text{Hom}(A, A)$, em que $L_a(x) = ax$. Como $L(a \circ b) = L_a \circ L_b$ (para todo $a, b \in A$), temos que L é um homomorfismo de $A^{(+)}$ em $\text{Hom}(A, A)^{(+)}$. Mas se $L_a = 0$ temos que $a = L_a(1) = 0$. Portanto, L é um homomorfismo injetor e $A^{(+)}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\text{Hom}(A, A)^{(+)}$. Se A não tem 1, então usamos a álgebra alternativa com 1 $A^\# = F \oplus A$ no lugar de A .

Seja V um espaço vetorial sobre F com base $\{1, v_1, \dots, v_n\}$ ($1 \leq n \leq \infty$) e seja $f : V \times V \rightarrow F$ uma forma bilinear simétrica. A *álgebra de Clifford $Cl(f)$ da forma f* é a subálgebra da álgebra associativa livre gerada por $v_1, \dots, v_n$ que verifica $v_i v_j + v_j v_i = f(v_i, v_j)$. A álgebra $Cl(f)$ tem base $\{1, v_{i_1} \dots v_{i_k} \mid k \geq 1, i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$. A álgebra $J(V, f)$ é especial pois é isomorfa à subálgebra de $Cl(f)^{(+)}$ com base $\{1, v_1, \dots, v_n\}$.

As álgebras $H(C)$ e $H(C_2)$ são álgebras de Jordan especiais, pois são álgebras do tipo $J(V, f)$. O primeiro exemplo de álgebra de Jordan excepcional, a álgebra $H(C_3)$, foi obtido

por Albert em 1934. Suponhamos, por absurdo, que $H(C_3)$ é uma subálgebra de $A^{(+)}$, em que A é uma álgebra associativa. A aplicação $\sigma : A \rightarrow C$ definida por $\sigma(x) = E_{11}(xE_{12} + \bar{x}E_{21})(E_{12} + E_{21})$ é um homomorfismo. Como C é uma álgebra simples, σ é injetor. Logo, C é isomorfa a uma subálgebra de A . Mas isto é uma contradição pois C não é associativa.

Uma álgebra de Jordan J sobre F é denominada uma *álgebra de Albert* se existe uma extensão K de F tal que $J \otimes_F K \cong H(C_3)$. Toda álgebra de Albert é excepcional, simples e tem dimensão 27 sobre seu centro.

A estrutura das álgebra de Jordan de dimensão finita sobre corpos de característica $\neq 2$ foi obtida por Albert (1946, 1947, 1950), Kalish (1947) e Jacobson (1949).

Toda álgebra de Jordan J é associativa nas potências e logo o nilradical $Nil(J)$ está bem definido. Como no caso das álgebras alternativas, temos os seguintes resultados:

Teorema 19. (Jacobson [43]) *Seja J uma álgebra de Jordan de dimensão finita. Então o nilradical $Nil(J)$ é nilpotente e a álgebra quociente $J/Nil(J)$ é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras simples.*

Teorema 20. (Jacobson [43]) *Seja J uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F . Então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras: F ; $J(V, f)$, em que f é não-degenerada; $H(A_n)$, $n \geq 3$, em que A é uma álgebra com composição e A é associativa para $n > 3$.*

A estrutura das álgebras de Jordan simples de dimensão qualquer é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 21. (Zelmanov [66]) *Seja J uma álgebra de Jordan simples. Então J é isomorfa a uma das seguintes álgebras: $J(V, f)$, em que f é não-degenerada; $A^{(+)}$, em que A é uma álgebra associativa simples; $H(A, -)$, em que A é uma álgebra associativa simples com involução $-$; uma álgebra de Albert.*

Um subespaço K de uma álgebra de Jordan J é denominado um *ideal quadrático* se, para todo $k \in K$ e $a \in J$ temos $2(ka)k - k^2a \in K$. Por exemplo, todo ideal à direita de $A^{(+)}$ é um ideal quadrático de $A^{(+)}$. É claro que todo ideal de J é um ideal quadrático, mas a recíproca não vale. Dizemos que J *satisfaz a condição minimal para ideais quadráticos* se todo conjunto não-vazio de ideais quadráticos de J contem um ideal quadrático minimal.

Como no caso das álgebras alternativas, podemos definir o radical quasi-regular $Rad(J)$ de uma álgebra de Jordan J e temos:

Teorema 22. (Jacobson [43], Zhevlakov et al [67]) *Seja J uma álgebra de Jordan. Suponhamos que J satisfaz a condição minimal para os ideais quadráticos. Então temos:*

- (i) (Slin'ko-Zelmanov) *O radical $Rad(J)$ é nilpotente e tem dimensão finita.*
- (ii) (Jacobson-Osborn) *A álgebra quociente $A/Rad(J)$ é isomorfa a uma soma direta finita de álgebras de Jordan simples que tem uma das seguintes forma: uma álgebra de Jordan com divisão; $H(A, -)$, em que A é uma álgebra associativa artiniana com involução $-$ e é $-$ -simples (i.e., se I é um ideal de A e $\bar{I} \subset I$ então $I = 0$ ou $I = A$); $J(V, f)$, em que f é não-degenerada; uma álgebra de Albert.*

4.2 Álgebras de Jordan Especiais Livres

A álgebra quociente $F[X]/Jord$, em que $Jord$ é o ideal de $F[X]$ gerado pelos elementos da forma $[f_1, f_2]$ e (f_1^2, f_2, f_1) , é denominada *álgebra de Jordan livre* e é denotada por $J[X]$.

A *álgebra de Jordan especial livre* $SJ[X]$ é a subálgebra de $Ass[X]^{(+)}$ gerada por X . Os elementos de $SJ[X]$ são denominados *polinômios de Jordan*. Um elemento f de $Ass[X]$ é um polinômio de Jordan se f pode ser expresso nas variáveis x_i via as operações $+$ e $\circ$. Por exemplo, $x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1$ é um polinômio de Jordan pois

$$x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 = 2 \{ (x_1 \circ x_2) \circ x_3 + (x_2 \circ x_3) \circ x_1 - (x_3 \circ x_1) \circ x_2 \}.$$

Se J é uma álgebra de Jordan especial e $\phi : X \rightarrow J$ é uma aplicação então existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : SJ[X] \rightarrow J$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & SJ[X] \\ & \searrow \phi & \downarrow \bar{\phi} \\ & & J \end{array}$$

é comutativo.

Denotemos por $*$ a involução em $Ass[X]$ definida por

$$(x_1x_2 \dots x_n)^* = x_nx_{n-1} \dots x_1$$

e por $H(X)$ a álgebra $H(Ass[X], *)$. Como $(x \circ y)^* = x \circ y$ é claro que $SJ[X] \subset H[X]$. Se $\text{card} X \leq 3$ então $SJ[X] = H(X)$. Mas se $\text{car}(X) > 3$ temos $SJ[X] \neq H(X)$ pois $x_1x_2x_3x_4 + x_4x_3x_2x_1 \in H[X]$ mas não é um polinômio de Jordan. Se $\text{card}(X) = 1$ é claro que $SJ[X] = Ass[X]^{(+)}$. No entanto, se $\text{card}(X) > 1$ então $SJ[X]$ não é isomorfa a $A^{(+)}$ para toda álgebra associativa A .

Se I é um ideal de $SJ[X]$ e $\hat{I}$ denota o ideal de $Ass[X]$ gerado por I temos $I \subset \hat{I} \cap SJ[X]$. A igualdade ocorre se e somente se $SJ[X]/I$ é uma álgebra de Jordan especial. No caso em que $X = \{x, y\}$ a igualdade sempre ocorre e temos então que toda imagem homomorfa de $SJ[X]$ é uma álgebra de Jordan especial.

A álgebra de Jordan $SJ[x, y, z]/\langle x^2 - y^2 \rangle$ é excepcional, em que $\langle x^2 - y^2 \rangle$ denota o ideal gerado por $x^2 - y^2$. Isto ocorre devido ao fato de que se $v = (x^2 - y^2)xyz + zyx(x^2 - y^2)$ então $v \in H[x, y, z] = SJ[x, y, z]$, $v \in \hat{I}$ mas $v \notin I$.

