

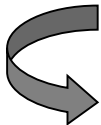
ANOVA

Modelos de Efeitos Aleatórios

Modelos de Efeitos Aleatórios

Ex. Temperatura Corporal (°C) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31



Objetivo do Experimento: Estimar a temperatura corporal dos animais de certa espécie em condições específicas

Qual é a variável resposta e os fatores sob estudo?

O Fator sob estudo é FIXO ou ALEATÓRIO?

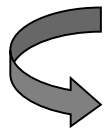
Modelos de Efeitos Aleatórios

Ex. Temperatura Corporal (°C) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31

Resposta (var. dependente): Temperatura

Fator (var. independente, explicativa): Animal $\Rightarrow$ em 5 níveis



A var. explicativa neste caso, Animal, é um “Fator Aleatório” $\Rightarrow$ o fator não é fixo pois foi extraída uma amostra aleatória de 5 animais da população alvo do estudo e não se tem interesse em fazer comparações entre estes 5 particulares níveis da variável.

Modelo de Efeitos Aleatórios

Avaliação do desempenho de candidatos de um concurso de dança de acordo com diferentes juízes.

C1	C2	C3	C4
76	65	85	74
59	75	81	67
49	63	61	46
74	71	85	89
66	84	80	79

Quatro candidatos que se submeteram a um concurso de dança foram aleatoriamente escolhidos dentre todos os candidatos. Há interesse em estimar o desempenho médio de candidatos nesse tipo de processo de seleção. Também, há interesse em avaliar se a variabilidade nos desempenhos entre candidatos é maior que a variabilidade entre os desempenhos atribuídos pelos juízes a um mesmo candidato.

Por que considerar “Candidatos” como um fator aleatório?

Modelos de Efeitos Aleatórios

Estudo de melhoramento genético em gados de corte.
Os pesos ao nascer de oito progênies machos resultantes de cruzamentos envolvendo cinco touros reprodutores são apresentados a seguir.

Touro Reprodutor									Média	dp
T1	61	100	56	113	99	103	75	62	83,625	22,551
T2	75	102	95	103	98	115	98	94	97,5	11,225
T3	58	60	60	57	57	59	54	100	63,125	15,028
T4	57	56	67	59	58	121	101	101	77,5	25,945
T5	59	46	120	115	115	93	105	75	91	28,025

A média de peso ao nascer desses animais é diferente daquele obtido pela Fazenda Padrão Ouro que é de 90 u.m. ?

Por que considerar “Touro Reprodutor” como um fator aleatório?

Modelos de Efeitos Aleatórios

Dois estudos foram realizados independentemente para avaliar a quantidade de potássio presente em refrigerantes comercializados no país. No Estudo I três marcas de refrigerantes específicas e de interesse no estudo foram avaliadas. No Estudo II três marcas de refrigerantes, amostras dentre todas as comercializadas no país, foram selecionadas para fazer parte do experimento.

	Estudo I			Estudo II		
	M1	M2	M3	M4	M5	M6
	1,12	0,16	0,15	0,91	0,66	2,17
	1,10	0,11	0,12	0,83	0,83	1,52
	1,12	0,26	0,12	0,95	0,61	1,58
Média	1,113	0,177	0,130	0,897	0,700	1,757
dp	0,012	0,076	0,017	0,061	0,115	0,359

Em cada estudo estime o conteúdo médio de potássio presente nos refrigerantes.

Por que considerar “Marca de Refrigerante” como um fator fixo ou aleatório? Justifique.

Modelos de Efeitos Aleatórios

Modelo Estrutural

$$y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad \text{1 fator aleatório}$$

$$y_{ij} = \underbrace{\mu}_{\substack{\uparrow \\ \text{componente fixo}}} + \underbrace{\tau_j + \varepsilon_{ij}}_{\text{componente aleatório}}$$

Efeito do tratamento: é modelado como um componente aleatório.
Esta formulação é útil para modelar a Co(Variância) de Y
(heterocedasticidade bem como covariância entre observações).

Modelo Estrutural e Distribucional

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}$$

$$= \mu + \tau_j + e_{ij} \quad j = 1, \dots, k \quad i = 1, \dots, n_j (= r)$$

$$\tau_j \sim N(0; \sigma_A^2); \quad \mu_j = \mu + \tau_j \sim N(\mu; \sigma_A^2)$$

$$e_{ij} \sim N(0; \sigma_e^2) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N(\mu; \sigma_A^2 + \sigma_e^2)$$

$$\text{Cov}(y_{ij}; y_{i'j'}) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_e^2 & i = i' \quad j = j' \\ \sigma_A^2 & i = i' \quad j \neq j' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Especificação do Modelo

Formalização Matricial

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad \tau_j \sim N(0; \sigma_A^2) \quad e_{ij} \sim N(0; \sigma_e^2) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$Y_{n \times 1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \dots \\ y_{kn_k} \end{bmatrix} \sim N(1_{n \times 1} \mu; V_{n \times n});$$

$$V_{n \times n} = \text{Cov}(Y_{n \times 1}) = \begin{bmatrix} V_{1n_1 \times n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{2n_2 \times n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{1n_k \times n_k} \end{bmatrix};$$

Matriz de correlação
uniforme

$$V_{jn_j \times n_j} = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \dots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sigma_Y^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix};$$

Componentes da
variância de Y

$$\sigma_Y^2 = \sigma_A^2 + \sigma_e^2$$

Especificação do Modelo

Formalização Matricial

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}; \quad Y_{n \times 1} \sim N(1_{n \times 1} \mu; V_{n \times n})$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_k \end{bmatrix}; \quad V_j = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \dots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sigma_Y^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \text{Corr}(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \frac{\text{Cov}(Y_{ij}, Y_{ij'})}{\sqrt{\text{Var}(Y_{ij})} \sqrt{\text{Var}(Y_{ij'})}} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2}$$

ρ é o coeficiente de correlação intraclass: correlação entre quaisquer duas observações dentro do mesmo nível do fator.

