

# ANOVA - Etapas de Análise

- Entender o Delineamento

Estrutura de Tratamento

Aleatorização das Unidades Amostrais

Aleatorização das Unidades Experimentais aos Tratamentos

- Adotar um Modelo Estrutural e Distribucional aos dados
- Ajuste do Modelo de ANOVA
- Análise de Diagnóstico
- Interpretação da Tabela de ANOVA

Existência de Efeito de Tratamento → Comparações Múltiplas

# Exemplo: DCA

## Dados: Medidas de clorofila a

| T1  | T2   | T3  | T4   |
|-----|------|-----|------|
| 6,2 | 12,7 | 7,0 | 8,3  |
| 4,8 | 11,3 | 4,4 | 7,1  |
| 3,0 | 9,3  | 3,8 | 11,7 |
| 5,6 | 9,5  | 5,0 | 10,0 |
| 7,1 | 11,7 | 5,5 | 8,5  |
| 4,8 | 15,3 | 3,2 | 12,4 |

# Tabela de ANOVA

## One-way ANOVA: Resp versus Trat

Analysis of Variance for Resp

| Source | DF | SS     | MS    | F     | P     |
|--------|----|--------|-------|-------|-------|
| Trat   | 3  | 201,45 | 67,15 | 20,59 | 0,000 |
| Error  | 20 | 65,23  | 3,26  |       |       |
| Total  | 23 | 266,68 |       |       |       |

Individual 95% CIs For Mean  
Based on Pooled StDev

| Level                | N | Mean   | StDev |                         |
|----------------------|---|--------|-------|-------------------------|
| T1                   | 6 | 5,250  | 1,408 | (-----*-----)           |
| T2                   | 6 | 11,633 | 2,222 | (-----*-----)           |
| T3                   | 6 | 4,817  | 1,348 | (-----*-----)           |
| T4                   | 6 | 9,667  | 2,075 | (-----*-----)           |
| Pooled StDev = 1,806 |   |        |       | -----+-----+-----+----- |
|                      |   |        |       | 6,0 9,0 12,0            |

Defina H a hipótese a ser testada via a estatística F

Suposições envolvidas

Conclusão

# Comparações Múltiplas

➔ **Nível de Significância Único para a Família de Comparações**

4 Tratamentos       $\mu_1$      $\mu_2$      $\mu_3$      $\mu_4$

Comparações  
de interesse:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_{01} : \mu_1 = \mu_2 & \Rightarrow \alpha_1 \\ H_{02} : \mu_1 = \mu_3 & \Rightarrow \alpha_2 \\ H_{03} : \mu_1 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_3 \\ H_{04} : \mu_2 = \mu_3 & \Rightarrow \alpha_4 \\ H_{05} : \mu_2 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_5 \\ H_{06} : \mu_3 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_6 \end{array} \right.$$

$\alpha?$

Para testar as 6 hipóteses, qual é o nível de significância global para esta família de comparações entre pares de medias?

# Comparações Múltiplas

- **Comparações aos Pares (pares de médias sendo comparadas)**

$$H : \mu_i = \mu_j \quad \Leftrightarrow \quad \mu_i - \mu_j = 0$$

- **Contrastes entre Médias**

$$H : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = 0$$

- **Combinações Lineares de Médias**

$$H : 0,30 \mu_1 + 0,20 \mu_2 + 0,50 \mu_3 = 0$$

# Comparações Múltiplas

- **Intervalos de Confiança Individuais** para Contrastes entre Médias

$$H : \sum_{j=1}^k c_j \mu_j = 0 \quad ; \quad \sum c_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^k c_j \bar{Y}_j \pm t_{\nu; \alpha/2} s_c \sqrt{\sum_{j=1}^k \frac{c_j^2}{n_j}}$$

$$s_c = \sqrt{QM \text{ Res}}$$

$$\nu = n - k$$

Número de graus de  
liberdade do Resíduo

# Comparações Múltiplas

- **Exemplo: DCA 1 fator em 4 níveis**

$$H : \mu_1 = \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 = 0; \quad H : (1 \ -1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \pm t_{\nu; \alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_c^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\nu = n - k$$