Teorema 23. *Se J é uma álgebra de Jordan especial com um conjunto enumerável de geradores então J pode ser imersa em uma álgebra de Jordan especial com dois geradores.*

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos supor que J é gerada por $Z = \{z_i := xy^i x\}_{i \geq 1} \subset Ass[x, y]$. Da propriedade universal de $SJ[Z]$ obtemos que existe um homomorfismo sobrejetor ψ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \hookrightarrow & SJ[Z] \\ & \searrow & \downarrow \psi \\ & & J \end{array}$$

comutativo. Seja $I = \ker(\psi)$. Como J é especial e $SJ[Z]/I \cong J$ temos que $SJ[Z]/I$ é especial. Logo, $\hat{I} \cap SJ[Z] = I$. Seja $\tilde{I}$ o ideal de $Ass[x, y]$ gerado por $\hat{I}$. Temos:

$$SJ[Z] \cap \tilde{I} = SJ[Z] \cap Ass[Z] \cap \tilde{I} = SJ[Z] \cap \hat{I} = I.$$

Logo,

$$J \cong SJ[Z]/I = SJ[Z]/(SJ[Z] \cap \tilde{I}).$$

Como $xy^i x = 2(y^i \circ x) \circ x - y^i \circ x^2$ a álgebra $SJ[Z]/(SJ[Z] \cap \tilde{I})$ está contida na subálgebra de $(Ass[Z]/\tilde{I})^{(+)}$ gerada por $x + \tilde{I}$ e $y + \tilde{I}$ e então J pode ser imersa nesta subálgebra.

Teorema 24. (Shirshov) *Toda álgebra de Jordan com dois geradores é especial.*

Demonstração. Toda imagem homomorfa de $SJ[x, y]$ é uma álgebra de Jordan especial. Por outro lado, existe um isomorfismo $\psi : SJ[x, y] \rightarrow J[x, y]$ tal que $\psi(x) = x$, $\psi(y) = y$.

Seja J uma álgebra de Jordan com dois geradores x , y . Pela propriedade universal da álgebra de Jordan livre $J[x, y]$ temos um homomorfismo sobrejetor θ que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \{x, y\} & \hookrightarrow & J[x, y] \\ & \searrow & \downarrow \theta \\ & & J \end{array}$$

Logo, $\theta \circ \psi : SJ[x, y] \rightarrow J$ é um homomorfismo sobrejetor. A álgebra J é então uma imagem homomorfa de $SJ[x, y]$ e segue que J é especial.

Em 1959, Albert e Paige estabeleceram que se $H(A_n)$ é uma imagem homomorfa de uma álgebra de Jordan especial então A é associativa. Logo, como a álgebra de Cayley-Dickson C não é associativa, segue que $H(C_3)$ não é a imagem homomorfa de uma álgebra de Jordan especial. Como $H(C_3)$ tem 3 geradores, isto mostra que o resultado enunciado no Teorema 24 é o melhor que se pode conseguir.

Usando a propriedade universal das álgebras $F[x_1, \dots, x_n]$ e $J[x_1, \dots, x_n]$ encontramos homomorfismos sobrejetores α, β e π_n que tornam comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\beta} & J[x_1, \dots, x_n] \\ & \searrow \alpha & \downarrow \pi_n \\ & & SJ[x_1, \dots, x_n] \end{array}$$

Seja $f \in F[x_1, \dots, x_n]$. Se f é uma identidade em $SJ[x_1, \dots, x_n]$ então $\alpha(f) = 0$ e logo $\pi_n(\beta(f)) = \alpha(f) = 0$, isto é, $\beta(f) \in \ker(\pi_n)$. Agora, se f não é uma identidade em $J[x_1, \dots, x_n]$ temos que $\beta(f) \neq 0$ e logo $\ker(\pi_n) \neq \{0\}$. Reciprocamente, se $\ker(\pi_n) \neq \{0\}$ então existe uma identidade que vale em $SJ[x_1, \dots, x_n]$ mas não vale em $J[x_1, \dots, x_n]$.

Toda identidade em duas variáveis que vale em $SJ[x, y]$ vale em qualquer álgebra de Jordan pois $\ker(\pi_2) = \{0\}$ já que $SJ[x, y]$ e $J[x, y]$ são isomorfas. Em 1960, Macdonald mostrou que este resultado continua válido quando temos 3 variáveis x_1, x_2, x_3 e a identidade é de grau ≤ 1 em x_3 . Olhando novamente para $H(C_3)$ vemos que $\ker(\pi_3) \neq \{0\}$. Logo, existem identidades que valem para as álgebras de Jordan especiais mas não vale para todas as álgebras de Jordan. Estas identidades são chamadas *identidades especiais*.

Analisando a prova dada por Albert e Paige, Glennie encontrou em 1966 a identidade especial (4) abaixo que tem grau 8 e também outra de grau 9. Em 1970, Glennie provou que não existem identidades especiais de grau ≤ 7 em qualquer número de variáveis sobre um corpo de característica 0. Veja também Hentzel [37].

Denotemos por $\{abc\}$ a expressão $(ab)c + (cb)a - (ac)b$ e por U_a o operador $2R_a^2 - R_a^2$, em que $R_x(y) = yx$. As seguintes identidades valem para toda álgebra de Jordan:

$$\{xyx\}^2 = \{x\{yx^2y\}x\}, \quad (2)$$

$$U_{U_y(x)}(z) = U_y U_x U_y(z). \quad (3)$$

De fato, pelo resultado de Macdonald basta mostrar que estas identidades valem em $SJ[x, y]$ e fazemos isto tratando todos os produtos como produtos de Jordan e expandindo.

Glennie encontrou as seguintes identidades especiais:

$$\begin{aligned} & 2 \{ \{y\{xzx\}y\}z(xy) \} - \{y\{x\{z(xy)z\}x\}y\} \\ & - 2 \{ (xy)z\{x\{yzzy\}x\} \} + \{x\{y\{z(xy)z\}y\}x\} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & 2 (\{xzx\}) (\{y\{zy^2z\}x\}) - 2 (\{yzzy\}) (\{x\{zx^2z\}y\}) \\ & - \{x\{z\{x\{yzzy\}y\}z\}x\} + \{y\{z\{y\{xzx\}x\}z\}y\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Para verificar que estas duas últimas identidades valem em $SJ[x, y, z]$ é só expandir. Em $H(C_3)$, a identidade (4) não é satisfeita pelos elementos

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & u & v \\ \bar{u} & 0 & w \\ \bar{v} & \bar{w} & 0 \end{bmatrix}$$

e (5) não é satisfeita pelos elementos

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & u & v \\ \bar{u} & 0 & w \\ \bar{v} & \bar{w} & 0 \end{bmatrix},$$

em que $u, v, w \in C$ e $(u, v, w) \neq 0$.

O grau mínimo que uma identidade especial pode ter é 8. Logo, para verificar que uma identidade de grau ≤ 7 vale em toda álgebra de Jordan, basta verificar que ela vale em $SJ[x_1, \dots, x_n]$, em que n é o grau da identidade considerada.

5 Álgebras de Bernstein

As álgebras de Bernstein foram introduzidas nos anos 70 e desde então foram publicados cerca de 150 artigos sobre estas álgebras. Neste capítulo, vamos ver como as álgebras de Bernstein surgiram e mencionar alguns de seus aspectos. Alguns dos outros aspectos não mencionados aqui podem ser encontrados nos seguintes artigos: [1, 3, 9, 13, 14, 18, 19, 20, 24, 26, 27, 29, 46, 49, 52, 54].

5.1 O Problema de Bernstein

Em 1923 Bernstein propôs o problema da descrição explícita de todos os operadores evolução que atingem o equilíbrio na segunda geração.