É a proporção da variância total de Y que é devida à fonte de variabilidade entre os níveis do Fator

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}$$

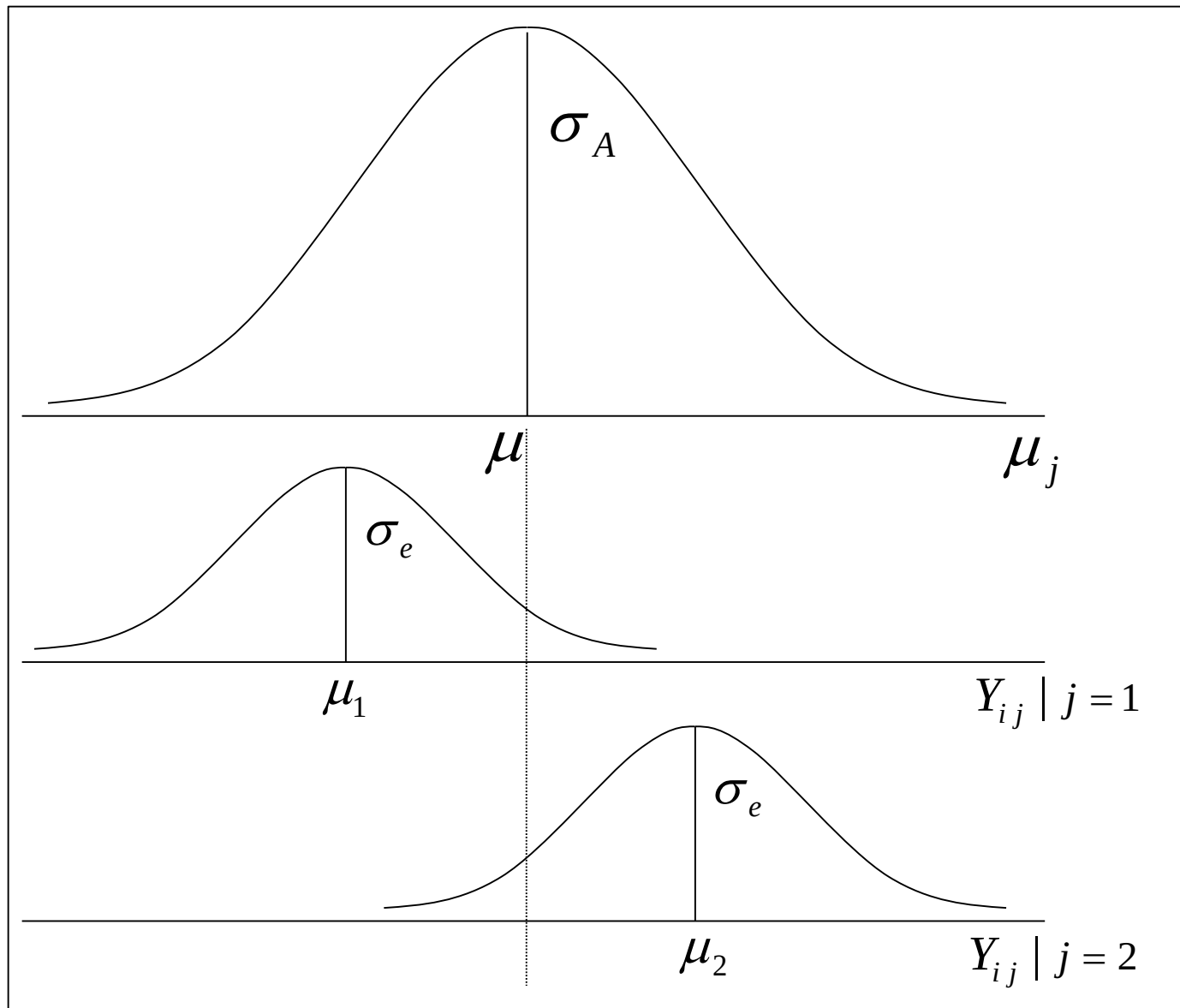
$$= \mu + \tau_j + e_{ij}$$

$$\mu_j \sim N(\mu; \sigma_A^2)$$

Distribuição
condicional de Y

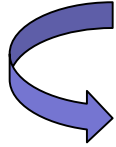
$$\Rightarrow y_{ij} | j \sim N(\mu_j; \sigma_e^2)$$

