PROCESSOS LINEARES

1. **Teorema**(Wold): Todo processo estacionário de segunda ordem, puramente não-determinístico, pode ser escrito como

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \qquad (1)$$

com $\{\varepsilon_t\}$ uma seqüência de v.a. não correlacionadas, de média zero e variância σ^2 constante (ruído branco)

- $E(X_t) = \mu$
- $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}, \quad \sum \psi_j^2 < \infty.$
- $\rho_k = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$

2. Processos ARMA: São casos particulares de (1)

   - $\psi_j = \phi^j \Rightarrow X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, $\sim$ AR(1), $|\phi| < 1$, $\rho_k = \phi^k$.

   - $\psi_1 = -\theta$, $\psi_j = 0, j > 1 \Rightarrow X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \sim$ MA(1), $\rho_1 = (-\theta)/(1+\theta^2)$, $\rho_j = 0$, $j > 1$.

   - $\psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \rightarrow$ ARMA(1,1), $\rho_1 = (1-\phi\theta)/(1+\theta^2-2\phi\theta)$, $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$, $k > 1$.

3. **Modelos Auto-regressivos**

   - Dizemos que $\{X_t, t \in Z\}$ é um processo auto-regressivo de ordem p, e escrevemos $X_t \sim AR(p)$, se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} \phi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t, \qquad (2)$$

onde $\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p$ são parâmetros reais e $\varepsilon_t \sim \mathrm{RB}(0, \sigma^2)$. Segue-se que $E(X_t) = \mu$ e se escrevermos o processo na forma

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

então

$$\mu = E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p}.$$

- Definamos o operador retroativo B através de $B^s X_t = X_{t-s}, s \geq 1$. Então (2 pode ser escrita

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \varepsilon_t, \qquad (3)$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ é o operador auto-regressivo de ordem p e $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha $\mu = 0$ no que segue.

- AR(1):

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{4}$$

Aqui, $\phi(B) = 1 - \phi B$, com auto-covariância:

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^\tau \ , \quad \tau \geq 0.$$

Como γ_τ é simétrica, podemos escrever finalmente a f.a.c.v. de um processo AR(1) como

$$\gamma_\tau = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|\tau|}, \quad \tau \in Z. \tag{5}$$

A função de auto-correlação é

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \phi^{|\tau|}\,, \quad \tau \in Z. \tag{6}$$

- Supondo o processo estacionário, multiplicando-se ambos os membros de (2) por $X_{t-\tau}$ e tomando valores esperados, obtemos

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1\rho_1 - \ldots - \phi_p\rho_p}\,, \quad \tau = 0, \tag{7}$$

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p}\,, \quad \tau > 0. \tag{8}$$

- A solução geral desta equação é dada por (Miller,1969)

$$\gamma_\tau = A_1G_1^\tau + A_2G_2^\tau + \ldots + A_pG_p^\tau, \tag{9}$$

onde os G_i's satisfazem

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^{p} (1 - G_i B).$$

Como as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, devemos ter que $|G_i| < 1$, para todo $i = 1, \ldots, p$.

- Estacionariedade:

  Pode-se demonstrar (ver Box, Jenkins e Reinsel, 1994) que a *condição para que X_t seja estacionário é que todas as raízes de $\phi(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário*. Em particular, para $p = 1$, $\phi(B) = 1 - \phi B = 0$ implica $B = \phi^{-1}$ e a condição enunciada acarreta $|\phi| < 1$.

4. **Processos de Médias Móveis**

- Dizemos que $\{X_t, t \in Z\}$ é um processo de médias móveis de ordem q, denotado por MA(q), se satisfizer à equação de diferenças

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (10)$$

onde $\mu, \theta_1, \ldots, \theta_q$ são constantes reais e $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$.

- Segue-se que X_t é estacionário, de média μ e como o ε_t são não correlacionados, podemos obter facilmente a variância do processo,

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2). \qquad (11)$$

- Auto-covariância:

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}), & \tau = 1,\ldots,\text{q} \\ 0, & \tau > q \\ \gamma_{-\tau}, & \tau < 0. \end{cases} \tag{12}$$

- Auto-correlação:

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2}, & \text{se } \tau = 1, \ldots, q \\ 0, & \text{se } \tau > q \\ \rho_{-\tau}, & \text{se } \tau < 0. \end{cases} \tag{13}$$

  Observamos, então, que a f.a.c.v.(ou a f.a.c.) de um processo MA(q) anula-se para $|\tau| > q$.