Sejam $a_1, \dots, a_n$ n tipos hereditários. Denotemos por δ_{ijk} a probabilidade de obtermos a_k a partir de a_i e a_j ($\delta_{ijk} = \delta_{jik} \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \delta_{ijk} = 1$). Se $x = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_1, \dots, x_n \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, representa a distribuição de frequências dos tipos hereditários em uma dada geração, então a distribuição de frequências na geração seguinte é $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, em que $x'_k = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \delta_{ijk}$ ($k = 1, \dots, n$). O *operador evolução* é o operador quadrático V definido por $V(x) = x'$. A população atinge o equilíbrio na segunda geração se e somente se $V^2 = V$; neste caso, dizemos que o operador V é *estacionário*. Bernstein resolveu o problema para $n = 3$ e obteve resultados para n arbitrário em certos casos.

A seguir temos dois exemplos.

Exemplo 1. Seja V o operador quadrático dado por

$$x'_1 = (x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2, \quad x'_2 = (x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2, \quad x'_3 = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_3)(x_2 + \frac{1}{2}x_3),$$

em que $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Se $P = (p_1, p_2)$, $p_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_3$, $p_2(x) = x_2 + \frac{1}{2}x_3$ e $Q(p_1, p_2) = (p_1^2, p_2^2, 2p_1p_2)$, então $V = QP$. Temos:

$$p_1(x') = x'_1 + \frac{1}{2}x'_3 = p_1(x)^2 + p_1(x)p_2(x) = p_1(x)[p_1(x) + p_2(x)] = p_1(x),$$

já que $p_1(x) + p_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Analogamente, $p_2(x') = p_2(x)$. Logo, $PV = P$. Segue então que $V^2 = QPV = QP = V$.

O operador dado no Exemplo 1 é conhecido como *operador de Hardy-Weinberg* e foi obtido independentemente por Hardy e Weinberg em 1908. A descoberta deste operador foi importante para o desenvolvimento da genética de populações. Uma das interpretações que pode ser dada é a de que este operador é o operador evolução de uma população com gene dominante A e recessivo a e tipos hereditários $a_1 = AA$, $a_2 = aa$ e $a_3 = Aa$.

Exemplo 2. (*Lei da Quadrilha*) Seja V o operador quadrático dado por

$$x'_1 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3), \quad x'_2 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_4),$$

$$x'_3 = (x_3 + x_4)(x_1 + x_3), \quad x'_4 = (x_3 + x_4)(x_2 + x_4),$$

em que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Temos $V = QP$, em que

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4),$$

$$p_1(x) = x_1 + x_2, \quad p_2(x) = x_3 + x_4, \quad p_3(x) = x_1 + x_3, \quad p_4(x) = x_2 + x_4,$$

$$Q(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1p_3, p_1p_4, p_2p_3, p_2p_4).$$

É imediato verificar que $PV = P$ e logo que $V^2 = V$.

Lyubich deu a seguinte interpretação para o operador dado no Exemplo 2. Consideremos uma população com genes femininos X, x e genes masculinos Y, y . Os tipos hereditários que aparecem são sempre híbridos e são os seguintes: $a_1 = XY$, $a_2 = Xy$, $a_3 = xY$ e $a_4 = xy$. Existe diferenciação pelo sexo entre os genes mas não entre os zigotos. O operador evolução desta população é dado pela lei da quadrilha.

Denotemos por σ^{n-1} o simplexo $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Seja $V : \sigma^{n-1} \rightarrow \sigma^{n-1}$ um operador evolução. Uma forma linear $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *invariante* se $p(V(x)) = p(x)$ para todo $x \in \sigma^{n-1}$. O conjunto de todas as formas invariantes é um

espaço vetorial e o conjunto das formas invariantes com coeficientes não-negativos é um cone neste espaço. Sejam $p_1, \dots, p_s$ uma base para este cone, normalizada no sentido de que o maior coeficiente de cada forma p_i é 1. A transformação linear $P : \sigma^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^s$, dada por $P = (p_1, \dots, p_s)$, é denominada *operador meiose* e representa a transformação de zigotos em gametas. Dizemos que o operador V tem *estrutura gênica* se existe uma transformação quadrática $Q : \mathbb{R}^s \rightarrow \sigma^{n-1}$ com coeficientes não-negativos tal que $V = QP$; neste caso, $x'_k = \sum_{i,j=1}^n p_i(x) p_j(x) \delta_{ijk} (k = 1, \dots, n)$. Esta transformação Q é denominada *operador fertilização* e descreve a formação de zigotos a partir da união de gametas. Quando as formas $p_1, \dots, p_s$ são linearmente independentes, dizemos que V tem *estrutura gênica elementar*. No caso contrário, dizemos que V tem *estrutura gênica não-elementar*. O operador dado no Exemplo 1 tem estrutura gênica elementar enquanto que aquele dado no Exemplo 2 tem estrutura gênica não-elementar. Todo operador evolução com estrutura gênica é estacionário.

O operador V é dito *normal* quando a população que ele descreve tem as seguintes propriedades: nenhum tipo hereditário desaparece (isto é, $x'_i \neq 0$); dois tipos hereditários não são do mesmo tipo (isto é, x'_i não é um múltiplo de x'_j quando $i \neq j$); dois tipos hereditários não podem ser unificados (isto é, o operador depende de x_i e x_j e não de $x_i + x_j$).

Nos anos 70, Lyubich obteve os resultados que vamos descrever a seguir.

Teorema 25. (Lyubich [50]) *Um operador evolução tem estrutura gênica elementar e é normal se e somente se (a menos de permutações de coordenadas) tem a seguinte forma:*

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_1^2 + 2 p_1 \sum_{k \neq 1} a_{1k} p_k, \dots, x'_s = p_s^2 + 2 p_s \sum_{k \neq s} a_{sk} p_k \quad (1 \leq k \leq s), \\ x'_{s+1} &= 2 b_1 p_{i_1} p_{k_1}, \dots, x'_n = 2 b_\delta p_{i_\delta} p_{k_\delta}, \\ s \geq 2, \delta &= n - s \geq 1, i_1 < k_1, \dots, i_\delta < k_\delta, \text{ nenhum dos pares } (i_1, k_1), \dots, (i_\delta, k_\delta) \text{ coincidem,} \end{aligned}$$

$$p_k = x_k + \sum_{l=1}^{\delta} c_{kl} x_{s+l} \quad (k = 1, \dots, s),$$

os coeficientes a_{ik}, b_j, c_{kl} estão contidos em $[0, 1]$, $b_j > 0$, $c_{i_1 1} > 0$, $c_{k_1 1} > 0, \dots, c_{k_\delta \delta} > 0$, os c_{kl} restantes são nulos,

$$c_{i_l l} + c_{k_l l} = 1, \quad a_{i_l k_l} + c_{i_l l} b_l = \frac{1}{2}, \quad a_{k_l i_l} + c_{k_l l} b_l = \frac{1}{2}.$$

($l = 1, \dots, \delta$) e, finalmente, para os pares (i, k) que ainda não foram considerados,

$$a_{ki} = a_{ik} = \frac{1}{2}.$$

A lei da quadrilha pode ser generalizada. Seja $n = kl$ com $k, l > 1$. O elemento $x = (x_1, \dots, x_n)$ pode ser escrito na forma matricial

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_l \\ x_{l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{(k-1)l+1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{kl} \end{bmatrix}$$

Denotemos por $p_i(x)$ e $q_j(x)$ a soma dos elementos da i -ésima linha e da j -ésima coluna, respectivamente. A lei da quadrilha generalizada é o operador evolução dada por

$$x' = \begin{bmatrix} p_1 q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & p_1 q_l \\ p_2 q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & p_2 q_l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_k q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & p_k q_l \end{bmatrix}.$$

O operador meiose é dado por $P = (p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l)$ e o operador fertilização por

$$Q(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l) = (p_1 q_1, \dots, p_1 q_l, p_2 q_1, \dots, p_k q_l).$$

Temos $V = QP$ e este operador tem estrutura gênica não-elementar.

Teorema 26. (*Lyubich [50]*) *Seja V um operador evolução normal com estrutura gênica. Então, V tem estrutura gênica elementar ou é uma lei da quadrilha generalizada.*

Assim, o problema de Bernstein com certas restrições foi resolvido por Lyubich. Estas restrições foram impostas para que o problema não saísse do campo da genética. Lyubich forneceu dois possíveis modelos genéticos: um é descrito por um operador do tipo dado pelo Teorema 25 e o outro pela lei da quadrilha generalizada.

