VALOR EM RISCO

1. **Introdução**

- Interesse: calcular uma medida de um tipo particular de risco, o chamado risco de mercado. Tal medida é o VaR (valor em risco). O cálculo do VaR envolve o cálculo da volatilidade de um ativo financeiro ou de uma carteira de instrumentos financeiros.

- Abordagens: (i) RiskMetrics : EWMA + Normalidade

  (ii) Econométrica: ARMA+GARCH

  (iii) Quantis empíricos

  (iv) Teoria dos Valores Extremos (TVE)

- VaR: medida de risco financeiro de mercado e que dá uma medida do grau de incerteza sobre retornos líquidos futuros.

2. **Valor em Risco**

- VaR: medida da variação potencial máxima do valor de um ativo (ou carteira de ativos), sobre um período pré-fixado, com dada probabilidade. Ou seja, quanto se pode perder, com probabilidade p, sobre um horizonte h fixado.

  Do ponto de vista de uma empresa, o VaR é uma medida de perda associada a um evento extremo, sob condições normais de mercado.

- **Exemplo 1:** Suponha que exista uma chance de 95% de que a taxa de câmbio Real/USD não caia mais do que 1% em um dia. Suponha, ainda, que uma empresa tenha 100 milhões de reais aplicados num fundo cambial. Calculemos a perda potencial sobre este valor aplicado.

Uma série temporal do desvio padrão (volatilidade) σ_t dos retornos r_t da taxa de câmbio Real/USD pode dar uma indicação da variação da taxa. Admita normalidade dos retornos. Suponha que uma estimativa do desvio padrão hoje seja $\sigma_t = 0,46\%$. Então o VaR é calculado como

$$\text{VaR} = (1,65)(\sigma_t) = (1,65)(0,46) = 0,759\%.$$

Portanto, não se espera que a taxa de câmbio caia mais do que $0,759\%$, com 95% de probabilidade. O valor $1,65$ é o $(0,05)$-quantil da $\mathcal{N}(0,1)$. Em reais, o VaR é o valor de mercado da posição multiplicado pelo valor obtido acima, ou seja,

$$\text{Risco} = 100 \text{ milhões} \times 0,759\% = 759.000,00 \text{ reais.}$$

A conclusão é que em 95% das vezes, não se perderá mais do que R$ 759.000,00 em um dia.

- Uma posição financeira *comprada* (ou "long") significa possuir determinado ativo (ou carteira de ativos). Uma posição financeira *vendida* (ou "short") envolve vender um ativo que não se possui. Esta operação é realizada alugando-se o ativo. Em data futura, o vendedor é obrigado a comprar exatamente o mesmo número de cotas ou ações alugadas (e não o valor em moeda), para pagar o débito. Como o pagamento é em cotas ou ações, o vendedor ganha com a queda do preço do ativo.

- Suponha que no instante t estejamos interessados em calcular o risco de uma posição financeira para o horizonte $h > 0$. Seja

$$\Delta P(h) = P(t+h) - P(t)$$

a variação do valor do ativo entre os dois instantes. A quantidade $\Delta P(h)$ representa o lucro ou a perda (L & P) da posição sobre o horizonte h. Do ponto de vista prático, é o L & P obtido marcando-se a posição a mercado hoje e deixando-a sem mudanças até uma nova marcação h dias depois, digamos. Chamemos de $F_h(\cdot)$ a função de distribuição acumulada (f.d.a.) de $\Delta P(h)$.

- **Definição:** Definimos o VaR de uma posição comprada sobre o horizonte h, com probabilidade p, $0 < p < 1$, por meio de

$$p = P(\Delta P(h) \leq \mathsf{VaR}) = F_h(\mathsf{VaR}). \quad (1)$$

Observemos que o VaR depende de p e de h, ou seja, deveríamos escrever $\mathsf{VaR}_{p,h}$. Além disso, o valor em risco aumenta com p diminuindo ou com h aumentando.

(i) O VaR é dado em unidades monetárias (u.m.), por exemplo, reais. Lembremos que os retornos simples, R_t, são dados em porcentagem e que os log-retornos r_t são aproximadamente iguais a R_t, logo podemos supor que os r_t medem, aproximadamente, variações porcentuais. Assim sendo, usaremos log-retornos no que segue.

