MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica

LISTA 1 - 2º semestre de 2017

Escolher 5 exercícios para entregar

Exercício 1: Dada a função $f(x) = \frac{5}{x} - 0.6x - 2$ pede-se

a) Determine um intervalo que contenha apenas uma raiz dessa função. Justifique!

b) A sequência gerada por

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = \frac{5}{0.6x_n + 2}$$

converge para a raiz α delimitada em a), escolhendo-se convenientemente $x_0 \neq \alpha$? Justique! Em caso afirmativo, exiba tal x_0 que garanta a convergência e faça duas iteradas do processo.

c) Encontre a raiz delimitada em a) pelo método de Newton com precisão $\epsilon = 0.01$.

Exercício 2: Mostre que a função

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x^2}\right)$$

possui único ponto fixo $\bar{x}$ positivo. Determine a tal que para todo x_0 em $[a : 3]$ a sequência $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ convirja para $\bar{x}$ (justifique!!). Estime quantas iterações são necessárias para se obter um erro menor que 10^{-2} na determinação de $\bar{x}$ a partir de $x_0 = 3$. Calcule x_1 e x_2 e delimite $|x_2 - \bar{x}|$.

Exercício 3: Mostre que nenhuma das funções abaixo pode ser usara para aproximar $\sqrt{2}$ pelo método iterativo a partir de chutes iniciais diferentes de $\sqrt{2}$ com garantia de convergência.

a) $\Phi(x) = \cos(x/2 + 2)$.

b) $\Phi(x) = x^2 + x - 2$.

Exercício 4: Use o *Método de Newton* para determinar o ponto de máximo global do polinômio abaixo

$$p(x) = -2x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 14x - 1$$

sabendo que ele é um ponto crítico de f isolado no intervalo $[1, 3]$. Delimite o erro cometido.

Exercício 5: Um vaso de $30cm$ de altura tem secções transversais de área πe^{2h} para h de 0 a $30cm$. O volume de água (em cm^3) que ele contém, estando cheio até uma altura a, é dado por $V(a) = \int_0^a \pi e^{2x} dx$. Até que altura deve-se encher o vaso para que ele contenha $5cm^3$ de água? Use o método de Newton, determinando um intervalo que contenha a solução e justificando a escolha do valor inicial de forma a garantir a convergência (com erro menor que 10^{-3}).

Exercício 6: Seja a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ definida no intervalo $I = [-1, 2]$. Aproxime $f(x)$ por um polinômio da forma $g(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k$.

Exercício 7: Seja a função tabelada

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	10	15	23	33	45	58	69

Como ajustar f por uma função do tipo $g(t) = \frac{100}{1+\alpha e^{-\beta t}}$ segundo um método de Mínimos quadrados discreto?

Exercício 8: Determine a, b, c de forma a minimizar

$$\int_{-1}^{1} (t^2 - a - bt - c\cos(t))^2 dt.$$

Exercício 9: Seja $f \in C[a, b]$ e $q \in \mathbb{P}_n$ que minimiza $\|f - p\|_2 = (\int_a^b (f-p)^2(x)dx)^{1/2}$ para todo $p \in \mathbb{P}_n$. Mostre que existem pontos: $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ tal que $f(x_i) = q(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.