Lyubich conjecturou que todo operador evolução estacionário e normal tem estrutura gênica. Esta conjectura foi confirmada por Gutiérrez Fernández [36]. Portanto, no Teorema 26, a hipótese com estrutura gênica pode ser substituída por estacionário.

5.2 Álgebras de Bernstein

Lyubich (e também Holgate [40]) introduziu o conceito de álgebra de Bernstein, fornecendo uma formulação algébrica para o problema de Bernstein.

Seja $V(x) = x'$ o operador evolução dado por $x'_k = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \delta_{ijk}$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Introduzindo em $\mathbb{R}^n$ a multiplicação dada por $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \delta_{ijk} e_k$, obtemos uma álgebra A_V . Em termos da álgebra A_V , $V(x) = x^2$ e a estabilidade na segunda geração é expressa por $x^2 x^2 = x^2$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$). É imediato verificar que a forma linear $\omega_V : A_V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\omega_V(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ é um homomorfismo e que $x^2 x^2 = \omega_V(x)^2 x^2$, para todo $x \in A_V$.

Uma *álgebra de Bernstein* é um par (A, ω) consistindo de uma álgebra não-associativa comutativa A sobre um corpo F e um homomorfismo não-nulo $\omega : A \rightarrow F$ tais que

$$x^2 x^2 = \omega(x)^2 x^2 \quad (\forall x \in A). \quad (6)$$

É importante observar que ω é unicamente determinado: se (A, ω_1) e (A, ω_2) são álgebras de Bernstein então $\omega_1 = \omega_2$.

Em particular, (A_V, ω_V) é uma álgebra de Bernstein.

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre um corpo F de característica $\neq 2$. Se $y \in A$ e $\omega(y) \neq 0$, seja $x = (\omega(y))^{-1} y$. Da identidade (6) segue que x^2 é um idempotente. Escolhendo um idempotente e temos a soma direta (de espaços vetoriais) $A = Ke \oplus N$, em que N é o núcleo de ω . Se R_e denota a multiplicação à direita por e atuando sobre N , temos $2R_e^2 = R_e$. Isto fornece a decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, em que U é o núcleo de $2R_e - I$ e

V é o núcleo de R_e , isto é, $U = \{n \in N \mid en = \frac{1}{2}n\}$, $V = \{n \in N \mid en = 0\}$. Os subespaços U e V satisfazem

$$U^2 \subset V, \quad UV \subset U, \quad V^2 \subset U, \quad UV^2 = \{0\}.$$

A decomposição acima depende da escolha do idempotente. No entanto, quando a dimensão de A é finita, a dimensão de U e consequentemente a dimensão de V são invariantes de A . Neste caso, o par $(\dim U + 1, \dim V)$ é denominado o *tipo* de A .

A condição $U^2 = \{0\}$ não depende do idempotente e define a subclasse das álgebras de Bernstein *excepcionais*. As condições $UV = \{0\}$ e $V^2 = \{0\}$ também não dependem do idempotente e definem a subclasse das álgebras de Bernstein *regulares*.

O problema da classificação das álgebras de Bernstein tem-se mostrado difícil. Como observado por Lyubich, existem obstáculos a uma classificação em geral pois esta classificação contém como subproblema, por exemplo, a classificação de formas quadráticas. No entanto, certos teoremas de classificação tem sido obtidos. Por exemplo, Lyubich classificou as álgebras de Bernstein de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ de tipos $(n, 0)$, $(n - 1, 1)$, $(1, n - 1)$ e $(2, n - 2)$ e as álgebras de tipo $(3, n - 3)$ que são excepcionais. Gutiérrez Fernández et al [32] obteve a classificação das álgebras de Bernstein de tipo $(2, n - 2)$ e das álgebras de Bernstein de tipo $(3, n - 3)$ que não são excepcionais sobre um corpo qualquer de característica $\neq 2$.

Retornando ao problema de Bernstein, observamos que um operador evolução V tem estrutura gênica se e somente se a álgebra de Bernstein (A_V, ω_V) é regular; neste caso, o operador V é denominado *regular*. Dizemos que o operador evolução V é *excepcional* quando (A_V, ω_V) é excepcional.

A classificação dos operadores evolução regulares e excepcionais foi obtida por Lyubich nos anos 70. Mais recentemente, nos anos 90, Gutiérrez Fernández [36] obteve a descrição dos operadores não-regulares, completando a classificação.

5.3 Nilpotência e Solubilidade do Núcleo

Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e $N = \ker(\omega)$. Nesta seção vamos considerar a seguinte questão: N é nilpotente ou solúvel? Vejamos inicialmente dois exemplos.

Exemplo 3. Seja $A = Z_5 \oplus Z_5 \oplus Z_5$ munido da multiplicação

$$(k_1, a_1, b_1)(k_2, a_2, b_2) = (k_1 k_2, \frac{1}{2}k_1 a_2 + \frac{1}{2}k_2 a_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2, 0).$$

É fácil ver que o par (A, ω) onde $\omega(k, a, b) = k$ é uma álgebra de Bernstein. O núcleo de ω é $N = \{0\} \oplus Z_5 \oplus Z_5$. Se $a = (0, 1, 0)$ e $b_i = (0, 0, 1)$ ($1 \leq i \leq n$) temos

$$(\dots((ab_1)b_2)b_3)\dots b_n = a \neq 0.$$

Logo, N não é nilpotente.

Exemplo 4. Zhevlakov deu o seguinte exemplo de uma nilálgebra comutativa N de nilíndice 3. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dizemos que o monômio $(\dots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\dots)x_{i_n}$ é *regular* se $i_1 < i_2 < \dots < i_n$. Os monômios regulares formam uma base para N , e a multiplicação $*$ é definida por: $x_i * x_j = x_i x_j$; $u * v = 0$ se u e v tem pelo menos duas

variáveis; $u * x_i = 0$ se x_i aparece em u ; $u * x_i = 0$ se $u = x_{i_1} \dots x_{i_k}$, $k \geq 2$ e $i < i_1$; $u * x_i = \text{signal}(\sigma)(\dots(\dots x_{i_1} \dots)x_i \dots)x_{i_s}$, $k \geq 2$, $i > i_1$ e σ é a permutação que leva x_i na posição correta. A álgebra N não é finitamente gerada e não é nilpotente. Para transformar N em uma álgebra de Bernstein A , acrescentamos um idempotente e obtendo $A = Fe \oplus N$, e definimos a ação deste idempotente sobre os monômios regulares da seguinte maneira: U é formado pelos monômios regulares com um número ímpar de variáveis e V é formado pelos monômios regulares com um número par de variáveis. Temos que $V = U^2$ e logo $A^2 = A$.

Odoni e Stratton [55] e Grishkov [31] provaram que se A é uma álgebra de Bernstein de dimensão finita e $A^2 = A$ então N é nilpotente. Grishkov conjecturou que no caso em que A é finitamente gerada por n geradores então existe $c = c(n)$ tal que N é nilpotente de índice $\leq c$. Peresi [57] mostrou que a conjectura de Grishkov é verdadeira, isto é, mostrou que N é nilpotente, mas sem encontrar c . Krapivin [47] também provou esta conjectura encontrando c .

Teorema 27. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein finitamente gerada tal que $A^2 = A$. Então N é nilpotente.*

Demonstração. Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a decomposição de A relativa a um idempotente e . Sejam $L = U_0(A) = \{u \in U \mid uU = \{0\}\}$ e $M = \{x \in N \mid xN \subset L\}$. O conjunto $U_0(A)$ é um ideal de A (veja a Seção 5.4). Temos que $n^3 \in L$, para todo $n \in N$. Logo, N/L é uma nilálgebra de nilíndice 3. Temos que M é um ideal de N e que N/M é uma álgebra de Jordan especial. Isto significa que N/M é isomorfa a uma subálgebra de $E^{(+)}$, em que E é uma álgebra associativa. No nosso caso, E é a álgebra dos endomorfismos de $(N/L, +)$. Como N/M é isomorfa ao quociente de N/L por M/L , temos que N/M também é uma nilálgebra de índice 3. É conhecido que toda nilálgebra de Jordan especial de índice finito é localmente nilpotente, isto é, toda subálgebra finitamente gerada é nilpotente (Zhevlakov et al [67], p. 114). Logo, N/M é nilpotente (aqui estamos usando a hipótese de que A é finitamente gerada). Temos então que $(N/M)^r = \{0\}$ para algum r , isto é, $N^r \subset M$. Portanto, $(N^r N)N \subset (MN)N \subset LN = \{0\}$ e, como A é comutativa, disto segue que N é nilpotente.