(ii) A definição mostra que o VaR é o p-quantil da distribuição $F_h(\cdot)$. Na prática, teremos que estimar este quantil, usando por exemplo a distribuição empírica dos retornos.

(iii) O VaR tem valor negativo, pois quem tem uma posição comprada sofre uma perda se $\Delta P(h) < 0$.

(iv) A quantia em u.m. no cálculo do VaR é obtida como no exemplo ou seja, multiplicando o valor da posição financeira pelo VaR do log-retorno. A posição financeira em u.m. é usualmente o valor do ativo marcado pelo mercado (“mark-to-market”).

- No caso de uma posição vendida, há perda se $\Delta P(h) > 0$, ou seja, o preço do ativo aumenta. Neste caso o VaR é definido por

$$p = P(\Delta P(h) \geq \text{VaR}) = 1 - F_h(\text{VaR}), \tag{2}$$

que tipicamente é positivo para p pequeno. O sinal positivo aqui indica perda.

As definições (1) e (2) implicam que o VaR é calculado usando a cauda esquerda da distribuição $F_h(\cdot)$, para uma posição comprada e usando a cauda direita, para uma posição vendida. Também, a definição (6.1) aplica-se a uma posição vendida se usarmos a distribuição de $-\Delta P(h)$. Portanto, basta considerar o cálculo do VaR para uma dessas posições.

3. VaR **Usando a Distribuição Normal**

- RiskMetrics: suposição é que a distribuição condicional dos retornos, dada a informação passada, é normal com média zero e variância σ_t^2, ou seja,

$$r_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2).$$

Além disso, para estimar a volatilidade σ_t^2 é usado o modelo EWMA ("exponentially weighted moving average")

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{3}$$

- Maneira equivalente: abordagem de modelos GARCH, notando-se que (3) pode ser pensado como um modelo IGARCH(1,1).

  O log-retorno de k períodos, $r_t[k]$, do instante $t+1$ ao instante $t+k$, é dado por

$$r_t[k] = r_{t+1} + r_{t+2} + \ldots + r_{t+k},$$

  de modo que podemos escrever que

$$r_t[k] | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2[k]),$$

  onde $\sigma_t^2[k]$, a volatilidade deste retorno, pode ser calculada usando resultados da modelagem GARCH.

- $$\begin{aligned} \log P_t - \log P_{t-1} &= r_t = a_t, \\ a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \sim \text{IGARCH}(1,1), \\ \varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0,1), \end{aligned}$$

  segue-se que

  $$\sigma_t^2[k] = \text{Var}(r_t[k]|\mathcal{F}_t) = \text{Var}(\sum_{i=1}^{k} r_{t+i}|\mathcal{F}_t) =$$

  $$= \sum_{i=1}^{k} \text{Var}(a_{t+i}|\mathcal{F}_t),$$

  dado que os a_t são não-correlacionados. Como $a_{t-1} = r_{t-1} = \sigma_{t-1}\varepsilon_{t-1}$, obtemos de (3)

  $$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2,$$

  ou ainda,

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{t-1}^2(\varepsilon_{t-1}^2 - 1).$$

Segue-se que

$$\sigma_{t+i}^2 = \sigma_{t+i-1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{t+i-1}^2(\varepsilon_{t+i-1}^2 - 1),$$

$i = 2, \ldots, k$.

Como $E(\varepsilon_{t+i-1}^2 - 1) = 0$, $i \geq 2$, obtemos

$$E(\sigma_{t+i}^2|\mathcal{F}_t) = E(\sigma_{t+i-1}^2|\mathcal{F}_t),\ i = 2, \ldots, k. \tag{4}$$

Para previsão a um passo da volatilidade, de (3) obtemos

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1-\lambda)r_t^2,$$

e (4) mostra que

$$\mathrm{Var}(r_{t+i}|\mathcal{F}_t) = \sigma^2_{t+1}, \;\; i = 2, \ldots, k,$$

ou seja,

$$\sigma^2_t[k] = k\sigma^2_{t+1}. \qquad (5)$$

- Podemos escrever que

$$r_t[k]|\mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(0, k\sigma^2_{t+1}).$$

Portanto, sob o modelo adotado (3), a variância condicional dos log-retornos de k períodos é proporcional ao horizonte k e o desvio padrão condicional de $r_t[k]$ é dado por $\sqrt{k}\sigma_{t+1}$, expressão esta usualmente chamada "regra da raiz quadrada do tempo".