QMRes

# Comparações Múltiplas

- Método de Contrastes Ortogonais**

$$C_1 = \sum_{j=1}^k c_{1j} \mu_j = 0 \quad ; \quad C_2 = \sum_{j=1}^k c_{2j} \mu_j = 0$$

$$\sum c_{1j} = 0 \quad \sum c_{2j} = 0 \quad \sum c_{1j} c_{2j} = 0$$

$$H_1 : \sum_{j=1}^k c_{1j} \mu_j = 0$$

$$H_2 : \sum_{j=1}^k c_{2j} \mu_j = 0$$

$$F_l = \frac{SQ(C_l)}{QM \text{ Res}} \sim F_{1;(n-k)}; \quad l=1,2$$

$$SQ(C_l) = \frac{\hat{C}_l^2}{\sum_j \frac{c_{lj}^2}{n_j}} = \frac{\left( \sum_j c_{lj} \bar{Y}_j \right)^2}{\sum_j \frac{c_{lj}^2}{n_j}} \quad ; \quad \frac{SQ(C_l)}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

A SQ do conjunto total de contrastes ortogonais é a soma das SQ dos contrastes individuais



# Comparações Múltiplas

- **Exemplo**

$$H_1 : C_1 = \sum_{j=1}^k c_{1j} \mu_j = 0 \quad H_2 : C_2 = \sum_{j=1}^k c_{2j} \mu_j = 0$$

$$\mathbf{k=3 \text{ tratamentos}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C1 = (1 \quad 0 \quad -1)} \\ \mathbf{C2 = (1/2 \quad -1 \quad 1/2)} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{k=4 \text{ tratamentos}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C1 = (1 \quad -1/3 \quad -1/3 \quad -1/3)} \\ \mathbf{C2 = (0 \quad -1/2 \quad -1/2 \quad 1)} \\ \mathbf{C3 = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0)} \end{array} \right.$$

## ■ Exemplo: Contrastes Ortogonais

DCA balanceado com um fator em 4 níveis e 8 réplicas

| U.E       | Ar Filtrado | O3    | NO2  | O3+NO2 |
|-----------|-------------|-------|------|--------|
| 1         | 1           | 12    | 12   | 13     |
| 2         | 8           | 6     | 4    | 14     |
| 3         | 9           | 10    | 11   | 14     |
| 4         | 9           | 13    | 7    | 17     |
| 5         | 7           | 13    | 8    | 11     |
| 6         | 7           | 13    | 10   | 14     |
| 7         | 4           | 6     | 12   | 13     |
| 8         | 9           | 10    | 5    | 14     |
| Média     | 6.75        | 10.38 | 8.63 | 13.75  |
| Variância | 8.21        | 8.84  | 9.69 | 2.78   |

A SQ do conjunto total de contrastes ortogonais é a soma das SQ dos contrastes individuais e o valor-p deste conjunto de comparações é a soma dos valores-p individuais

### One-way ANOVA: Ar Filtrado, O3, NO2, O3+NO2

#### Analysis of Variance

| Source | DF | SS     | MS    | F    | P     |
|--------|----|--------|-------|------|-------|
| Factor | 3  | 212.75 | 70.92 | 9.60 | 0.000 |
| Error  | 28 | 206.75 | 7.38  |      |       |
| Total  | 31 | 419.50 |       |      |       |

|       | Ar Filtrado | O3     | NO2   | O3+NO2 |
|-------|-------------|--------|-------|--------|
| Média | 6.75        | 10.38  | 8.63  | 13.75  |
| C1    | 1           | -1/3   | -1/3  | -1/3   |
| C2    | 0           | -1/2   | -1/2  | 1      |
| C3    | 0           | 1      | -1    | 0      |
|       | C           | SQ (C) | F     | p      |
| H1    | -4.167      | 104.20 | 14.10 | 0.002  |
| H2    | 4.250       | 96.30  | 13.00 | 0.002  |
| H3    | 1.750       | 12.25  | 1.66  | 0.210  |