Os Exemplos 3 e 4 acima mostram que as hipóteses impostas para se obter a nilpotência de N não são redundantes: somente finitamente gerada ou somente $A^2 = A$ não é suficiente para implicar que N é nilpotente.

Suazo [63] mostrou que toda álgebra de Bernstein finitamente gerada A tal que $A^2 = A$ tem dimensão finita.

Em [38], Hentzel e Peresi provaram que N é solúvel quando A é finitamente gerada. Em [39], Hentzel et al provaram que para toda álgebra de Bernstein N^2 é nilpotente de índice no máximo 9. Como uma consequência deste fato obtiveram que N é solúvel de índice no máximo 5.

Estes resultados foram melhorados e o melhor resultado que temos atualmente é o seguinte:

Teorema 28. *(Bernad et al [5]) Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Então, temos:*
(i) N é solúvel de índice no máximo 3, isto é, $N^{(3)} = \{0\}$.
(ii) N^2 é nilpotente de índice no máximo 5, isto é, $(N^2)^5 = \{0\}$.

Existem outras classes de álgebras que surgiram a partir da descrição de modelos genéticos. Uma destas classes é a das álgebras genéticas. Uma álgebra comutativa A de dimensão n é *genética* se tem uma base $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ tal que, se $e_i e_j = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{ijk} e_k$, então temos: $\delta_{000} = 1$, $\delta_{0ik} = 0$ ($0 \leq k < i \leq n-1$), $\delta_{ijk} = 0$ ($0 \leq k \leq \max(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n-1$). Lyubich provou que uma álgebra de Bernstein (A, ω) de dimensão n é uma álgebra genética se e somente se N é nilpotente. Portanto, toda álgebra de Bernstein (A, ω) de dimensão finita satisfazendo $A^2 = A$ é uma álgebra genética.

5.4 Estrutura das Álgebras de Bernstein

As álgebras de Bernstein (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são *isomorfas* se existe um isomorfismo $\phi : A_1 \rightarrow A_2$ que satisfaz a condição $\omega_1 = \omega_2 \phi$.

Seja $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ uma família de álgebras de Bernstein. O produto direto $\prod_{i \in I} (A_i, \omega_i)$ é uma álgebra, mas não é de Bernstein quando I tem pelo menos dois elementos. Consideremos em $\prod_{i \in I} (A_i, \omega_i)$, a subálgebra

$$\times_{i \in I} (A_i, \omega_i) = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} A_i \mid \omega_i(x_i) = \omega_j(x_j), \forall i, j \in I\}.$$

Se definimos $\omega : \times_{i \in I} (A_i, \omega_i) \rightarrow F$ por $\omega((x_i)) = w_i(x_i)$, obtemos que $(\times_{i \in I} (A_i, \omega_i), \omega)$ é uma álgebra de Bernstein, denominada o *produto direto* de $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$.

Uma álgebra de Bernstein (A, ω) é denominada *decomponível* se existem álgebras de Bernstein (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) não triviais (isto é, não isomorfas a F) tais que $(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2)$. No caso contrário, dizemos que (A, ω) é *indecomponível*.

Teorema 29. (Cortés e Montaner [15], Costa e Guzzo [17])

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de dimensão finita. Então temos:

- (i) A álgebra (A, ω) é isomorfa a um produto direto de um número finito de álgebras de Bernstein indecomponíveis.
- (ii) Suponhamos que

$$(A, \omega) \cong (A_1, \omega_1) \times \dots \times (A_n, \omega_n) \cong (B_1, \tau_1) \times \dots \times (B_m, \tau_m)$$

são duas decomposições de A como um produto direto de álgebras de Bernstein indecomponíveis. Então $n = m$ e, após uma reordenação dos índices, temos que $(A_i, \omega_i) \cong (B_i, \tau_i)$.

Se e é um idempotente de uma álgebra de Bernstein (A, ω) e $A = Fe \oplus U \oplus V$ então o conjunto dos idempotentes de (A, ω) é $I(A) = \{e + u + u^2 \mid u \in U\}$. Dizemos que (A, ω) é uma *álgebra de Bernstein-Jordan* se as seguintes condições equivalentes são satisfeitas: A é uma álgebra de Jordan; para todo $g \in I(A)$, se $A = Fg \oplus U_g \oplus V_g$ é a decomposição de Peirce de A relativa a g , temos $V_g^2 = \{0\}$; (A, ω) satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, para todo $x \in A$.

O conjunto $U_0(A) = \{u \in U \mid uU = \{0\}\}$ é um ideal de A e $A/U_0(A)$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan. O ideal $U_0(A)$ não depende da escolha do idempotente pois $U_0(A) = \bigcap_{g \in I(A)} U_g$ (veja Cortés e Montaner [15]).

O fato de que $A/U_0(A)$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan foi mostrado por Hentzel e Peresi [38] e também por González e Martínez [23], e foi fundamental para o desenvolvimento da teoria das álgebras de Bernstein. Como um exemplo de aplicação deste fato, mencionamos

o resultado obtido por Gradl e Walcher [30] sobre o comportamento da equação de Andreoli para o caso das álgebras de Bernstein. A equação diferencial $x' = x^2 - x$, $x(0) = y$, é denominada *equação de Andreoli* e serve para modelar a dependência ao longo do tempo das frequências de genótipos de uma população. Gradl e Walcher mostraram o seguinte resultado: se (A, ω) é um álgebra de Bernstein satisfazendo $A^2 = A$ e $s(y, t)$ é a solução da equação $x' = x^2 - x$, $x(0) = y$, $\omega(y) = 1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} s(y, t) = y^3$.

Dizemos que uma álgebra de Bernstein (A, ω) é *reduzida* quando $U_0(A) = \{0\}$. Para toda álgebra de Bernstein (A, ω) , a álgebra quociente $A/U_0(A)$ é uma álgebra de Bernstein reduzida.

Cortés e Montaner [15] sugeriram o seguinte enfoque para a estrutura das álgebras de Bernstein (A, ω) de dimensão finita: o primeiro passo é fazer o quociente da álgebra pelo ideal $U_0(A)$ para obter uma álgebra reduzida; o segundo é decompor esta álgebra reduzida como um produto direto de álgebras indecomponíveis; o passo final consiste em classificar as álgebras de Bernstein-Jordan indecomponíveis. Este procedimento funciona para dimensões pequenas, pois já em dimensão 7 aparece um número infinito de álgebras de Bernstein-Jordan indecomponíveis não-isomorfas.

Cortés e Montaner [16] usaram o enfoque sugerido acima para classificar as álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão ≤ 5 sobre um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2$. Inicialmente, estes autores descreveram todas as álgebras de Bernstein reduzidas de dimensão ≤ 5 através de seus fatores indecomponíveis. Em seguida, descreveram as álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão ≤ 5 usando o seguinte argumento: se (A, ω) é uma tal álgebra então $A/U_0(A)$ é reduzida, logo, é uma das álgebras já listadas; em seguida, obtiveram a álgebra A a partir de $A/U_0(A)$. A classificação das álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão ≤ 4 já era conhecida.