Condiciona ao j-ésimo
nível do Fator as
observações são
independentes

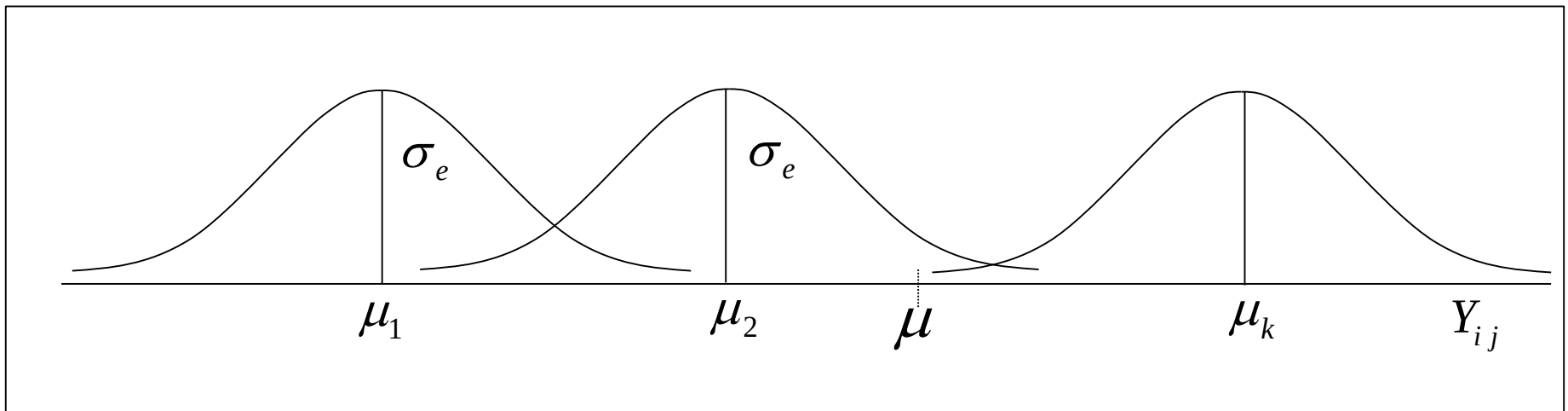


$$H : \sigma_A^2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$

$$H : \sigma_A^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$



Sob H o modelo de um único fator aleatório (dois componentes de variância e correlação uniforme) equivale ao modelo de um único fator fixo!



Neste caso, as Tabelas de ANOVA, analiticamente, são iguais.
MAS, note que, o modelo estrutural e distribucional e o teste realizado em cada caso são diferentes!

Tabela de ANOVA

Equivalência analítica
entre as Tabelas de
ANOVA dos modelos
com 1 fator fixo ou
aleatório!

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_A^2 > 0$$

F.V.	g l	SQ	QM	F	p
ENTRE	k-1	$\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	SQE / (k-1)	QME / QMR	
DENTRO	n-k	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	SQR / (n-K)		
TOTAL	n-1	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2$			
n=rk	n-k=k(r-1)				

$$E(QM \text{ Res}) = \sigma_e^2$$

$$E(QM \text{ Tr}) = \sigma_e^2 + r \sigma_A^2$$

$\Rightarrow$

$$F = \frac{QM \text{ Trat}}{QM \text{ Res}}$$

sob H_0
 $\sim$

$$F_{(k-1)(n-k)}$$

Modelos de Efeitos Aleatórios

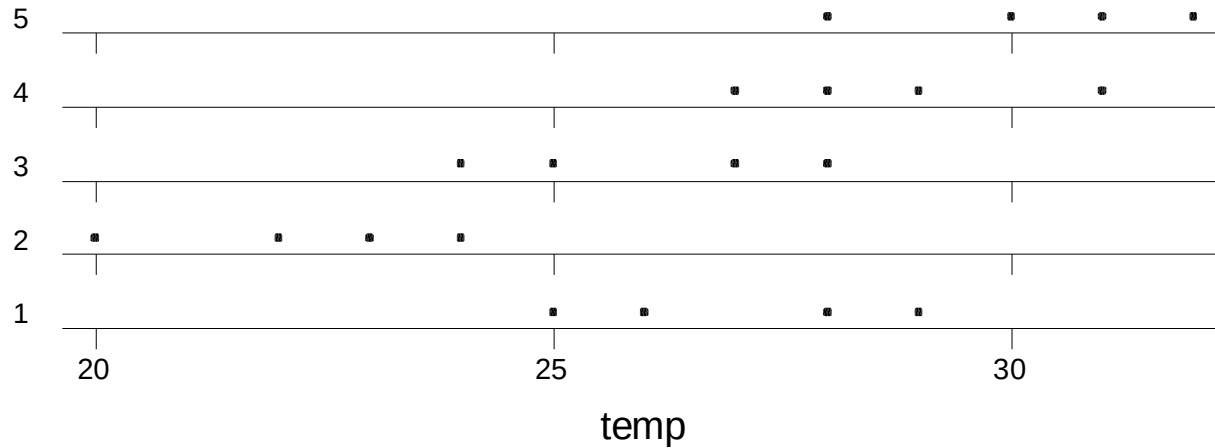
Ex. Temperatura Corporal (°C) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31

Considerando um modelo de efeitos aleatórios escreva o modelo estrutural e as suposições distribucionais. Obtenha a tabela de ANOVA e teste as hipóteses de interesse.

Dados da Temperatura Corporal de Animais

animal



σ_e^2 : Variabilidade da resposta dentro do animal (homocedasticidade)

σ_A^2 : Variabilidade da resposta entre as médias de resposta de cada animal

General Linear Model:

Factor	Type	Levels	Values				
Trat	random	5	1	2	3	4	5

Analysis of Variance

Source	DF	Seq SS	Adj MS	F	P
Trat	4	148.300	37.075	12.02	0.000
Error	15	46.250	3.083		
Total	19	194.550			

$$\hat{\sigma}_e^2 = QM \text{ Res}$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMTr - \hat{\sigma}_e^2}{r}$$

Variance Components

Source	Estimated Value	
Trat	8.498	$\hat{\sigma}_A^2$
Error	3.083	$\hat{\sigma}_e^2$

A variância da resposta (temperature corporal) Entre animais é maior que a variância Dentro de animal (diferentes mensurações ao longo do dia)

Descriptive Statistics: temp by animal

$$\hat{\sigma}_e^2 \Rightarrow 3,083$$

Variable	animal	N	Mean	StDev	SE Mean
temp	1	4	27.000	1.826	0.913
	2	4	22.250	1.708	0.654
	3	4	26.000	1.826	0.913
	4	4	28.750	1.708	0.854
	5	4	30.250	1.708	0.854

Descriptive Statistics: Mean

Variable	N	Mean	Median	StDev	SE Mean
Mean	5	26.85	27.00	3.04	1.36

$$V(\hat{\mu}) = 1,36^2 = 1,85$$

$$\hat{\mu} = 26,85$$

$$V(\hat{\mu}) = QMTr / n = 37,075 / 20 = 1,85$$

Exemplo

Dados: Medidas de clorofila a

T1	T2	T3	T4
6,2	12,7	7,0	8,3
4,8	11,3	4,4	7,1
3,0	9,3	3,8	11,7
5,6	9,5	5,0	10,0
7,1	11,7	5,5	8,5
4,8	15,3	3,2	12,4

Adote um modelo de efeitos aleatórios na análise destes dados. Compare com os resultados com aqueles de um DCA com efeito fixo! Justifique (dê razões) por que adotar modelos de efeitos fixos ou aleatórios neste caso?