- Por exemplo, se fixarmos em (1) a probabilidade $p = 5\%$, então o RiskMetrics usa $-1,65\sigma_{t+1}$ como VaR, que é o

$0,05$-quantil da normal com média zero e variância σ_t^2. Normalmente o sinal negativo, que significa perda, é ignorado e

$$\text{VaR} = (\text{Valor da posição}) \times (1,65) \times (\sigma_{t+1}).$$

Esta expressão corresponde ao VaR de um período (um dia, por exemplo). O VaR de k períodos é dado por

$$\text{VaR}[k] = (\text{Valor da posição}) \times (1,65) \times \sqrt{k} \times \sigma_{t+1}.$$

- **Exemplo 1:** (continuação)

$$\text{VaR} = (100 \text{ milhões}) \times (1,65) \times (0,46\%)$$

$$= 759.000,00,$$

ao passo que o VaR de 30 dias é dado por

$$\text{VaR}[30] = (100 \text{ milhões}) \times (1,65) \times \sqrt{30} \times (0,46\%)$$

$$= 4.157.214,00.$$

- **Exemplo 2:** posição comprada de 10 milhões de reais em ações da Petrobrás e queremos calcular o VaR de 1 e 15 dias.

  log-retornos diários da Petrobrás, com $T = 1498$ observações

$$\sigma_t^2 = 0,81\sigma_{t-1}^2 + 0,19r_{t-1}^2.$$

  Dos dados obtemos $r_{1498} = 0,011124$ e do modelo ajustado obtemos $\hat{\sigma}_{1498}^2 =$

$0,000235$. Logo a estimativa da volatilidade 1 passo a frente é dada por $\hat{\sigma}^2_{1498}(1) = 0,000214$. Se $p = 0,05$, o quantil da distribuição é $-1,65\sqrt{0,000214} = -0,02413$.

O sinal negativo indica perda e o VaR de um dia será

$$\text{VaR} = 10.000.000,00 \times 0,02413$$

$$= 241.300,00,$$

ao passo que o VaR de 15 dias será

$$\text{VaR}[15] = \sqrt{15} \times 241.300,00 = 934.550,00.$$

- média da série não for zero, o modelo fica

$$r_t = \mu + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 \sim \text{IGARCH}(1,1), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Neste caso o p-quantil é dado por $\mu + z_p\sigma_{t+1}$, onde z_p é o p-quantil da normal padrão; se $p = 0,05$, então $z_p = -1,65$.

Para k períodos, o p-quantil é $k\mu + z_p\sqrt{k}\sigma_{t+1}$; se $p = 0,05$, este ficará $k\mu - 1,65\sqrt{k}\sigma_{t+1} = \sqrt{k}(\sqrt{k}\mu - 1,65\sigma_{t+1})$, que não é igual a $\sqrt{k}$VaR.

- Suponha que se tenha agora uma carteira com m posições financeiras e sejam

  $r_{1t}, \ldots, r_{mt}$ os respectivos retornos.

$$\rho_{ij} = \text{Corr}(r_{it}, r_{jt}) = \frac{\gamma_{ij,t}}{\sigma_{ii,t}\sigma_{jj,t}},$$

para $i < j = 1, \ldots, m$: correlações entre os retornos.

Então as covariâncias $\gamma_{ij,t}$ são estimadas usando, no lugar de (3), o modelo

$$\gamma_{ij,t} = \lambda\gamma_{ij,t-1} + (1-\lambda)r_{i,t-1}r_{j,t-1}. \quad (6)$$

Desta maneira é fácil ver que o VaR da carteira é dado por

$$\text{VaR} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \text{VaR}_i^2 + 2\sum_{i<j} \rho_{ij}\text{VaR}_i\text{VaR}_j}, \quad (7)$$

onde VaR_i é o valor em risco para o retorno r_{it}. O S+FinMetrics calcula as correlações por meio da função EWMA.