Uma álgebra de Bernstein de dimensão ≤ 5 sobre um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2$ é reduzida e indecomponível se e somente se é isomorfa a uma das seguintes álgebras:

$$\begin{aligned} A_0 &= Fe, \quad A_1 = Fe \oplus Fv, \quad A_2 = Fe \oplus Fu \oplus Fv, \quad u^2 = v, \\ A_3 &= Fe \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv, \quad u_1 u_2 = v, \\ A_4 &= Fe \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fu_3 \oplus Fv, \quad u_i^2 = v, \\ B_4 &= Fe \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2, \quad u_1^2 = v_1, \quad u_1 u_2 = v_2, \end{aligned}$$

em que $e^2 = e$, $u, u_1, u_2, u_3 \in U$ e $v, v_1, v_2 \in V$ e todos os produtos não listados são zeros.

Por outro lado, se (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são duas álgebras de Bernstein, então o produto direto $(A_1, \omega_1) \times (A_2, \omega_2)$ é reduzida se e somente se (A_1, ω_1) e (A_2, ω_2) são reduzidas.

Portanto, temos:

Teorema 30. (Cortés e Montaner [16]) *Uma álgebra de Bernstein de dimensão ≤ 5 sobre um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2$ é reduzida se e somente se é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

- (i) A_0 de dimensão 1;
- (ii) A_1 de dimensão 2;
- (iii) $A_2, A_1 \times A_1$ de dimensão 3;
- (iv) $A_3, A_1 \times A_2, A_1 \times A_1 \times A_1$ de dimensão 4;

(v) $A_4, B_4, A_1 \times A_3, A_2 \times A_2, A_1 \times A_1 \times A_2, A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ de dimensão 5.

Consideremos também as seguintes álgebras de Bernstein indecomponíveis mas não reduzidas:

$$\begin{aligned} C_1 &= Fe \oplus Fu, \quad C_3 = Fe \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv, \quad u_1v = u_2, \\ D_4 &= Fe \oplus Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2, \quad u_1^2 = v_1, \quad u_1v_2 = u_2, \end{aligned}$$

em que $u, u_1, u_2 \in U, v, v_1, v_2 \in V$ e todos os produtos não listados são zeros.

Teorema 31. (Cortés e Montaner [16]) *Toda álgebra de Bernstein-Jordan de dimensão ≤ 5 sobre um corpo algebricamente fechado de característica $\neq 2$ é isomorfa a exatamente uma das seguintes álgebras:*

$$\begin{aligned} \text{dimensão 1:} & \quad A_0, \\ \text{dimensão 2:} & \quad C_1, \quad A_1, \\ \text{dimensão 3:} & \quad C_1 \times C_1, \quad C_1 \times A_1, \quad A_1 \times A_1, \quad A_2, \\ \text{dimensão 4:} & \quad C_1 \times C_1 \times C_1, \quad C_1 \times C_1 \times A_1, \quad C_1 \times A_1 \times A_1, \quad A_1 \times A_1 \times A_1, \\ & \quad C_1 \times A_2, \quad A_1 \times A_2, \quad C_3, \quad A_3, \\ \text{dimensão 5:} & \quad C_1 \times C_1 \times C_1 \times C_1, \quad C_1 \times C_1 \times C_1 \times A_1, \quad C_1 \times C_1 \times A_1 \times A_1, \\ & \quad C_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1, \quad A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1, \quad C_1 \times C_1 \times A_2, \\ & \quad C_1 \times A_1 \times A_2, \quad A_1 \times A_1 \times A_2, \quad C_1 \times C_3, \quad C_1 \times A_3, \\ & \quad A_1 \times C_3, \quad A_1 \times A_3, \quad A_2 \times A_2, \quad D_4, \quad B_4, \quad A_4. \end{aligned}$$

Usando método diferente, Correa e Peresi obtiveram a classificação das álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão 5 sobre o corpo dos números reais, que não é algebricamente fechado. Mais precisamente, temos:

Teorema 32. (Correa e Peresi [10]) *Existem 20 álgebras de Bernstein-Jordan não isomorfas de dimensão 5 sobre $\mathbb{R}$. As tábuas de multiplicação são dadas por:*

(Somente os produtos não-nulos são listados.)

$$I. \quad N^2 = \{0\}, \quad N = \langle u_i, z_j \rangle, \quad \text{tipo } (1+n, 4-n).$$

$$e^2 = e, \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i \quad (\text{se } n \geq 1 \quad e \quad 1 \leq i \leq n)$$

em que $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$$II. \quad \dim N^2 = 1, \quad N = \langle u_i, z_j \rangle, \quad N^2 = \mathbb{R}c.$$

$$II.1. \quad e^2 = e, \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i, \quad u_i^2 = \alpha_i c \quad (i = 1, 2, 3)$$

em que $c \in V$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um elemento do conjunto

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}.$$

$$II.2. \quad e^2 = e, \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i, \quad u_i^2 = \alpha_i c \quad (i = 1, 2)$$

em que $c \in V$ e $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1, 0), (1, 1), (1, -1)\}$.

$$II.3. \quad e^2 = e, \quad eu_1 = \frac{1}{2}u_1, \quad u_1^2 = c.$$

$$II.4. \quad e^2 = e, \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad u_1z_1 = u_3.$$

$$\begin{aligned}
II.5. \quad & e^2 = e, \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i \quad (i = 1, 2), \quad u_1z_1 = u_2. \\
III. \quad & \dim N^2 = 2, \quad N = \langle x, y, x^2, xy \rangle \\
III.1. \quad & e^2 = e, \quad ex = \frac{1}{2}x, \quad e.xy = \frac{1}{2}xy, \quad x.x = x^2, \\
& x.y = xy. \\
III.2. \quad & e^2 = e, \quad ex = \frac{1}{2}x, \quad ey = \frac{1}{2}y, \quad x.x = x^2, \\
& x.y = xy, \quad y^2 = \lambda x^2
\end{aligned}$$

em que $\lambda \in \{0, 1, -1\}$.

González et al [28] introduziram o conceito de radical e de álgebra completa para as álgebras de Bernstein de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica 0.

Denotemos por $End(A^2)$ a álgebra (associativa) dos homomorfismos de A^2 em A^2 e por $Ass(A)$ a subálgebra de $End(A^2)$ gerada pelas multiplicações à direita R_a ($a \in A$). O *radical* de A é o conjunto

$$R(A) = \{x \in A \mid R_x \in J(Ass(A))\},$$

em que $J(Ass(A))$ é o radical de Jacobson de $Ass(A)$ (veja a Seção 1.3).

Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein e $t : A \rightarrow A$ é uma aplicação, definimos a álgebra A_1 e o homomorfismo ω_1 da seguinte maneira: $A_1 = A \oplus Ft$ e a multiplicação é dada por

$$\begin{aligned}
(a_1 + \alpha_1 t)(a_2 + \alpha_2 t) &= a_1 a_2 + \alpha_2 t(a_1) + \alpha_1 t(a_2), \\
w_1(a) &= w(a) \quad (a \in A), \quad w(t) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Dizemos que t é uma A -*aplicação* se (A_1, ω_1) é uma álgebra de Bernstein. Se e é um idempotente de A , dizemos que a A -*aplicação* t é uma e -*aplicação* se $t(e) = 0$. A A -*aplicação* t é denominada *interna* quando existe um $a \in A$ tal que $t(x) = R_a(x)$ ($\forall x \in A^2$).

Se $A = Fe \oplus U \oplus V$, $u, u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, as aplicações t_1, t_2, t_3 são e -*aplicações*, em que

$$\begin{aligned}
t_1 &= R_{v_1} \circ R_{v_2}, \\
t_2(e) &= 0, \quad t_2 = R_{uv_1}R_{v_2} + R_{uv_2}R_{v_1} \text{ em } U \oplus V, \\
t_3(e) &= 0, \quad t_3 = R_{(u_1u_2)v_1}R_{v_2} + R_{(u_1u_2)v_2}R_{v_1} \text{ em } U \oplus V.
\end{aligned}$$

A álgebra de Bernstein A é denominada *completa* quando t_1, t_2, t_3 são internas para todo idempotente e de A .