- Em particular, para um processo MA(1),

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \tag{14}$$

obtemos

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_X^2 = \sigma^2(1+\theta^2),$$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta}{1+\theta^2}, & \text{se } \tau = \pm 1 \\ 0, & \text{se } |\tau| > 1. \end{cases} \tag{15}$$

- Definindo-se o operador de médias móveis de ordem q por

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

o processo (10) pode ser escrito

$$X_t = \theta(B)\varepsilon_t. \tag{16}$$

de onde, formalmente, segue

$$\varepsilon_t = (1-\theta B)^{-1} X_t = (1+\theta B+\theta^2 B^2+\ldots)X_t,$$

ou seja, temos

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \ldots + \varepsilon_t, \quad (17)$$

se $|\theta| < 1$, para que a série do lado direito de (17) convirja. Nesta equação, temos X_t escrito como um processo auto-regressivo de ordem infinita. Dizemos que $|\theta| < 1$ é uma *condição de invertibilidade* para o processo MA(1).

- De modo geral, o processo (10) poderá ser escrito na forma

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad (18)$$

se a seguinte condição de invertibilidade estiver satisfeita: *todas as raízes de* $\theta(B) = 0$ *devem estar fora do círculo unitário*.

A relação (28) pode ser escrita

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t, \tag{19}$$

onde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$, de modo que $\pi(B) = \theta(B)^{-1}$. Portanto, os coeficientes π_j podem ser obtidos da identidade $\theta(B)\pi(B) = 1$.

5. Processos Auto-regressivos e de Médias Móveis

- Um processo auto-regressivo e de médias móveis, de ordem (p,q), denotado por ARMA(p,q), é definido por

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} \phi_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}, \tag{20}$$

onde $\varepsilon_t \sim$ RB$(0, \sigma^2)$. Segue-se que a média do processo é μ. Usando os operadores auto-regresivo e de médias móveis, definidos anteriormente, podemos escrever (20) na forma

$$\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)\varepsilon_t, \qquad (21)$$

onde $\tilde{X}_t = X_t - \mu$. Suponha que, a partir de agora, $\mu = 0$.

- Um modelo freqüentemente usado é o ARMA(1,1), ou seja,

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \qquad (22)$$

É fácil ver, por substituições sucessivas, que podemos escrever

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t,$$

onde $\psi_j = \phi^{j-1}(\phi - \theta)$, $j \geq 1$. A condição de estacionariedade é a mesma que para um processo AR(1), ou seja, $|\phi| < 1$.

Do mesmo modo, a condição de invertibilidade $|\theta| < 1$ vale aqui e implica que podemos escrever o processo na forma (18), com pesos $\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta), j \geq 1$.

- Para um processo ARMA(p,q) genérico a condição de estacionariedade é a mesma que para processos AR(p), ou seja, as raízes de $\phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário, e a condição de invertibilidade é a mesma que para processos MA(q), ou seja, as raízes de $\theta(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

- Auto-covariância:

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \phi_2\gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p\gamma_{\tau-p}\,, \quad \tau > q. \tag{23}$$

A conclusão é que as auto-covariâncias (e, portanto, as auto-correlações, que satisfazem equação similar) de lags $1, 2, \ldots, q$ serão afetadas pelos parâmetros de médias móveis, mas para $\tau > q$, as mesmas comportam-se como nos modelos auto-regressivos.

- Para o caso do modelo (22), obtemos facilmente

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}$$

e, para $\tau > 1$,

$$\rho_\tau = \phi\rho_{\tau-1}.$$

6. **Construção de Modelos ARMA**

- uso das fac e facp para identificação

- Estimação:

(i) Estimadores de momentos

(ii) Estimadores de Mínimos Quadrados (EMQ)

(iii) Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV)

- Condicionais

- Exatos

- Diagnóstico:

  (i) análise de resíduos.

  (ii) Estatística de Box-Pierce-Ljung:

  $Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{T-i} r_i^2$

  Sob $H_0 : a_t$ é ruído branco,

  $Q(m)$ distribuição $\chi^2(m-p-q)$.

- $\text{AIC}(p,q) = \log \hat{\sigma}^2 + 2(p+q)/T$ (Akaike, 1974)

- $\text{BIC}(p,q) = \log \hat{\sigma}^2 + (p+q) \log T/T$ (Schwarz, 1978)

7. **Processos Não-Estacionários**

- Muitas séries financeiras são não estacionárias: exibem médias e/ou variâncias variando no tempo.