Tabelas de ANOVA

Q.M.	g l	Efeito Fixo	Efeito Aleatório
Fator A	k-1	$E(QM_{Trat}) = \sigma_e^2 + \frac{\sum n_j (\mu_j - \mu)^2}{k-1}$	$E(QM_{Trat}) = \sigma_e^2 + r \sigma_A^2$
Resíduo	n-k=k(r-1)	$E(QM_{Res}) = \sigma_e^2$	$E(QM_{Res}) = \sigma_e^2$
Hipótese		$H : \mu_1 = \dots = \mu_k$	$H : \sigma_A^2 = 0$
Estatística de Teste		$F = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$	$F = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
n=rk	n-k=k(r-1)		

Estimação de μ

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad j = 1, \dots, k \quad i = 1, \dots, n_j (= r)$$

$$\tau_j \sim N(0; \sigma_A^2) \quad e_{ij} \sim N(0; \sigma_e^2) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$E(y_{ij}) = \mu \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$$

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mu_j + e_{ij}) = \mu_j + \bar{e}_j = \mu + \tau_j + \bar{e}_j$$

$$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_j - \hat{\mu} - \bar{\hat{e}}_j = (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}) - \bar{\hat{e}}_j$$

Estimação de μ

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad j = 1, \dots, k \quad i = 1, \dots, n_j (= r)$$

$$\tau_j \sim N(0; \sigma_A^2) \quad e_{ij} \sim N(0; \sigma_e^2) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..} = \bar{Y}$$

$$\text{Var}(\bar{Y}_{..}) = \text{Var}\left(\frac{\sum_j \mu_j}{k} + \frac{\sum_{ij} e_{ij}}{rk}\right) = \frac{\sigma_A^2}{k} + \frac{\sigma_e^2}{rk} = \frac{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2}{rk} \Rightarrow s_{\bar{Y}}^2 = \frac{QM\text{Trat}}{rk}$$

Estatística para testar hipóteses sobre μ

$$\frac{\bar{Y} - \mu}{s_{\bar{Y}}} \sim t_{(k-1)}$$

Soma de dois componentes de variância: entre e intra classe:

$$\mu_j \sim N(\mu; \sigma_A^2) \quad Y_{ij} | j \sim N(\mu_j; \sigma_e^2)$$

Estimação do Coeficiente de Correlação Intra-Classe

$$\rho = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2}$$

$$\frac{QMTrat}{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \div \frac{QM Res}{\sigma_e^2} \sim F_{(k-1)(n-k)}$$

$$P\left(F_{(\alpha/2)(k-1)(n-k)} \leq \frac{QMTrat}{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \div \frac{QM Res}{\sigma_e^2} \leq F_{(1-\alpha/2)(k-1)(n-k)}\right) = 1 - \alpha$$

$$IC(\rho) a (1 - \alpha)\% = \left(\frac{L}{1 + L}; \frac{U}{1 + U}\right)$$

$$L = \frac{1}{r} \left[\frac{QMTrat}{QM Res} \left(\frac{1}{F_{(1-\alpha/2)(k-1)(n-k)}} \right) - 1 \right] \quad U = \frac{1}{r} \left[\frac{QMTrat}{QM Res} \left(\frac{1}{F_{(\alpha/2)(k-1)(n-k)}} \right) - 1 \right]$$

Estimação dos Componentes de Variância

$$QM \text{ Res} \rightarrow \sigma_e^2$$

$$\frac{k(r-1)QM \text{ Res}}{\sigma_e^2} \sim \chi_{k(r-1)}^2$$

$$\Rightarrow IC(\sigma_e^2) a (1-\alpha)\% = \left(\frac{k(r-1)QM \text{ Res}}{\chi_{(1-\alpha/2); k(r-1)}^2}; \frac{k(r-1)QM \text{ Res}}{\chi_{(\alpha/2); k(r-1)}^2} \right)$$

Estimação dos Componentes de Variância

$$QMTrat \rightarrow \sigma_e^2 + r\sigma_A^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMTrat - QM Res}{r}$$

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{1}{r}\right)E(QMTrat) + \left(-\frac{1}{r}\right)E(QM Res)$$

Combinação linear de Quadrados Médios

Procedimento de Satterthwaite:

$$\Rightarrow IC(\sigma_A^2)_{a(1-\alpha)\%} = \left(\frac{(df)\hat{\sigma}_A^2}{\chi_{(1-\alpha/2);(df)}^2}; \frac{(df)\hat{\sigma}_A^2}{\chi_{(\alpha/2);(df)}^2} \right) \quad df = \frac{(r\hat{\sigma}_A^2)^2}{\frac{QMTrat^2}{k-1} + \frac{QM Res^2}{k(r-1)}}$$

Modelo de Efeitos Aleatórios

Análise de Resíduos

- **Resíduo Condicional:** $e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij} | \tau_j) = y_{ij} - \mu_j$ Resíduo confundido com o efeito aleatório

$\hat{e}_{ij} \times \hat{y}_{ij}$ Diagnóstico da homocedasticidade e normalidade de e , observações influentes

- **Resíduo Marginal:** $\varepsilon_{ij} = \tau_j + e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij}) = y_{ij} - \mu$ Resíduo puro

$\hat{\varepsilon}_{ij} \times \text{índice das u.e.}; \hat{\varepsilon}_{ij} \times \text{Covariáveis}$ Diagnóstico da estrutura de covariância (uniforme) e observações atípicas

- **Efeitos Aleatórios (EBLUP):** $\tau_j = E(y_{ij} | \tau_j) - E(y_{ij}) = (\mu + \tau_j) - \mu$ Preditor confundido com o resíduo condicional

$\hat{\tau}_j \times \text{índice das u.e.}$ Diagnóstico de observações influentes

Modelo de Efeitos Aleatórios

Análise de Resíduos

▪ **Resíduo Condicional:** $e_{ij} = y_{ij} - E(y_{ij} | \tau_j) = y_{ij} - \mu_j$

No pacote R:

“Response”: resíduo condicional

*> plot(fit): resíduo de
Pearson é o default*

“Resíduo de Pearson”: é resíduo condicional padronizado, isto é, dividido pela raiz quadrada do QMRes.