Suponhamos que a álgebra de Bernstein A não é completa. Vamos mostrar que A pode ser imersa em uma álgebra de Bernstein completa. A e -*aplicação* $t = t_i$ para algum i ($i = 1, 2, 3$) não é interna. Construimos a álgebra $A_1 = A \oplus Ft$ e A está imersa em A_1 . Se A_1 é completa o resultado está provado. Se A_1 não é completa, continuamos o processo, obtendo a álgebra A_n ($n \geq 2$) e A está imersa em A_n . Como $A^2 = A_1^2 = \dots = A_n^2$, A_n é completa para algum n .

Temos o seguinte teorema de estrutura.

Teorema 33. (González et al [28]) *Seja A uma álgebra de Bernstein de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica 0. Então temos:*

(i) *O radical $R(A)$ é um ideal nilpotente.*

(ii) *Se A é completa e e é um idempotente de A então $A = Fe \oplus R(A) \oplus T$, em que $eT = \{0\}$ e $J = \{R_x : A^2 \rightarrow A^2 \mid x \in T\}$ é uma álgebra de Jordan e $\text{Nil}(J) = \{0\}$.*

5.5 Base de Identidades

As identidades desempenham um papel importante na teoria de estrutura das álgebras não-associativas. O problema de classificar álgebras não tem, é claro, uma resposta satisfatória. Torna-se então interessante estudar classes de álgebras satisfazendo um conjunto de identidades.

Um outro problema consiste em encontrar identidades para uma classe de álgebras. A questão central nesta direção é a seguinte:

Problema de Specht. *Dada uma classe de álgebras $\mathcal{C}$, é verdade que toda álgebra $A \in \mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades (isto é, o ideal de identidades $T(A)$ de A é gerado por um número finito de identidades sem relações de dependência)?*

Em 1950, Specht propôs este problema para álgebras associativas sobre um corpo de característica 0. Para esta classe de álgebras Kemer [45] deu a solução completa: *toda álgebra associativa sobre um corpo de característica 0 tem uma base finita de identidades.* Belov [4] construiu uma sequência de polinômios que geram um T-ideal de $\text{Ass}[X]$ (sobre um corpo de característica positiva), e este T-ideal não tem uma base finita de identidades. Portanto, o resultado de Kemer não vale para a classe das álgebras associativas sobre um corpo de característica positiva.

Resultados análogos ao de Kemer para álgebras de Jordan, alternativas e de Lie foram obtidas por Vais e Zelmanov [65] e Ilt'yakov [41, 42]. Outros resultados sobre o problema de Specht para álgebras quadráticas são mencionados em Peresi [58].

Uma forma mais fraca do problema de Specht é a seguinte: *Dada uma classe de álgebras não-associativas $\mathcal{C}$, é verdade que o ideal de identidades $T(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades?*

Vamos considerar nesta seção o problema de Specht no contexto das álgebras de Bernstein.

A classe das álgebras de Bernstein não é uma variedade de álgebras, isto é, não pode ser definida por um conjunto de identidades polinomiais. Logo, é interessante determinar a menor variedade de álgebras que contem esta classe. Em outras palavras, determinar as *identidades minimais*, isto é, de menor grau, que não são consequências da lei comutativa e que são satisfeitas por toda álgebra de Bernstein.

Teorema 34. (Correa et al [11]) *A menor variedade de álgebras que contem a classe das álgebras de Bernstein é definida pelas identidades ($\text{car}(F) \neq 2, 3, 5$):*

$$xy = yx,$$

$$(x^2x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0, \quad (8)$$

$$(y, x^2x^2, x) - 2(yx^2, x, x^2) + 2y(x^2, x^2, x) + 2(x, yx.x, x^2) = 0. \quad (9)$$

As álgebras comutativas que satisfazem a identidade (8) ou a identidade (9) foram estudadas por Correa [12].

Em [6], Bernad et al deram um exemplo de uma álgebra de Bernstein excepcional que não tem uma base finita de identidades. Portanto, o problema de Specht não tem solução positiva para a classe das álgebras de Bernstein. Mas, para certas subclasses o problema tem solução positiva.

Teorema 35. *(Bernad et al [6]) Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein-Jordan ou uma álgebra de Bernstein satisfazendo $A^2 = A$, sobre um corpo F de característica 0. Então o ideal $T(A)$ tem uma base finita de identidades.*

Denotemos por $\mathcal{N}$ a subclasse das álgebras de Bernstein regulares, e por $\mathcal{M}$ a subclasse das álgebras de Bernstein excepcionais que satisfazem $UV = \{0\}$.

Em [7], Bernad et al encontraram 5 identidades que geram $T(\mathcal{N})$ e 7 identidades que geram $T(\mathcal{M})$ ($\text{car}(F) = 0$). Estes conjuntos de geradores não são bases de identidades pois existem relações de dependência entre as identidades.

Os teoremas que seguem fornecem bases de identidades para $T(\mathcal{N})$ e $T(\mathcal{M})$.

Teorema 36. *(Peresi [59]) Seja F um corpo de característica 0. Então uma base de identidades para $T(\mathcal{N})$ é dada por*

$$(x, x, y^2) - 2(x, y, y)x = 0, \quad (10)$$

$$(a, b, c)d + (d, b, a)c + (c, b, d)a = 0. \quad (11)$$

Teorema 37. *(Peresi [59]) Seja F um corpo de característica 0. Então uma base de identidades para $T(\mathcal{M})$ é dada por* $(a, (bc)d, e) - 2(a, bc, e)d = 0$,
 $(a, b, c)(de) - 2((a, b, c)d)e = 0$, $3(x, xx, xx) - 2(x, x, xx)x = 0$,
 $(a, c, bd) - (b, c, ad) - (a, d, bc) + (b, d, ac) - 3(a, c, b)d + 3(a, d, b)c = 0$.

Correa et al [11] provaram que as identidades de grau 4 satisfeitas por todas as álgebras de Bernstein regulares são consequências de (11) e das identidades

$$3(yx^2)x - 2((yx)x)x - yx^3 = 0, \quad (12)$$

$$2(xy)(xy) - (x^2y)y - (y^2x)x = 0, \quad (13)$$

e que estas 3 identidades formam uma base para as identidades de grau 4. Mas uma álgebra sobre um corpo de característica $\neq 2$ satisfaz a identidade (10) se e somente se satisfaz (12) e (13). Portanto, como uma consequência do Teorema 36, temos o seguinte resultado:

Corolário 6. *Seja F um corpo de característica 0. Então as identidades (11), (12) e (13) formam uma base de identidades para $T(\mathcal{N})$.*

Referências

- [1] M. T. Alcalde, C. Burgueño, C. Mallol, R. Varro, Dérivations dans les algèbres de Bernstein, *J. Algebra* 183:826-836 (1996).
- [2] R. Baeza-Vega, On nuclear Bernstein algebras, *Linear Alg. Appl.* 142:19-22 (1990).
- [3] R. Baeza-Vega, I. Correa, R. Costa, L. A. Peresi, Shape identities in Bernstein algebras, *Comm. Alg.* 25:2659-2679 (1997).
- [4] A. Ya. Belov, Counterexamples to the Specht problem, *Sb. Math.* 191:329-340 (2000).
- [5] J. Bernard, S. González, C. Martínez, On nilpotency of the barideal of a Bernstein algebra, *Comm. Alg.* 25:2967-2985 (1997).
- [6] J. Bernad, S. González, C. Martínez, A. V. Ilt'yakov, On identities of baric algebras and superalgebras, *J. Algebra* 197:385-408 (1997).
- [7] J. Bernad, S. González, C. Martínez, A. V. Ilt'yakov, Polynomial identities of Bernstein algebras of small dimension, *J. Algebra* 207:664-681 (1998).
- [8] C. Burgueño, M. Neuburg, A. Suazo, Totally orthogonal Bernstein algebras, *Arch. Math.* 56:349-351 (1991).
- [9] C. Burgueño, C. Mallol, Morphismes de Peirce et orthogonalité dans les algèbres de Bernstein, *Linear Alg. Appl.* 219:179-186 (1995).
- [10] I. Correa, L. A. Peresi, Bernstein-Jordan algebras of dimension five, *Alg. Groups Geom.* 11:397-402 (1994).
- [11] I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, Minimal identities of Bernstein algebras, *Algebras Groups Geom.* 11:181-199 (1994).
- [12] I. Correa, Commutative algebras satisfying an identity of degree six, *Nova J. Math. Game Theory Algebra* 4:79-87 (1996).
- [13] I. Correa, A. Labra, Bernstein algebras satisfying a polynomial identity, *Nova J. Math. Game Theory Algebra* 5:277-285 (1996).
- [14] T. Cortés, Modular Bernstein algebras, *J. Algebra* 163:191-206 (1994).
- [15] T. Cortés, F. Montaner, On the structure of Bernstein algebras, *J. London Math. Society* 51:41-52 (1995).
- [16] T. Cortés, F. Montaner, Low dimensional Bernstein algebras, *J. London Math. Society* 51:53-61 (1995).
- [17] R. Costa, H. Guzzo Jr, Indecomposable baric algebras, *Linear Alg. Appl.* 183:223-236 (1993).