- Transformações log e raiz quadrada estabilizam variância

- Há, basicamente, duas formas de gerar processos não-estacionários e que sejam não-explosivos.

  (a) Incluir em (1) uma tendência determinística, como por exemplo

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \psi(B)\varepsilon_t, \qquad (24)$$

obtendo-se um processo "trend-stationary".

(b) Considerar um PLG com raíz unitária, da forma

$$(1 - B)X_t = \delta + \psi(B)\varepsilon_t, \qquad (25)$$

com $\psi(1) \neq 0$. Este modelo, obviamente, descreve variações de X_t e como $\psi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \neq 0$, o processo é não-estacionário.

- Não-estacionariedade na média : nível médio não constante pode ser modelado de várias maneiras: polinômios no tempo, modelos ARIMA.

- Tendência polinomial determinística

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j + \psi(B) a_t \quad (26)$$

e como $E(\varepsilon_t) = 0$,

(i) $E(X_t) = E(\mu_t) = \sum_{j=0}^{d} \beta_j t^j$

(ii) $d = 1 \Rightarrow X_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t, \quad a_t \sim$RB

(iii) Tomando-se uma diferença,

$$X_t - X_{t-1} = \beta_1 + a_t - a_{t-1} \quad \sim \quad \text{ARMA}(1,1)$$

com $\phi = \theta = 1$, portanto **modelo não-estacionário e não-invertível**.

(iv) Se $W_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t = \Delta X_t$,

$$W_t = \Delta X_t = \beta_1 + \Delta a_t \sim \text{MA}(1),$$

estacionário, não-invertível

(v) Em geral, se (26) vale com $\varepsilon_t \sim$ARMA(p,q),

$$\Delta^d X_t = (1-B)^d X_t = \theta_0 + n_t, \quad \theta_0 = d!\beta_d,$$

com $\phi(B)n_t = \Delta^d \theta(B) a_t$.

Ou seja, a parte de médias móveis de $\Delta^d X_t$ conterá o fator $\Delta^d = (1-B)^d$ e terá d *raizes unitárias*.

- **Processos Integrados**

(i) Uma maneira alternativa de gerar processos não-estacionários é considerar modelos ARMA cuja parte AR não satisfaz condições de estacionariedade. Por exemplo,

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t, \qquad \phi > 1. \qquad (27)$$

Se $X_0 = x_0$, a equação de diferença (27) tem solução

$$X_t = x_0\phi^t + \sum_{i=0}^{t} \phi^i a_{t-i}. \qquad (28)$$

(ii) $\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \frac{\phi^{2(t+1)}-1}{\phi^2-1}$, crescente com t.

(iii) Em geral, X_t terá uma tendência na média e variância e X_t diz-se **explosivo**.

(iv) $\phi < 1 \Rightarrow X_t$ estacionário

$\phi > 1 \Rightarrow X_t$ explosivo

$\phi = 1 \Rightarrow$?

Neste caso temos um **Passeio Casual**.

$$X_t = X_{t-1} + a_t$$

Incluindo-se uma constante,

$$X_t = \theta_0 + X_{t-1} + a_t,$$

um Passeio Casual com Drift.

(v) Se processo começa em $t = 0$,

$$X_t = x_0 + t\theta_0 + \sum_{i=0}^{t} a_{t-i}$$

(vi) $\mu_t = x_0 + t\theta_0$

$\gamma_0(t) = t\sigma^2$

$\gamma_k(t) = (t-k)\sigma^2$

$\rho_k(t) = \frac{t-k}{t}$

Logo, se t grande, $\rho_k(t) \approx 1$: seqüência suave mas **não-estacionária**

(vii) Passeio casual: exemplo de *processo integrado*

$$\Delta X_t = \theta_0 + a_t$$

(viii) Se $\Delta^d X_t$ é estacionário, dizemos que $X_t \sim I(d)$: **integrado de ordem** d

- **Modelos** ARIMA (p,d,q)

(i) Se $\Delta^d X_t$ ~ARMA(p,q) dizemos que X_t segue um modelo ARIMA(p,d,q):

$$\phi(B)\Delta^d X_t = \theta_0 + \theta(B)a_t. \qquad (29)$$

Ou, de modo equivalente,

$$\phi(B)W_t = \theta_0 + \theta(B)a_t, \quad \text{com} \quad W_t = \Delta^d X_t$$

(ii) $W_t = \Delta^d X_t \Longleftrightarrow X_t = S^d W_t$,

onde S é o operador **soma** ou **integral**:

$$S = (1 - B)^{-1} = \Delta^{-1}$$

Ou seja, X_t pode ser obtido somando-se ou integrando-se o processo estacionário W_t d vezes, donde o nome **processo integrado** para X_t.