# Comparações Múltiplas

- **Método de Tukey**

$$H : \mu_i = \mu_j \quad ; \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \text{ comparações}$$

Intervalo de Confiança  
Simultâneo de Tukey

$$\left( \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \right) \pm q_{k;v;\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n}}$$

↓  
n-k

Delineamento Balanceado

$q_{k;v;\alpha/2}$  : range studentizado (valor tabelado) Critério HSD  
(Honest Significant  
Difference)

$$\left( \bar{Y}_i - \bar{Y}_j \right) \pm \frac{q_{k;v;\alpha/2}}{\sqrt{2}} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Não Balanceado

# Comparações Múltiplas

Tukey's pairwise comparisons para o Exemplo de Clorofila a

Family error rate = 0.0500

Individual error rate = 0.0111

Critical value = 3.96

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

|   | 1                            | 2                           | 3                            |
|---|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 2 | <div>-9.303<br/>-3.464</div> | $\mu_1 < \mu_2$             |                              |
| 3 | <div>-2.486<br/>3.353</div>  | <div>3.897<br/>9.736</div>  | $\mu_2 > \mu_3$              |
| 4 | <div>-7.336<br/>-1.497</div> | <div>-0.953<br/>4.886</div> | <div>-7.770<br/>-1.930</div> |

ICS de Tukey

Conclusão?

# Comparações Múltiplas

- **Método de Dunnet**

$$H : \mu_j = \mu_{Controle}$$

Comparações das (k-1) médias de tratamento com um grupo controle ou de referência

$$\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_{Controle}\right) \pm t_{k;v;\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{Controle}}}$$

Valores tabelados  
de Dunnet  
 $v=n-k$

# Comparações Múltiplas

- **Método de Scheffé**

$$H : \sum_{j=1}^k c_j \mu_j = 0 \quad ; \quad \sum c_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^k c_j \bar{Y}_j \pm S \sqrt{\hat{V}(\sum c_j \bar{Y}_j)}$$

$$S^2 = (k-1) F_{(k-1);(n-k)}$$

# Comparações Múltiplas

- **Método de Bonferroni**

$$H : \sum_{j=1}^k c_j \mu_j = 0 \quad ; \quad \sum c_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^k c_j \bar{Y}_j \pm B \sqrt{\hat{V} \left( \sum c_j \bar{Y}_j \right)}$$

Intervalo de Confiança  
Simultâneo de Bonferroni  
(é mais conservador que o  
de Tukey)

$$B = t_{(n-k);(1-\alpha/2p)}$$



Correção de Bonferroni para  
“p” múltiplos testes

# Comparações Múltiplas

## Correções para Múltiplos Testes

| Rejeitar $H_{0j}$ se:                                                             | Método                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p_{(k)} < \alpha / K$                                                            | Correção de <u>Bonferroni</u> para múltiplos testes                                                                                        |
| $p_{(j)} < \alpha / (K - j + 1)$<br><i>para todo <math>j = 1, \dots, k</math></i> | Correção de <u>Holm</u> (Controle “forte” da taxa de erro para os múltiplos testes)                                                        |
| $p_{(j)} < j\alpha / K$<br><i>para algum <math>j \geq k</math></i>                | Correção FDR (Taxa de Falsa Descoberta): <u>Benjamini-Hochberg</u><br>Controle menos conservador da taxa de erro para os múltiplos testes) |

$K$ : número total de testes  $\alpha$ : nível de significância global fixado

$p_{(j)}$ : nível descritivo (p-valor) ordenado,  $p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(K)}$



Já vimos:

## Decomposição dos graus de liberdade do efeito de tratamento em contrastes ortogonais

| U.E       | Ar Filtrado | O3    | NO2  | O3+NO2 |
|-----------|-------------|-------|------|--------|
| 1         | 1           | 12    | 12   | 13     |
| 2         | 8           | 6     | 4    | 14     |
| 3         | 9           | 10    | 11   | 14     |
| 4         | 9           | 13    | 7    | 17     |
| 5         | 7           | 13    | 8    | 11     |
| 6         | 7           | 13    | 10   | 14     |
| 7         | 4           | 6     | 12   | 13     |
| 8         | 9           | 10    | 5    | 14     |
| Média     | 6.75        | 10.38 | 8.63 | 13.75  |
| Variância | 8.21        | 8.84  | 9.69 | 2.78   |