- [18] R. Costa, L. S. Ikemoto, A. Suazo, On the multiplication algebra of a Bernstein algebra, *Comm. Alg.* 26:3727-3736 (1998).
- [19] R. Costa, A. Grishkov, Graphs and nonassociative algebras, *J. Math. Sci. (New York)* 93:877-882 (1999).
- [20] R. Costa, J. Picanço, Invariance of dimension of p -subspaces in Bernstein algebras, *Comm. Alg.* 27:4039-4055 (1999).
- [21] A. Elduque, H. C. Myung, On flexible composition algebras, *Comm. Alg.* 21:2481-2505 (1993).
- [22] B. Felzenszwalb, Álgebras de Dimensão finita, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [23] S. González, C. Martínez, Idempotents elements in a Bernstein algebra, *J. London Math. Soc. (2)* 42:430-436 (1990).
- [24] S. González, One-dimensional subalgebras of a Bernstein algebra, *Algebra and Logic* 30:310-327 (1992).
- [25] S. González, Quasi-isomorphisms of Bernstein algebras, *Comm. Alg.* 21:4153-4166 (1993).
- [26] S. González, C. Martínez, Bernstein algebras with zero derivation algebra, *Linear Alg. Appl.* 191:235-244 (1993).
- [27] S. González, M. A. García-Muñiz, Baric, Bernstein and Jordan algebras, *Comm. Alg.* 26:913-930 (1998).
- [28] S. González, C. Martínez, A. Grishkov, A radical splitting theorem for Bernstein algebras, *Comm. Alg.* 26:2529-2542 (1998).
- [29] S. González, M. C. López-Díaz, C. Martínez, I. P. Shestakov, Bernstein superalgebras and supermodules, *J. Algebra* 212:119-131 (1999).
- [30] H. Gradl, S. Walcher, On continuous time models in genetic and Bernstein algebras, *J. Math. Biol.* 31:107-113 (1992).
- [31] A. Grishkov, On the genetic property of Bernstein algebras, *Soviet. Math. Dokl.* 35:489-492 (1987).
- [32] J. C. Gutiérrez Fernández, S. González, C. Martínez, Classification of Bernstein algebras of type $(3, n - 3)$, *Comm. Alg.* 23:201-213 (1995).
- [33] J. C. Gutiérrez Fernández, The Bernstein problem for type $(n - 2, 2)$, *J. Algebra* 181:613-627 (1998).
- [34] J. C. Gutiérrez Fernández, Structure of Bernstein populations of type $(3, n - 3)$, *Linear Alg. Appl.* 269:17-32 (1998).

- [35] J. C. Gutiérrez Fernández, C. Martínez, Nuclear Bernstein algebras with a stochastic basis, *J. Algebra* 217:300-311 (1999).
- [36] J. C. Gutiérrez Fernández, Solution of the Bernstein problem in the non-regular case, *J. Algebra* 223:109-132 (2000).
- [37] I. R. Hentzel, Special Jordan identities, *Comm. Alg.* 7:1759-1793 (1979).
- [38] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, Semi-prime Bernstein algebras, *Arch. Math.* 52:539-543 (1989).
- [39] I. R. Hentzel, D. P. Jacobs, L. A. Peresi, S. R. Sverchkov, Solvability of the ideal of all weight zero elements in Bernstein algebras, *Comm. Alg.* 22:3265-3275 (1994).
- [40] P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein stationarity principle, *J. London Math. Soc.* 9:613-624 (1975).
- [41] A. V. Ilt'yakov, Finiteness of basis of identities of a finitely generated alternative PI-algebra over a field of characteristic zero, *Siberian Math. J.* 32:948-961 (1991).
- [42] A. V. Ilt'yakov, On finite basis of identities of Lie algebra representations, *Nova J. Algebra Geom.* 1:207-259 (1992).
- [43] N. Jacobson, *Structure and Representation of Jordan Algebras*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications 39, Providence, Rhode Island, 1968.
- [44] N. Jacobson, *Basic Algebra I, II*, W. H. Freeman and Company, New York, 1985, 1989.
- [45] A. R. Kemer, Finite basis property in associative algebras, *Algebra and Logic* 5:362-397 (1987).
- [46] A. Koulibaly, M. Ouattara, Structure et théorie de Frattini d'une algèbre de Bernstein, *Algebras Groups Geom.* 8:145-158 (1991).
- [47] A. Krapivin, An indicator of the geneticism of finitely generated Bernstein algebras, *Sib. Math. J.* 32:409-415 (1991).
- [48] E. N. Kuz'min, I. P. Shestakov, Nonassociative Structures, in *Algebra VI* (A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich, editors), *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* 57, p. 197-280, 1994.
- [49] J. Laliena, The Frattini subalgebra of a Bernstein algebra, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 35:397-403 (1992). Corrigendum et addendum: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 37:519-520 (1994).
- [50] Y. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [51] K. MacCrimmon, The Russian revolution in Jordan algebras, *Algebra, Groups Geom.* 1:1-61 (1984).

- [52] C. Martínez, J. A. Sánchez-Nadal, Bernstein algebra with lattice isomorphism that does not preserve the nucleus, *Comm. Alg.* 22:4781-4791 (1994).
- [53] K. Meyberg, J. M. Osborn, Pseudo-composition algebras, *Math. Z.*, 214:67-77 (1993).
- [54] A. Micali, M. Ouattara, Structure des algèbres de Bernstein, *Linear Algebra Appl.* 218:77-88 (1995).
- [55] R. W. K. Odoni, A. E. Stratton, Structure of Bernstein algebras, *Cahiers Math. (Montpellier, Univ. Sci. Tech. Languedoc)* 38:117-125 (1989).
- [56] S. Okubo, Classification of flexible composition algebras I, II, *Hadronic J.* 5:1564-1626 (1981, 1982).
- [57] L. A. Peresi, Nilpotency in Bernstein algebras, *Arch. Math.* 56:437-439 (1991).
- [58] L. A. Peresi, Generalized quadratic rings, in *Nonassociative Algebra and Its Applications* (R. Costa et al, editors), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 211, p. 291-300, Marcel Dekker Inc., New York, (2000).
- [59] L. A. Peresi, A basis of identities for Bernstein algebras, *Int. J. Math. Game Theory Algebra* 14:179-188 (2004).
- [60] C. Polcino Milies, Breve introdução à história da teoria de anéis, *Atas da 11^a Escola de Álgebra*, *Coleção Atas* 18:1-46, São Paulo, 1990.
- [61] R. D. Schafer, On the algebra formed by the Cayley-Dickson process, *Amer. J. Math.* 76:435-446 (1954).
- [62] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York, 1966.
- [63] A. Suazo, On nuclear Bernstein algebras, *Int. J. Math. Game Theory Alg.* 8:207-212 (1999).
- [64] M. L. Tomber, A short history of nonassociative algebras, *Hadronic Journal* 2:1252-1387 (1979).
- [65] A. Ya. Vais, E. I. Zelmanov, Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 6:42-51 (1989).
- [66] E. I. Zelmanov, On prime Jordan algebras II, *Sib. Math. J.* 24:73-85 (1983).
- [67] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings That Are Nearly Associative*, Academic Press, New York, 1982.