“Resíduo normalizado”: é o resíduo de Pearson multiplicado por um fator de correção (corrige a não independência entre observações)

Exemplo

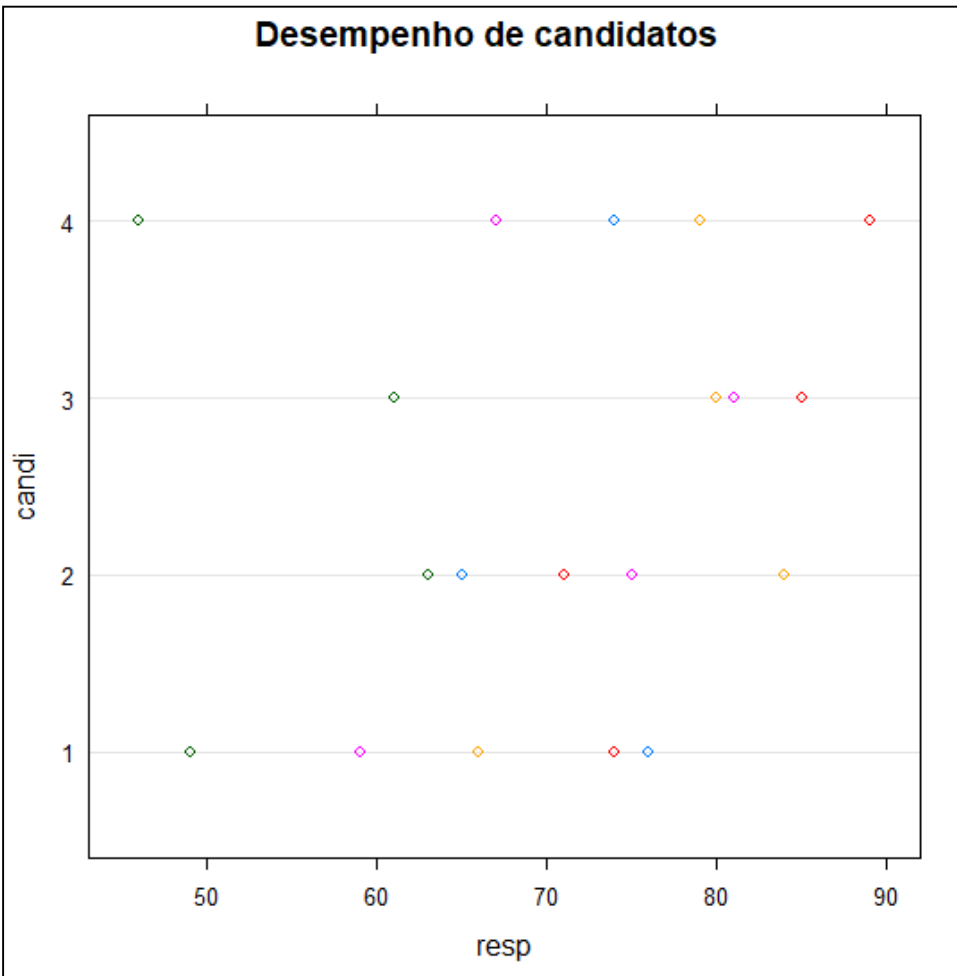
Dados: Avaliação do desempenho de candidatos de acordo com diferentes juízes

C1	C2	C3	C4
76	65	85	74
59	75	81	67
49	63	61	46
74	71	85	89
66	84	80	79

Há diferença no desempenho dos candidatos?

Adote um modelo de efeitos aleatórios. Compare com os resultados com aqueles de um DCA com efeito fixo!

Desempenho de candidatos



Notas dos Candidatos:

Candi	1	2	3	4
Média	64.8	71.6	78.4	71.0
D.P.	11.12	8.41	9.99	16.11

Médias das Notas dos Candidatos:

Min.	Q1	Median	Mean	Q3	Max.	sd
64.8	69.5	71.3	71.5	73.3	78.4	5.56

Tabela de ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	Fvalue	Pr(>F)
candi	3	463.75	154.58	1.1165	0.3717
Resid	16	2215.20	138.45		

**Interprete os resultados da ANOVA
sob o Modelo de Efeitos Aleatórios
Obtenha:**

$$\hat{\sigma}_A^2, \quad \hat{\sigma}_e^2, \quad \hat{\rho}, \quad \hat{\mu}, \quad \hat{Var}(\hat{\mu})$$

```
library(nlme)
fit2<- lme(fixed = resp ~ 1, random = ~ 1|candi)
```

```
> summary(fit2)
Random effects:
  Formula: ~1 | candi
      (Intercept) Residual
StdDev:    1.796293 11.76648

Fixed effects: resp ~ 1
              Value Std.Error DF   t-value p-value
(Intercept)  71.45   2.780138 16  25.70016     0

Standardized Within-Group Residuals:
      Min       Q1       Med       Q3      Max
-2.1589328 -0.5919915  0.2482052  0.6862421  1.4955168
```

```
library(nlme)
fit2<- lme(fixed = resp ~ 1, random = ~ 1|candi)
```

```
> intervals(fit2)
Approximate 95% confidence intervals

Fixed effects:
              lower  est.    upper
(Intercept) 65.55637 71.45 77.34363
attr(,"label")
[1] "Fixed effects:"

Random Effects:
Level: candi
              lower    est.    upper
sd((Intercept)) 0.0005289431 1.796293 6100.216

Within-group standard error:
      lower    est.    upper
8.325405 11.766478 16.629822
```

```
> fixed.effects(fit2)#BLUEs
(Intercept)
      71.45
```

```
> coef(fit2)
(Intercept)
1      70.75596
2      71.46565
3      72.17535
4      71.40304
```

```
> random.effects(fit2)
(Intercept)
1 -0.69403783
2  0.01565499
3  0.72534781
4 -0.04696497
```