### One-way ANOVA: Ar Filtrado, O3, NO2, O3+NO2

#### Analysis of Variance

| Source | DF | SS     | MS    | F    | P     |
|--------|----|--------|-------|------|-------|
| Factor | 3  | 212.75 | 70.92 | 9.60 | 0.000 |
| Error  | 28 | 206.75 | 7.38  |      |       |
| Total  | 31 | 419.50 |       |      |       |

|       | Ar Filtrado | O3     | NO2   | O3+NO2 |
|-------|-------------|--------|-------|--------|
| Média | 6.75        | 10.38  | 8.63  | 13.75  |
| C1    | 1           | -1/3   | -1/3  | -1/3   |
| C2    | 0           | -1/2   | -1/2  | 1      |
| C3    | 0           | 1      | -1    | 0      |
|       | C           | SQ(C)  | F     | p      |
| H1    | -4.167      | 104.20 | 14.10 | 0.002  |
| H2    | 4.250       | 96.30  | 13.00 | 0.002  |
| H3    | 1.750       | 12.25  | 1.66  | 0.210  |

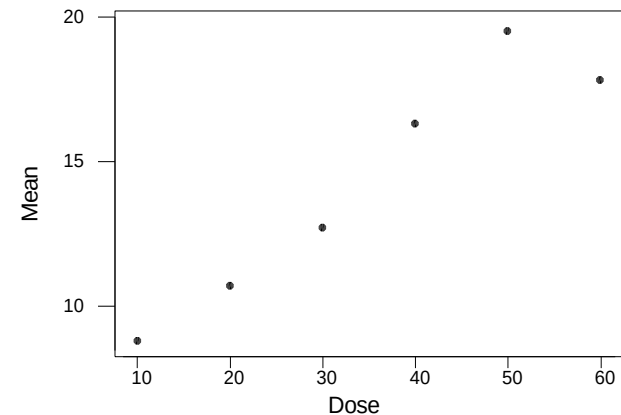
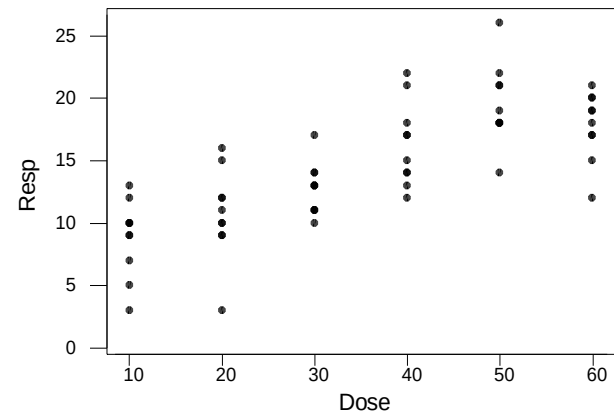
# Ajustes Polinomiais

## Decomposição dos graus de liberdade do efeito de tratamento em contrastes ortogonais

### Inibição celular segundo a dose DCA com 1 fator em 6 níveis (quantitativos)

Os níveis do fator  
são quantitativos

| U.E.   | D10  | D20  | D30  | D40  | D50  | D60  |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| 1      | 13   | 12   | 13   | 14   | 18   | 17   |
| 2      | 5    | 3    | 10   | 13   | 18   | 19   |
| 3      | 9    | 9    | 17   | 21   | 18   | 18   |
| 4      | 7    | 10   | 11   | 18   | 14   | 12   |
| 5      | 12   | 9    | 11   | 14   | 26   | 21   |
| 6      | 3    | 16   | 11   | 12   | 19   | 20   |
| 7      | 10   | 10   | 13   | 17   | 18   | 15   |
| 8      | 10   | 15   | 14   | 17   | 21   | 19   |
| 9      | 9    | 12   | 13   | 15   | 21   | 20   |
| 10     | 10   | 11   | 14   | 22   | 22   | 17   |
| Média  | 8.8  | 10.7 | 12.7 | 16.3 | 19.5 | 17.8 |
| Desvio | 3.05 | 3.59 | 2.06 | 3.34 | 3.21 | 2.10 |



