Processos de Lévy: Preliminares

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/∼ pam

Sumário

1. Introdução

- Como preços de ativos financeiros evolvem no tempo, podemos modelá-los por processos estocásticos. Uma série de preços efetivamente observados pode ser considerada como parte de uma realização (trajetória) de um processo estocástico.
- Podemos ter processos em tempo discreto (por exemplo, para modelar preços diários das ações da Petrobrás) ou processos em tempo contínuo. O preço pode ser discreto ou contínuo.
- Iremos supor que o preço de um ativo seja um **processo estocástico em tempo contínuo**.

- **Opções**

◇ opção de um ativo é um contrato financeiro que dá ao titular (H: holder) o direito de negociar certo número de ações em certa data por um preço especificado.

◇ dois tipos de opções:

· de compra ("call option"): dá o direito a H de comprar o ativo;

· de venda ("put option"'): dá o direito a H de vender o ativo.

◇ preço especificado: preço de exercício K ("strike"')

◇ data do contrato: data de exercício ("expiration, maturity")

◇: opções americanas: podem ser exercidas em qualquer tempo até a data de exercício;

◇ opções européias: podem ser exercidas somente na data de exercício.

1. Introdução

- O valor de uma opção depende do ativo, especificamente:
  - ◇ K: preço de exercício
  - ◇ P: preço do ativo.
- As opções de compra podem ser:
  - In-the-money (ITM) : $P > K$ (lucro para H)
  - At-the-money (ATM): $P = K$
  - Out-of-the-money (OTM): $P < K$ (perda para H).
- As opções de venda podem ser:
  - In-the-money (ITM) : $P < K$ (lucro para H)
  - At-the-money (ATM): $P = K$
  - Out-of-the-money (OTM): $P > K$ (perda para H).
- Somente opções ITM são exercidas na prática.

2.1. **Movimento Browniano (Processo de Wiener)**

- Num modelo discreto supõe-se que os choques formam um ruído branco (RB), não-previsível.
- O equivalente do RB em tempo contínuo é o Movimento Browniano Padrão (MBP) ou Processo de Wiener.

- Definamos $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t, \quad \Delta t$ pequeno.
Dizemos que W_t é um MBP se satisfaz:
• (a) $\Delta W_t = \varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad \varepsilon \sim N(0,1)$;
• (b) ΔW_t é independente de W_j, $j \leq t$.

A condição (b) á propriedade de Markov: condicional ao valor presente W_t, qualquer informação passada, $W_j, j \leq t$, é irelevante para o valor futuro W_{t+h}, $h > 0$.

- Segue-se que para dois intervalos disjuntos quaisquer, Δ_1 e Δ_2, os incrementos $W_{t_1+\Delta_1} - W_{t_1}$ e $W_{t_2+\Delta_2} - W_{t_2}$ são *independentes*.
- De (a), $\Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$.
- Suponha que W_t comece em $t = 0$ e $W_0 = w_0$ (usualmente $w_0 = 0$). Então, $W_t - w_0$ pode ser tratado como uma soma de vários incrementos pequenos. Se $T = t/\Delta t$, então

$$W_t - w_0 = W_{T\Delta t} - w_0 = \sum_{i=1}^{T} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{T} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t},$$

onde $\Delta W_i = W_{i\Delta t} - W_{(i-1)\Delta t}$.
- Como os ε_i são independentes,

$$E(W_t - w_0) = 0, \quad \mathrm{Var}(W_t - w_0) = \sum_{i=1}^{T} \Delta t = T\Delta t = t,$$

2. Alguns processos em tempo contínuo

- Ou seja, $W_t - w_0 \ \sim \ N(0,t)$.
  Se $w_0 = 0$, $W_t \sim N(0,t)$.
- Logo, a variância do MBP cresce linearmente com o tamanho do intervalo de tempo.
- Simulações do MBP podem ser obtidas do
  Teorema de Donsker: Suponha que $Z_1, \ldots, Z_n$ sejam i.i.d. $N(0,1)$. Para cada $t \in [0,1]$, seja $[nt]$ a parte inteira de nt. Defina

$$W_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} Z_i.$$

  Então, $W_{n,t} \stackrel{\mathcal{D}}{\to} W_t, \ \ 0 \leq t \leq 1, \ \ n \to \infty.$
- Trajetórias de W_t não são deriváveis em qualquer ponto a.e. Logo, não podemos usar integrais usuais para tratar integrais de funcionais do MBP.