- **Exemplo 3:** carteira com dois ativos, sendo uma posição de 10 milhões de reais em ações da Petrobrás e outra de 5 milhões de reais em ações do Banespa.

exemplo anterior: $\text{VaR}_1 = -0,02413$;

VaR para a segunda posição : suponha que $\lambda = 0,85$.

Obtemos $\hat{\sigma}_{2,1498}(1) = 0,000315$;

$\text{VaR}_2 = -1,65\sqrt{0,000315} = -0,02929$.

Em reais, este VaR é de

$5.000.000,00 \times 0,2929 = 146.450,00$.

A seguir, usaremos (7) para estimar a covariância prevista no instante $t = 1498$. Usando $\lambda = 0,90$ para a carteira, temos que

$$\hat{\gamma}_{12,1498}(1) = 0,90\gamma_{12,1498} + 0,10 r_{1,1498} r_{2,1498},$$

$r_{1,1498} = 0,011124$, $r_{2,1498} = -0,00982$,

$\gamma_{12,1498} = 0,0000706$.

Obtemos, então,

$\hat{\gamma}_{12,1498}(1) = 0,000052616$.

Segue-se que a correlação ρ_{12} entre os dois ativos é estimada por

$$\widehat{\rho}_{12,1498}(1) = (0,000052616)/(0,0146 \times 0,0177)$$

$$= 0,175.$$

Logo, o VaR de um dia da carteira é, usando (7),

$$\text{VaR} = 0,04108.$$

4. VaR **Usando Modelos ARIMA e GARCH**

- Estratégia: modelar a média da série de retornos r_t por meio de um modelo ARMA e depois modelar os resíduos a_t deste modelo por um membro da família ARCH. Por exemplo, se escolhermos um modelo GARCH(r,s) para usar, teremos o modelo ARMA(p,q)-GARCH(r,s):

$$
\begin{aligned}
r_t &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j}, && (8)\\
a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, && (9)\\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2. && (10)
\end{aligned}
$$

- ε_t :normal, t ou distribuição de erro generalizada.

(i) $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow$

$$
r_{t+1}|\mathcal{F}_t \ \sim \ \mathcal{N}(\hat{r}_t(1), \hat{\sigma}_t^2(1)),
$$

onde $\hat{r}_t(1)$ e $\hat{\sigma}_t^2(1)$ são as previsões a um passo da média e variância usando (9) e (11), respectivamente.

Supondo-se, por exemplo, $p = 0,05$,

$$
\text{VaR} = \hat{r}_t(1) - 1,65\hat{\sigma}_t(1). \qquad (11)
$$

(ii) $\varepsilon_t \sim t_\nu$, o p-quantil é dado por $\hat{r}_t(1) - t^*_\nu(p)\hat{\sigma}_t(1)$, onde $t^*_\nu(p)$ é o p-quantil da distribuição t_ν padronizada.

Chamando de $Q(p)$ o p-quantil de t_ν, então temos

$$p = P(t_\nu \leq Q(p)) =$$

$$= P\left(\frac{t_\nu}{\sqrt{\nu/(\nu-2)}} \leq \frac{Q(p)}{\sqrt{\nu/(\nu-2)}}\right) =$$

$$= P(t^*_\nu \leq Q^*(p)), \quad \nu > 2,$$

ou seja, $Q^*(p)$ é p-quantil da distribuição t_ν padronizada. Logo,

$$\text{VaR} = \hat{r}_t(1) - \frac{t_\nu(p)\hat{\sigma}_t(1)}{\sqrt{\nu/(\nu-2)}}. \qquad (12)$$

- **Exemplo 2:** (continuação) Modelo adequado: AR(1) – GARCH(1,1) gaussiano, que estimado usando o S+FinMetrics resulta ser

$$r_t = 0,00223 + 0,12394 r_{t-1} + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\sigma_t^2 = 0,00003 + 0,1432 a_{t-1}^2 + 0,8318 \sigma_{t-1}^2.$$