## One-way ANOVA: Resp versus Dose

### Analysis of Variance for Resp

| Source | DF | SS      | MS     | F     | P     |
|--------|----|---------|--------|-------|-------|
| Dose   | 5  | 890.60  | 178.12 | 19.39 | 0.000 |
| Error  | 54 | 496.00  | 9.19   |       |       |
| Total  | 59 | 1386.60 |        |       |       |

**Tabela de ANOVA**

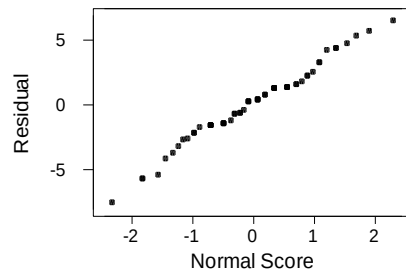
**Modelo ?**

**Hipóteses ?**

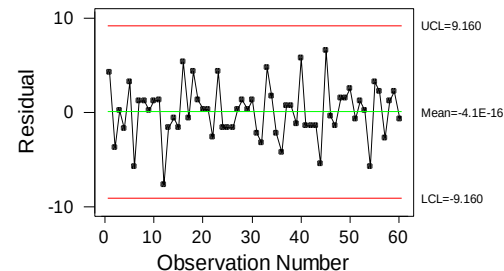
**Conclusão?**

### Residual Model Diagnostics

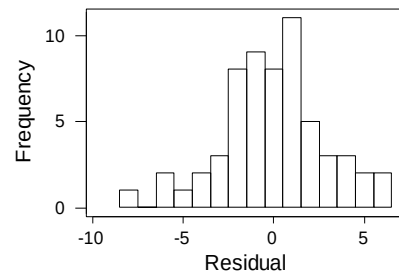
Normal Plot of Residuals



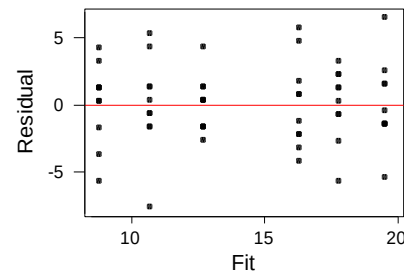
I Chart of Residuals



Histogram of Residuals



Residuals vs. Fits



Tukey's pairwise comparisons

Family error rate = 0.0500

Individual error rate = 0.00462      Critical value = 4.18

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

|   | 1                 | 2                 | 3                 | 4               | 5               |
|---|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|
| 2 | -5.906<br>2.106   |                   |                   |                 |                 |
| 3 | -7.906<br>0.106   | -6.006<br>2.006   |                   |                 |                 |
| 4 | -11.506<br>-3.494 | -9.606<br>-1.594  | -7.606<br>0.406   |                 |                 |
| 5 | -14.706<br>-6.694 | -12.806<br>-4.794 | -10.806<br>-2.794 | -7.206<br>0.806 |                 |
| 6 | -13.006<br>-4.994 | -11.106<br>-3.094 | -9.106<br>-1.094  | -5.506<br>2.506 | -2.306<br>5.706 |

**Conclusão?**

# Ajustes Polinomiais

## Tabelas de Contrastes Ortogonais Específicos

### Exemplo:

|         |                |    |    |    |     |    |   |
|---------|----------------|----|----|----|-----|----|---|
| $k = 6$ | 1 <sup>a</sup> | -5 | -3 | -1 | 1   | 3  | 5 |
|         | 2 <sup>a</sup> | 5  | -1 | -4 | -4  | -1 | 5 |
|         | 3 <sup>a</sup> | -5 | 7  | 4  | -4  | -7 | 5 |
|         | 4 <sup>a</sup> | 1  | -3 | 2  | 2   | -3 | 1 |
|         | 5 <sup>a</sup> | -1 | 5  | 10 | -10 | -5 | 1 |