Notas dos Candidatos:

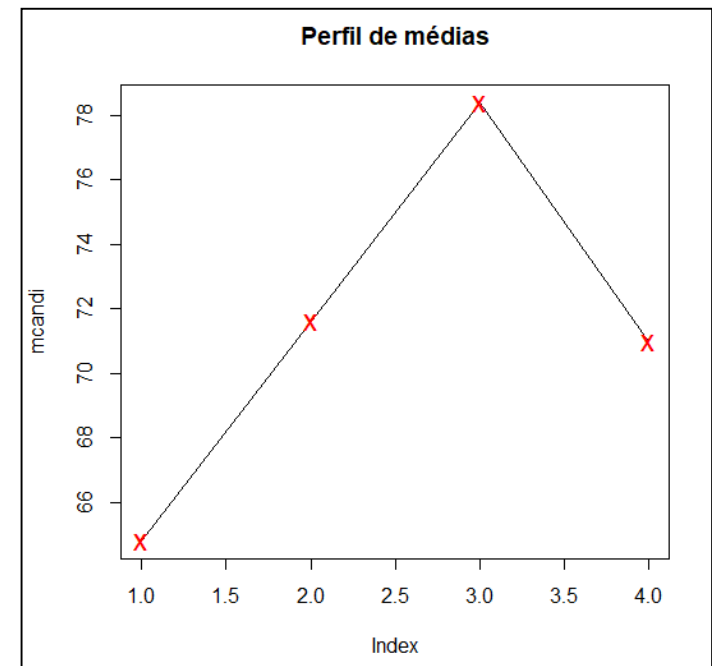
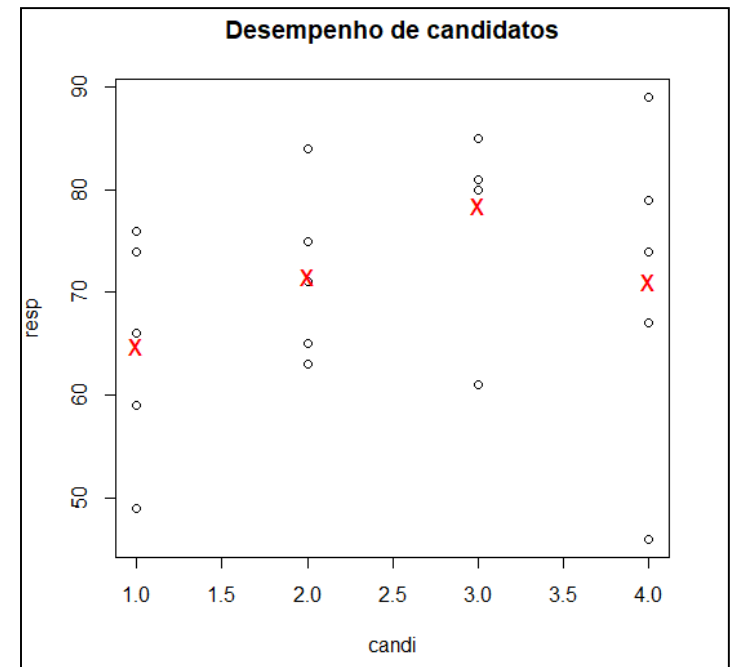
Candi	1	2	3	4
Média	64.8	71.6	78.4	71.0
D.P.	11.12	8.41	9.99	16.11

Tabela de ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	Fvalue	Pr(>F)
candi	3	463.75	154.58	1.1165	0.3717
Resid	16	2215.20	138.45		

Interprete os resultados da ANOVA sob o Modelo de Efeitos Fixos
Obtenha:

$$\hat{\mu}_j, \quad \hat{\sigma}_e^2, \quad \hat{Var}(\hat{\mu}_j), \quad \hat{\tau}_j$$



```
> coefficients(fit1)
      (Intercept) (candi)2 (candi)3 (candi)4
           64.8    6.8      13.6      6.2
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	64.800	5.262	12.314	1.41e-09	***
as.factor(candi)2	6.800	7.442	0.914	0.3744	
as.factor(candi)3	13.600	7.442	1.828	0.0863	.
as.factor(candi)4	6.200	7.442	0.833	0.4170	