(iii) Inclusão de θ_0: introduz tendência determinística

Modelo **sem** θ_0: tendências estocásticas.

- **Modelagem ARIMA**
  - determine d
  - modele $W_t = \Delta^d X_t$ como um modelo ARMA

  Exemplos

(1) "UK Spread" $\sim I(1)$

(2) "Dollar/Sterling Exchange Rate" $\sim$ Passeio Casual Sem Drift

(3) "FTA (Financial Times-Actuaries) All Share" (Stock Index)

$P_t \to \log(P_t) = X_t \to \Delta X_t \sim$AR(3)

(4) Ibovespa mensal : ruído branco.

(5) Petrobrás diário: AR(9)

(6) ICV-São Paulo: ARIMA (1,1,0)

- **Previsão Com Modelos ARIMA**

(i) Queremos prever X_{T+h}, tendo-se observações até o instante T, usando o modelo ARIMA. Seja

$$\varphi(B) = \phi(B)\Delta^d$$

$$= (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \ldots - \alpha_{p+d} B^{p+d})$$

(ii) $\hat{X}_T(h) =$ previsão de X_{T+h} de EQMM:

$$\hat{X}_T(h) = E(\alpha_1 X_{T+h-1} + \ldots + \alpha_{p+d} X_{T+h-p-d}$$

$$+\theta_0 + a_{T+h} - \theta_1 a_{T+h-} - \ldots - \theta_q a_{T+h-q} \mid X_T, X_{T-1}, \ldots)$$

(iii) $E(X_{T+j}|X_T, X_{T-1}, \ldots) = \begin{cases} X_{T+j}, & \text{se } j \leq 0 \\ \hat{X}_T(h), & \text{se } j > 0 \end{cases}$

$E(a_{T+j}|X_T, X_{T-1}, \ldots) = \begin{cases} a_{T+j}, & \text{se } j \leq 0 \\ 0, & \text{se } j > 0 \end{cases}$

(iv) Logo, para calcular previsões temos que:

(a) substituir esperanças passadas ($j \leq 0$) por valores conhecidos, X_{T+j} e a_{T+j};

(b) substituir esperanças futuras ($j > 0$) por previsões $\hat{X}_T(h)$ e 0.

(v) **Exemplo:** $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = \theta_0 + a_t$.

Temos

$X_{T+h} = \theta_0 + \phi_1 X_{T+h-1} + \phi_2 X_{T+h-2} + a_{T+h}$

$h = 1 \rightarrow \hat{X}_T(1) = \theta_0 + \phi_1 X_T + \phi_2 X_{T-1}$,

$h = 2 \rightarrow \hat{X}_T(2) = \theta_0 + \phi_1 \hat{X}_T(1) +$

$\phi_2 X_T$,

$h > 2 \to \hat{X}_T(h) = \theta_0 + \phi_1 \hat{X}_T(h-1) + \phi_2 \hat{X}_T(h-2)$.

(vi) **erro de previsão**

$$e_{T,h} = X_{T,h} - \hat{X}_T(h) =$$

$$a_{T+h} + \psi_1 a_{T+h-1} + \ldots + \psi_{h-1} a_{T+1}$$

Os pesos ψ_j vêm de $\psi(B) = \varphi^{-1}(B)\theta(B)$.

(vii) **Variância do erro de previsão**

$$\text{Var}(e_{T,h}) = \sigma^2(1 + \psi_1^2 + \ldots + \psi_{h-1}^2). \tag{30}$$

(viii) Como $e_{T,1} = X_{T+1} - f_{T,1} = a_{T+1}$, *os erros de previsões a um passo são não-correlacionados*

(ix) A variância em (30) tem que ser estimada, estimando-se a variância residual e os pesos ψ_j.

(x) Esta variância estimada pode ser usada para construir intervalos de confiança para X_{T+h}, supondo-se que os erros sejam normais. Obtemos

$$\left[\hat{X}_T(h) - u_\gamma \hat{\sigma}[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2]^{1/2}, \hat{X}_T(h) + u_\gamma \hat{\sigma}[1 + \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\psi}_j^2]^{1/2}\right]. \tag{31}$$