# Ajustes Polinomiais

## Inibição celular segundo a dose

|                     | D10 | D20  | D30  | D40  | D50  | D60  |
|---------------------|-----|------|------|------|------|------|
| Média               | 8.8 | 10.7 | 12.7 | 16.3 | 19.5 | 17.8 |
| Coef_1 <sup>a</sup> | -5  | -3   | -1   | 1    | 3    | 5    |

$$F_{1^a} = \frac{SQ(C_{1^a})}{QM \text{ Res}} = \frac{(\sum c_j \bar{Y}_j)^2 / (\sum c_j^2 / n_j)}{9.19}$$

**Hipótese?**

$$\sum c_j \bar{Y}_j = (-5)8.8 + (-3)10.7 + \dots + (5)17.8 = 75.0$$

$$F_{1^a} = \frac{10(75)^2 / (25 + 9 + \dots + 25)}{9.19} = \frac{803.6}{9.19} = 87.9$$

$p < 0.001$

**Conclusão?**

# Análise de Regressão

## Regression Analysis: Resp versus Dose

The regression equation is

$$\text{Resp} = 6.80 + 2.14 \text{ Dose}$$

$S = 3.171$        $R\text{-Sq} = 58.0\%$        $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 57.2\%$

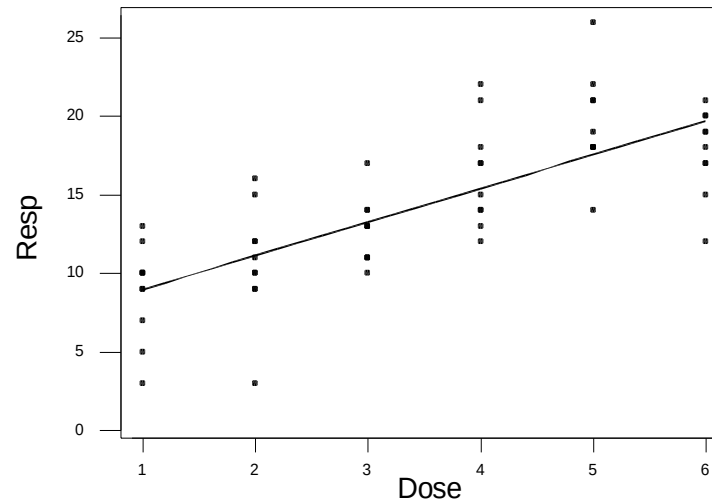
## Analysis of Variance

| Source         | DF | SS      | MS     | F     | P     |
|----------------|----|---------|--------|-------|-------|
| Regression     | 1  | 803.57  | 803.57 | 79.94 | 0.000 |
| Residual Error | 58 | 583.03  | 10.05  |       |       |
| Total          | 59 | 1386.60 |        |       |       |

## Regression Plot

$$\text{Resp} = 6.8 + 2.14286 \text{ Dose}$$

$S = 3.17052$      $R\text{-Sq} = 58.0\%$      $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 57.2\%$



Dados de  
clorofila a

# Comparações Múltiplas

## One-way ANOVA: Resp versus Trat

Analysis of Variance for Resp

| Source | DF | SS     | MS    | F     | P     |
|--------|----|--------|-------|-------|-------|
| Trat   | 3  | 201,45 | 67,15 | 20,59 | 0,000 |
| Error  | 20 | 65,23  | 3,26  |       |       |
| Total  | 23 | 266,68 |       |       |       |

Individual 95% CIs For Mean  
Based on Pooled StDev

| Level                | N | Mean   | StDev |                         |
|----------------------|---|--------|-------|-------------------------|
| T1                   | 6 | 5,250  | 1,408 | (-----*-----)           |
| T2                   | 6 | 11,633 | 2,222 | (-----*-----)           |
| T3                   | 6 | 4,817  | 1,348 | (-----*-----)           |
| T4                   | 6 | 9,667  | 2,075 | (-----*-----)           |
| Pooled StDev = 1,806 |   |        |       | -----+-----+-----+----- |
|                      |   |        |       | 6,0 9,0 12,0            |

Calcule Intervalos de Confiança Simultâneos de Tukey, Bonferroni e FDR. Compare.