```
> fit1.tk
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level
```

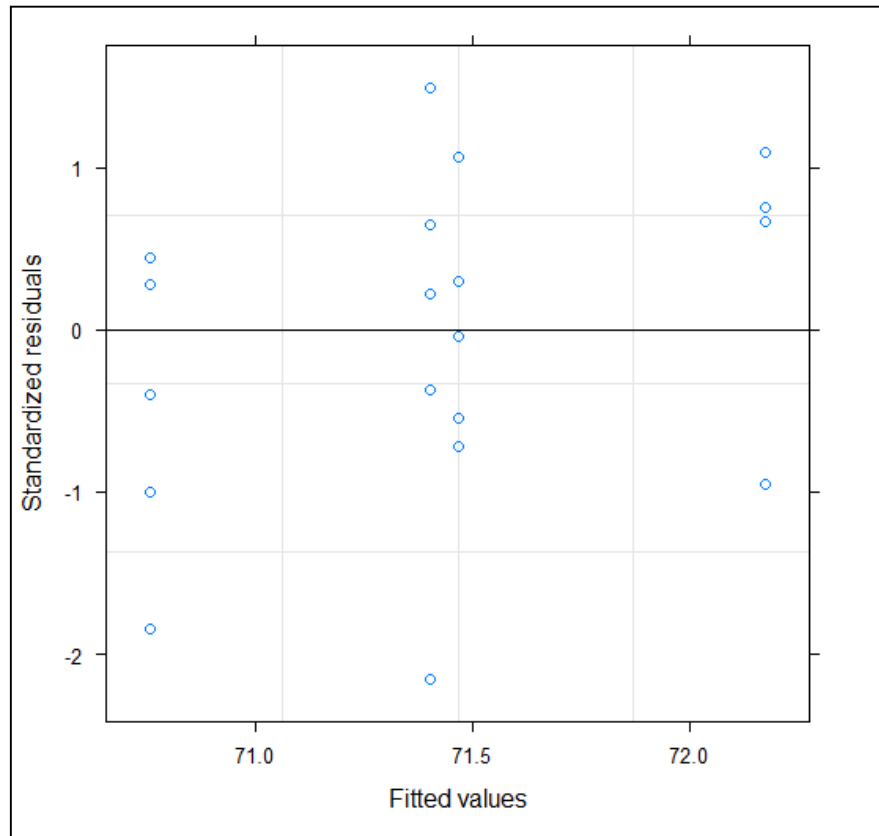
```
Fit: aov(formula = resp ~ candi)
```