Dos dados: $r_{1498} = 0,011124$, $r_{1497} = -0,006689$,

de modo que a previsão da série um passo à frente é dada por

$$\hat{r}_{1498}(1) = 0,00223 + 0,12394 r_{1498} = 0,003609.$$

A previsão da volatilidade um passo à frente é

$$\hat{\sigma}^2_{1498}(1) = 0,00003 + 0,1432 a^2_{1498}$$

$$+0,8318\sigma^2_{1498}.$$

Agora,

$a_{1498} = r_{1498} - 0,00223 - 0,12394 r_{1497} = 0,009723$,

$\sigma^2_{1498} = 0,000459$ (modelo GARCH ajustado),
de modo que

$$\hat{\sigma}^2_{1498}(1) = 0,00003 - (0,1432)(0,009723)^2 +$$

$$+(0,8318)(0,000459) = 0,000402.$$

O $0,05$–quantil será, então,

$$\hat{r}_{1498}(1) - 1,65\hat{\sigma}_{1498}(1)$$

$$= 0,003609 - 1,65(0,02004) = -0,0295.$$

Finalmente, o valor em risco de um dia é dado por

$$\text{VaR} = 10.000.000,00 \times 0,0295$$

$$= 295.0000,00.$$

- Para se obter o VaR de k períodos, temos que obter $r_t[k]$ como antes. Estando na origem T ,

$$r_T[k] = r_{T+1} + \ldots + r_{T+k},$$

e usando (9) e (11) podemos obter a média e variância condicionais de $r_T[k]$ dada a informação $\mathcal{F}_T$ até o instante T.

- **Proposição 1.** (a) A previsão da média do retorno r_t no período k é dada por

$$\hat{r}_T[k] = \hat{r}_T(1) + \ldots + \hat{r}_T(k), \qquad (13)$$

onde $\hat{r}_T(h)$ é a previsão de origem T e horizonte h usando (6.9).

(b) O erro de previsão é dado por

$$e_T[k] = a_{T+k} + (1+\psi_1)a_{T+k-1} + \ldots + (\sum_{i=0}^{k-1} \psi_i)a_{T+1}, \qquad (14)$$

onde os ψ_i são os pesos da representação do processo como uma média móvel infinita.

(c) A previsão da volatilidade do retorno no período k é dada por

$$\mathsf{Var}(e_T[k]|\mathcal{F}_T) = \hat{\sigma}^2_T(k)+(1+\psi_1)^2\hat{\sigma}^2_T(k-1)+\ldots+$$

$$+(\sum_{i=0}^{k-1}\psi_i)^2\hat{\sigma}^2_T(1). \qquad (15)$$

onde $\hat{\sigma}^2_T(h)$ é a previsão h passos a frente da volatilidade usando (11).

- **Exemplo 2:** (continuação). Calculemos o VaR de 5 dias para o exemplo anterior. Para um modelo AR(1)

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t,$$

sabemos que $\psi_j = \phi_1^j$, $j \geq 1$. A previsão de origem T e horizonte h é dada por

$$\hat{r}_T(h) = \phi_0 + \phi_1 \hat{r}_T(h-1),$$

sendo que para $h = 1$, $\widehat{r}_T(0) = r_T$. É fácil ver que obtemos $\widehat{r}_{1498}(5) = 0,002546$. Lembremos que estas previsões convergem para $E(r_t) = 0,00255$, quando $h \to \infty$.

Por outro lado, para o modelo GARCH(1,1) temos que

$$\widehat{\sigma}^2_T(h) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\widehat{\sigma}^2_T(h-1),\ h \geq 2,$$

sendo que para $h = 1$ a previsão é $\alpha_0 + \alpha_1 a^2_T + \beta_1 \sigma^2_T$. Usando os valores obtidos antes podemos calcular as previsões da volatilidade para $h = 1, 2, \ldots, 5$. Finalmente, usando (15) obtemos a previsão da volatilidade do retorno de 5 dias, ou seja,

$$\sigma^2_T[5] = \widehat{\sigma}^2_T(5) + \ldots + (1 + \psi_1 + \ldots + \psi_4)^2 \widehat{\sigma}^2_T(1),$$

cujo valor resulta $\sigma^2_T[5] = 0,0028415$. O valor em risco de 5 dias é, então, com $p = 0,05$,

$$\text{VaR}[5] = 0,002546 - 1,65\sqrt{0,0028415}$$

$$= -0,08541.$$

Em u.m. obtemos o valor R\$854.100,00.