**Table D.8:** Percent points for the Studentized range.Table entries are  $q_{.05}(K, \nu)$ .

| $\nu$    | K    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|          | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 15   | 20   | 30   | 50   |
| 1        | 18.0 | 27.0 | 32.8 | 37.1 | 40.4 | 43.1 | 45.4 | 47.4 | 49.1 | 55.4 | 59.6 | 65.1 | 71.7 |
| 2        | 6.09 | 8.33 | 9.80 | 10.9 | 11.7 | 12.4 | 13.0 | 13.5 | 14.0 | 15.7 | 16.8 | 18.3 | 20.0 |
| 3        | 4.50 | 5.91 | 6.82 | 7.50 | 8.04 | 8.48 | 8.85 | 9.18 | 9.46 | 10.5 | 11.2 | 12.2 | 13.4 |
| 4        | 3.93 | 5.04 | 5.76 | 6.29 | 6.71 | 7.05 | 7.35 | 7.60 | 7.83 | 8.66 | 9.23 | 10.0 | 10.9 |
| 5        | 3.64 | 4.60 | 5.22 | 5.67 | 6.03 | 6.33 | 6.58 | 6.80 | 6.99 | 7.72 | 8.21 | 8.87 | 9.67 |
| 6        | 3.46 | 4.34 | 4.90 | 5.30 | 5.63 | 5.90 | 6.12 | 6.32 | 6.49 | 7.14 | 7.59 | 8.19 | 8.91 |
| 7        | 3.34 | 4.16 | 4.68 | 5.06 | 5.36 | 5.61 | 5.82 | 6.00 | 6.16 | 6.76 | 7.17 | 7.73 | 8.40 |
| 8        | 3.26 | 4.04 | 4.53 | 4.89 | 5.17 | 5.40 | 5.60 | 5.77 | 5.92 | 6.48 | 6.87 | 7.40 | 8.03 |
| 9        | 3.20 | 3.95 | 4.41 | 4.76 | 5.02 | 5.24 | 5.43 | 5.59 | 5.74 | 6.28 | 6.64 | 7.14 | 7.75 |
| 10       | 3.15 | 3.88 | 4.33 | 4.65 | 4.91 | 5.12 | 5.30 | 5.46 | 5.60 | 6.11 | 6.47 | 6.95 | 7.53 |
| 11       | 3.11 | 3.82 | 4.26 | 4.57 | 4.82 | 5.03 | 5.20 | 5.35 | 5.49 | 5.98 | 6.33 | 6.79 | 7.35 |
| 12       | 3.08 | 3.77 | 4.20 | 4.51 | 4.75 | 4.95 | 5.12 | 5.27 | 5.39 | 5.88 | 6.21 | 6.66 | 7.21 |
| 13       | 3.06 | 3.73 | 4.15 | 4.45 | 4.69 | 4.88 | 5.05 | 5.19 | 5.32 | 5.79 | 6.11 | 6.55 | 7.08 |
| 14       | 3.03 | 3.70 | 4.11 | 4.41 | 4.64 | 4.83 | 4.99 | 5.13 | 5.25 | 5.71 | 6.03 | 6.46 | 6.98 |
| 15       | 3.01 | 3.67 | 4.08 | 4.37 | 4.59 | 4.78 | 4.94 | 5.08 | 5.20 | 5.65 | 5.96 | 6.38 | 6.89 |
| 16       | 3.00 | 3.65 | 4.05 | 4.33 | 4.56 | 4.74 | 4.90 | 5.03 | 5.15 | 5.59 | 5.90 | 6.31 | 6.81 |
| 17       | 2.98 | 3.63 | 4.02 | 4.30 | 4.52 | 4.70 | 4.86 | 4.99 | 5.11 | 5.54 | 5.84 | 6.25 | 6.74 |