```
$candi
```

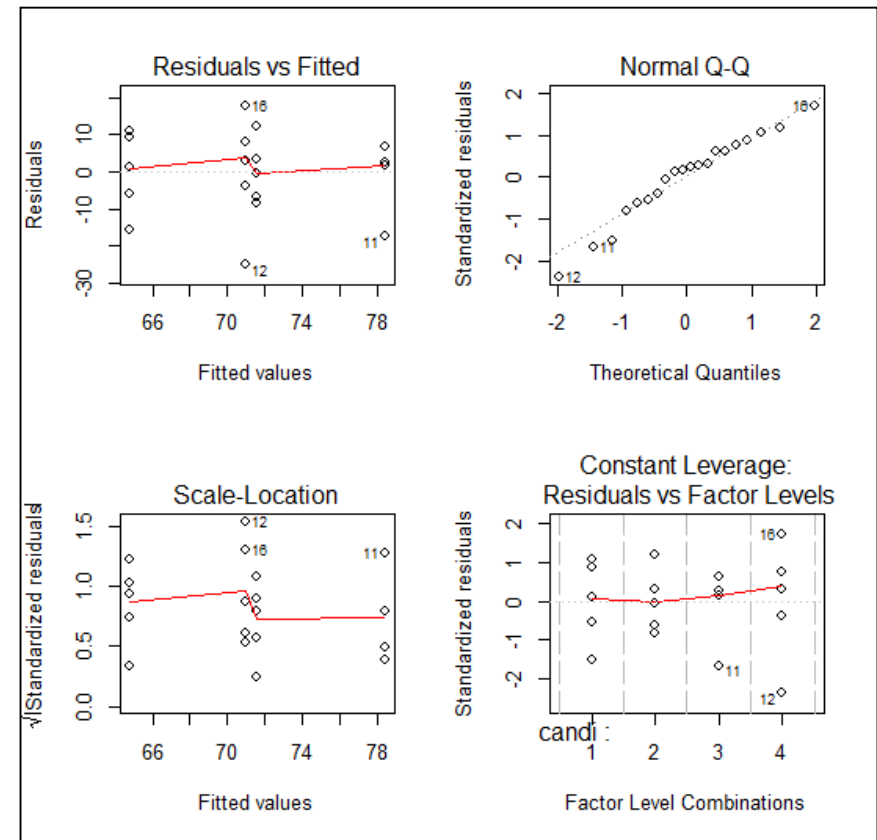
	diff	lwr	upr	p adj
2-1	6.8 -14.491063	28.09106	0.7978994	
3-1	13.6 -7.691063	34.89106	0.2970659	
4-1	6.2 -15.091063	27.49106	0.8379962	
3-2	6.8 -14.491063	28.09106	0.7978994	
4-2	-0.6 -21.891063	20.69106	0.9998037	
4-3	-7.4 -28.691063	13.89106	0.7546744	

Resíduos: Modelo de Efeitos Aleatórios

Resíduo condicional



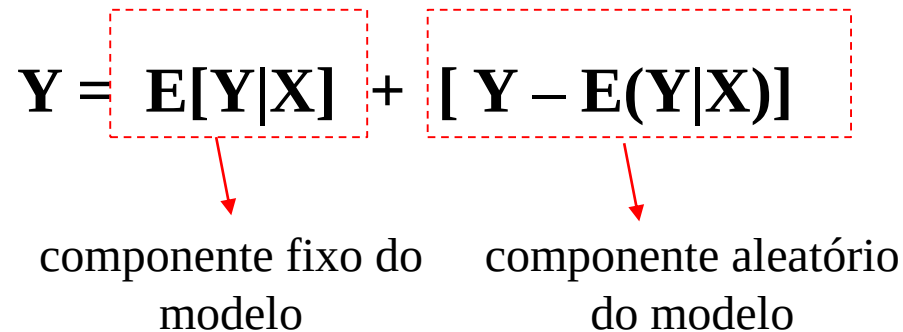
Resíduos: Modelo de Efeitos Fixos



Modelos mais Gerais

(Neter et al. 2005; Oehlert, 2010)

**Diferentes estruturas para os componente “FIXOS” e
“ALEATÓRIOS” do modelo adotado para Y:**

$$Y = E[Y|X] + [Y - E(Y|X)]$$


componente fixo do
modelo

componente aleatório
do modelo

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Consumo de Gasolina de acordo com carros e motoristas amostrados aleatoriamente de uma indústria automobilística

Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$i = 1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i = 2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i = 3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i = 4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

Os fatores Carros e Motoristas são aleatórios.

A resposta sob estudo é o consumo de combustível.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Componente
fixo

Componente
aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} = \underbrace{\mu}_{\text{Componente fixo}} + \underbrace{\tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}}_{\text{Componente aleatório}}; \quad i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, r$$

$$\tau_i \sim N(0; \sigma_A^2); \quad \beta_j \sim N(0; \sigma_B^2); \quad \gamma_{ij} \sim N(0; \sigma_{AB}^2);$$

$$e_{ijk} \sim N(0; \sigma_e^2); \quad \tau_i \perp \beta_j \perp \gamma_{ij} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu; \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$\text{Cov}(y_{ijk}; y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i'; j = j'; k = k' \\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 & i = i'; j = j'; k \neq k' \\ \sigma_A^2 & i = i'; j \neq j'; k \neq k' \\ \sigma_B^2 & i \neq i'; j = j'; k \neq k' \\ 0 & i \neq i'; j \neq j'; k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares Mistos

Esqueleto da ANOVA para o Delineamentos com Dois Fatores Aleatórios

FV	n g.l.	E(QM)
A	$a - 1$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + nb\sigma_{\alpha}^2$
B	$b - 1$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2 + na\sigma_{\beta}^2$
AB	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
Error	$N - ab = ab(n - 1)$	σ^2

n réplicas

$$H_0 : \sigma_{AB}^2 = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{QM(AB)}{QM \text{ Res}}$$

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{QMA}{QM(AB)}$$

$$H_0 : \sigma_B^2 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{QMB}{QM(AB)}$$

Não há uma ordem para a realização dos testes dos components de variância!

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

A eficiência de três Métodos de Ensino foi avaliada em grupos de quatro estudantes. Cinco instrutores habilitados a conduzir tais Métodos foram aleatoriamente escolhidos de um cadastro para fazerem parte do estudo.

Método de Ensino	1				2				3			
Instr. 1	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81	67
Instr. 2	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72	79
Instr. 3	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73	73
Instr. 4	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76	77
Instr. 5	66	70	64	60	68	73	51	76	80	75	70	71

Considere a análise destes dados supondo Método de Ensino como Fator Fixo e Instrutor como fator Aleatório.

Proponha outras situações em que o modelo misto desse tipo seria útil.

Modelo Misto

Componente
fixo

Componente
aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} = \underbrace{\mu + \tau_i}_{\text{Componente fixo}} + \underbrace{\beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}}_{\text{Componente aleatório}}; \quad i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, r$$

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0; \quad \beta_j \sim N(0; \sigma_B^2);$$

$$\gamma_{ij} \sim N\left(0; \frac{a-1}{a} \sigma_{AB}^2\right); \quad \sum_{i=1}^a \gamma_{ij} = 0; \quad \text{Cov}(\gamma_{ij}; \gamma_{i'j}) = \frac{1}{a} \sigma_{AB}^2 \quad i \neq i'$$

$$e_{ijk} \sim N(0; \sigma_e^2); \quad \beta_j \perp \gamma_{ij} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i; \sigma_A^2 + \frac{a-1}{a} \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$\text{Cov}(y_{ijk}; y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_B^2 + \frac{a-1}{a} \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & k = k' \\ \sigma_B^2 & i = i'; j = j' \\ \sigma_B^2 + \frac{1}{a} \sigma_{AB}^2 & i \neq i'; j = j' \\ 0 & j \neq j' \end{cases}$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores

Expected Mean Squares for Balanced Two-Factor ANOVA Models.

Mean Square	df	Fixed ANOVA Model (A and B fixed)	Random ANOVA Model (A and B random)	Mixed ANOVA Model (A fixed, B random)
MSA	$a - 1$	$\sigma^2 + nb \frac{\sum \alpha_i^2}{a - 1}$	$\sigma^2 + nb\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + nb \frac{\sum \alpha_i^2}{a - 1} + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	$b - 1$	$\sigma^2 + na \frac{\sum \beta_j^2}{b - 1}$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$
MSAB	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma^2 + n \frac{\sum \sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a - 1)(b - 1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	$(n - 1)ab$	σ^2	σ^2	σ^2

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

Um Nutricionista está interessado no consumo de 5 tipos de Menus. Restaurantes foram amostrados de um município e o consumo desses menus foi avaliado.

Restaurante	Tipo de Menu					Restaurante	Tipo de Menu				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	11	13	10	18	15	5	14	16	13	22	16
2	20	28	15	30	18	6	25	27	26	33	25
3	8	10	8	16	12	7	43	46	41	55	42
4	30	35	27	41	28	8	13	14	12	20	13

Considere a análise destes dados supondo Tipo de Menu como Fator Fixo e Restaurante como Fator Aleatório.

Como fica definida a estrutura de correlação entre as observações?

Qual é a diferença modelo se Restaurante for assumido como Fator Bloco no modelo?

Modelo com Três Fatores Aleatórios

Quadrado Médio Esperado

Source	<i>EMS</i>
A	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + nbc\sigma_{\alpha}^2$
B	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + nac\sigma_{\beta}^2$
C	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2 + nab\sigma_{\gamma}^2$
AB	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2$
AC	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2$
BC	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
Error	σ^2

Há **Testes F exatos** para testar os efeitos aleatórios ABC, AB, AC e BC. MAS não há testes exatos para testar os Efeitos Principais A, B e C. **Testes aproximados** precisam ser obtidos no caso de modelos com 3 ou mais fatores aleatórios.