5. VaR **Usando Quantis Empíricos**

- $r_1, \ldots, r_T$: retornos observados

  $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \ldots \leq r_{(T)}$: estatísticas de ordem

  $Q(p)$: p-quantil da distribuição (desconhecida) dos retornos

  estimador consistente: p-quantil empírico, definido por

$$q_p = \begin{cases} r_{(i)}, & \text{se } p = p_i = (i - 0,5)/T, \\ (1 - f_i)r_{(i)} + f_i r_{(i+1)}, & \text{se } p_i < p < p_{i+1} \\ r_{(1)}, & \text{se } p < p_1 \\ r_{(T)}, & \text{se } p > p_T, \end{cases} \tag{15}$$

onde $f_i = (p - p_i)/(p_{i+1} - p_i)$.

Uma suposição aqui adotada é que a distribuição dos retornos continue válida para o período de previsão, o que pode não ser razoável.

- **Exemplo 4:** Considere os mesmos dados do exemplo 2 e calculemos o VaR de um dia usando os quantis empíricos. Por (16) temos

  $p_{74} = 0,0490654$, $p_{75} = 0,0500667$ e $f_{74} = 0,93$ de onde

  $$q(0,05) = (0,07)r_{(74)} + (0,93)r_{(75)} = -0,4816.$$

  Segue-se que o valor em risco de um dia da posição é VaR= 481.600,00 reais.

6. VaR **Usando Valores Extremos**

- Obtidas as estatísticas de ordem $r_{(1)} \leq \cdots \leq r_{(T)}$, vamos nos fixar em:

  $r_{(1)} = \min\{r_1, \ldots, r_T\}$,

  $r_{(T)} = \max\{r_1, \ldots, r_T\}$.

  mínimo: relevante para posições compradas

  máximo: relevante para posições vendidas.

  Basta considerar um dos casos, devido ao fato que $r_{(1)} = -\max\{s_1, \ldots, s_T\}$, onde $s_t = -r_t$, $t = 1, \ldots, T$.

- A teoria de valores extremos (TVE) clássica estuda o comportamento de máximos, mínimos e outras estatísticas de ordem, para seqüências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Extensões para o caso de séries estacionárias com dependência fraca e séries não-estacionárias foram consideradas na literatura. Veja Coles (2001) para detalhes. Mesmo que a série seja dependente, considerando-se os máximos de blocos, como veremos a seguir, a suposição de que estes máximos sejam independentes parece ser razoável na prática.

- A TVE procura obter a distribuição limite (aproximada) para o máximo normalizado

$$r_T^* = \frac{r_{(T)} - b_T}{a_T}, \tag{16}$$

para seqüências de constantes $\{a_T > 0\}$ e $\{b_T\}$, que são escolhidas de modo a estabilizar a posição e escala do máximo, quando $T \to \infty$.

- supondo-se os retornos independentes com distribuição F, se existirem seqüências como acima tais que a distribuição de

(6.18) converge para a distribuição não-degenerada $G(z)$, então G pertence a uma de três famílias, que podem ser conjuntamente colocadas na forma

$$G(z) = \exp\{-\left[1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\}, \tag{17}$$

definida sobre $\{z : 1+\xi(z-\mu)/\sigma > 0\}$, para $-\infty < \mu < \infty$, $-\infty < \xi < \infty$, $\sigma > 0$.

- A família (17) é chamada *distribuição generalizada de valores extremos* (GVE), sendo μ o *parâmetro de posição*, σ o *parâmetro de escala* e ξ o *parâmetro de forma.* Como visto no apêndice, esta família é determinada pelo parâmetro ξ, de modo que se $\xi = 0$ obtemos a família tipo I de Gumbel, se $\xi > 0$ obtemos a família tipo II de Fréchet e se $\xi < 0$ a família tipo III de Weibull.