| 18       | 2.97 | 3.61 | 4.00 | 4.28 | 4.49 | 4.67 | 4.82 | 4.96 | 5.07 | 5.50 | 5.79 | 6.20 | 6.68 |
| 19       | 2.96 | 3.59 | 3.98 | 4.25 | 4.47 | 4.65 | 4.79 | 4.92 | 5.04 | 5.46 | 5.75 | 6.15 | 6.63 |
| 20       | 2.95 | 3.58 | 3.96 | 4.23 | 4.45 | 4.62 | 4.77 | 4.90 | 5.01 | 5.43 | 5.71 | 6.10 | 6.58 |
| 21       | 2.94 | 3.56 | 3.94 | 4.21 | 4.42 | 4.60 | 4.74 | 4.87 | 4.98 | 5.40 | 5.68 | 6.07 | 6.53 |
| 22       | 2.93 | 3.55 | 3.93 | 4.20 | 4.41 | 4.58 | 4.72 | 4.85 | 4.96 | 5.37 | 5.65 | 6.03 | 6.49 |
| 23       | 2.93 | 3.54 | 3.91 | 4.18 | 4.39 | 4.56 | 4.70 | 4.83 | 4.94 | 5.34 | 5.62 | 6.00 | 6.45 |
| 24       | 2.92 | 3.53 | 3.90 | 4.17 | 4.37 | 4.54 | 4.68 | 4.81 | 4.92 | 5.32 | 5.59 | 5.97 | 6.42 |
| 25       | 2.91 | 3.52 | 3.89 | 4.15 | 4.36 | 4.53 | 4.67 | 4.79 | 4.90 | 5.30 | 5.57 | 5.94 | 6.39 |
| 26       | 2.91 | 3.51 | 3.88 | 4.14 | 4.35 | 4.51 | 4.65 | 4.77 | 4.88 | 5.28 | 5.55 | 5.92 | 6.36 |
| 27       | 2.90 | 3.51 | 3.87 | 4.13 | 4.33 | 4.50 | 4.64 | 4.76 | 4.86 | 5.26 | 5.53 | 5.89 | 6.34 |
| 28       | 2.90 | 3.50 | 3.86 | 4.12 | 4.32 | 4.49 | 4.62 | 4.74 | 4.85 | 5.24 | 5.51 | 5.87 | 6.31 |
| 29       | 2.89 | 3.49 | 3.85 | 4.11 | 4.31 | 4.47 | 4.61 | 4.73 | 4.84 | 5.23 | 5.49 | 5.85 | 6.29 |
| 30       | 2.89 | 3.49 | 3.85 | 4.10 | 4.30 | 4.46 | 4.60 | 4.72 | 4.82 | 5.21 | 5.47 | 5.83 | 6.27 |
| 35       | 2.87 | 3.46 | 3.81 | 4.07 | 4.26 | 4.42 | 4.56 | 4.67 | 4.77 | 5.15 | 5.41 | 5.76 | 6.18 |
| 40       | 2.86 | 3.44 | 3.79 | 4.04 | 4.23 | 4.39 | 4.52 | 4.63 | 4.73 | 5.11 | 5.36 | 5.70 | 6.11 |
| 45       | 2.85 | 3.43 | 3.77 | 4.02 | 4.21 | 4.36 | 4.49 | 4.61 | 4.70 | 5.07 | 5.32 | 5.66 | 6.06 |
| 50       | 2.84 | 3.42 | 3.76 | 4.00 | 4.19 | 4.34 | 4.47 | 4.58 | 4.68 | 5.04 | 5.29 | 5.62 | 6.02 |
| 100      | 2.81 | 3.36 | 3.70 | 3.93 | 4.11 | 4.26 | 4.38 | 4.48 | 4.58 | 4.92 | 5.15 | 5.46 | 5.83 |
| $\infty$ | 2.77 | 3.31 | 3.63 | 3.86 | 4.03 | 4.17 | 4.29 | 4.39 | 4.47 | 4.80 | 5.01 | 5.30 | 5.65 |

K: número de grupos  
 v: número de graus  
 de Liberdade do erro