- Para aplicar a TVE a séries de retornos, procedemos como segue:

  (a) dividimos a séries observada de retornos $r_1, \ldots, r_T$ em m blocos de tamanho n;

  (b) obtemos o máximo de cada bloco, $r_{n,i}, i = 1, \ldots, m$, aos quais a TVE pode ser aplicada, ou seja, ajustamos uma distribuição GVE a esses máximos;

  (c) estimamos os quantis desta distribuição, a partir do qual podemos obter o VaR de uma posição vendida. Note-se que

$$r_{n,i} = \max_{1 \leq j \leq n} \{r_{(i-1)n+j}\}, \; i = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

- A coleção de máximos (18) pode ser usada para estimar os parâmetros do modelo GVE. Usualmente os blocos são escolhidos de modo a corresponder a um ano de observações, se tivermos por exemplo dados mensais. No caso de retornos diários, os valores usados são $n = 21$ (um mês), $n = 63$ (um trimestre) e $n = 252$ (um ano). Podemos obter os EMV, supondo

$$z_{n,i} = \frac{r_{n,i} - b_n}{a_n}. \tag{19}$$

Estimadores dos quantis da distribuição dos máximos de grupos são obtidos invertendo-se a equação (17). Se $0 < p^* < 1$, o $(1 - p^*)$-quantil é dado por

$$z_{p^*} = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi}[1 - \{-\log(1-p^*)\}^{-\xi}], & \text{se } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \log[-\log(1-p^*)], & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \tag{20}$$

com $G(z_{p^*}) = 1 - p^*$. Este quantil é, às vezes, chamado de *nível de retorno*, associado ao *período de retorno* $1/p^*$.

- Para obter o VaR da série de retornos original r_t temos que relacionar quantis desta série com os quantis da série dos máximos. Temos

$$p^* = P(r_{n,i} \geq z_{p^*}) = 1 - P(r_{n,i} \leq z_{p^*}) = 1 - [P(r_t \leq z_{p^*})]^n,$$

do que seque

$$1 - p^* = [1 - P(r_t \geq z_{p^*})]^n. \qquad (21)$$

Para a série original de retornos, r_t, fixado p, o $(1-p)$-ésimo quantil de r_t é z_{p^*} se a probabilidade p^* for escolhida de (21) com $p = P(r_t \geq z_{p^*})$, logo devemos ter

$$1 - p^* = (1 - p)^n.$$

- VaR de uma posição vendida:

$$\text{VaR} = \begin{cases} \mu_n - \frac{\sigma_n}{\xi_n}\{1 - [-n \log(1-p)]^{-\xi_n}\}, & \text{se } \xi_n \neq 0 \\ \mu_n - \sigma_n \log[-n \log(1-p)], & \text{se } \xi_n = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Para posições compradas vale um raciocínio análogo, trabalhando com $r_{(1)}$ e a definição (1).

- Resumindo, o procedimento para calcular o VaR no caso de uma posição financeira vendida, usando a TVE, é:

(a) Selecione n e obtenha os máximos dos blocos, $\{r_{n,i}\}$.

(b) Obtenha os EMV de μ, σ, ξ, para o valor fixado de n.

(c) Se o modelo ajustado for adequado, use (22) para calcular o VaR.

- **Exemplo 5.** Considere a situação em que um fundo mantém uma posição vendida de 10 milhões de reais em ações do Banespa. Consideremos os $T = 1470$ últimos log-retornos, deprezando-se os primeiros 28 dados, para podermos obter $m = 70$ blocos de $n = 21$ dias, ou seja, estamos usando máximos mensais. Aos 70 máximos de blocos assim obtidos ajustamos uma distribuição GVE. Utilizamos aqui o software desenvolvido por Coles (2001), que pode ser obtido do site do autor. Os estimadores obtidos são:

  $\widehat{\mu} = 0,0671(0,00489)$, $\widehat{\sigma} = 0,0357(0,00394)$ e $\widehat{\xi} = 0,2242(0,10543)$,

  onde colocamos entre parênteses os respectivos desvios padrões. O valor da log-verossimilhança resultante é $-113,9054$, que poderia ser usado para comparar diversos ajustes, por exemplo, para $n = 63$.

A função gev do S+FinMetrics/EVIS também pode ser utilizada e aplicada neste caso produz os mesmos resultados. Substituindo estes valores em (22), com $p = 0,05$ obtemos

$$\text{VaR} = 0,0671 - \frac{0,0357}{0,2242}\{1 - [-21 \log(0,95)]^{-0,2242}\}$$

$$= 0,0645.$$

Segue-se que o VaR de um dia da posição é de (10milhões)$\times 0,0645 = 645.000,00$.