2.2. **Movimento Browniano Generalizado** (MBG). Dado por

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{1}$$

onde $W_t \sim MBP$, μ é a taxa de variação da média (drift) e σ^2 é a taxa de variação da variância (volatilidade).

- Versão discreta: $X_t - X_0 = \mu t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}$, para um incremento de 0 a t. Logo,

$$E(X_t - X_0) = \mu t, \quad \mathrm{Var}(X_t - X_0) = \sigma^2 t.$$

2.3. Processo de Ito

Em (1), μ e σ são invariantes no tempo. Se forem funções do tempo, teremos o processo de Ito:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \tag{2}$$

Podemos escrever (2) como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s, \tag{3}$$

onde X_0 é o valor inicial no tempo 0.

- Último termo de (3): **Integral Estocástica**
- (2): Equação de difusão estocástica: $\mu(X_t, t)$: drift; $\sigma(X_t, t)$: difusão.

- Movimento Browniano: talvez o processo mais utilizado;
  - Bachelier(1900): $P_t = P_0 + \sigma W_t$.
- Black-Scholes model: $\log P_t$ segue um MB:

$$P_t = P_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\},$$

ou, em forma local,

$$\frac{dP_t}{P_t} = \sigma dW_t + (\mu + \sigma^2/2)dt.$$

P_t: **MB geométrico**

- MB tem trajetórias contínuas q.t.p.
- Preços de ativos (ações) apresentam saltos.

- (2): Non-linear diffusions
- Modelos de volatilidade estocástica:

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{P_t} &= \sigma_t dW_t^{(1)} + \mu dt, \\ \sigma_t &= f(Y_t), \quad dY_t = \alpha_t dt + \gamma_t dW_t^{(2)}. \end{aligned} \tag{4}$$

- Continuidade das trajetórias: papel crucial em difusões. Resultados são robustos se removermos a hipótese de continuidade? A resposta é: não.

- Retornos financeiros: caudas pesadas. Modelo gaussiano sub-estima riscos.
- Argumentos contra uso de difusões!
- Erro frequente: (2) e (4) **não** são processos gaussianos, embora o erro subjacente seja gaussiano (MB).
- Uma escolha apropriada do coeficiente de difusão não linear pode gerar difusões com caudas pesadas.
- Mas... como o comportamento local de processos de difusão depende somente do coeficiente de difusão, estas caudas pesadas são obtidas por meio de coeficiente altamente variáveis (não estacionários) em modelos de volatilidade locais, ou "volatilidades da volatilidade" não realistas.

3. Processos com saltos

- Em contraste, modelos Markovianos simples com saltos - Processos de Lévy - conduzem a retornos com comportamento de caudas realístico.
- Argumento forte para usar modelos descontínuos não é estatístico! é a presença de saltos nos preços.
- Enquanto difusões podem gerar caudas pesadas, eles **não** podem gerar saltos repentinos nos preços.
- Num modelo de difusão a noção de um movimento do mercado repentino, não previsível, é difícil de capturar.

- σ-álgebras e medidas; funções mensuráveis; continuidade absoluta e densidades;
- Variáveis aleatórias; funções características; função geradora de cumulantes; convergência de v.a.'s.
- Processos estocásticos como funções aleatórias:

$$X : [0, T] \times \Omega \mapsto E.$$

- Necessário escolher um espaço de funções; no caso de processos com trajetórias contínuas, consideramos $C([0, T], \mathbb{R}^d)$, com a topologia definida por

$$||f||_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|.$$

- A maioria dos processos de nosso interesse terá trajetórias descontínuas. Necessitamos de um espaço que admita tal tipo de trajetórias.
- Função cadlag: *Uma função* $f : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ *diz-se* cadlag *se for contínua à direita com limites à esquerda:* para cada $t \in [0, T]$, os limites

$$f(t-) = \lim_{s \to t, s < t} f(s), \quad f(t+) = \lim_{s \to t, s > t} f(s),$$

existem e $f(t) = f(t+)$.
- $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$: salto de f em t.
- Uma função cadlag pode ter no máximo um número enumerável de descontinuidades e , para todo $\varepsilon > 0$, o número de saltos em $[0, T]$ maiores do que ε deve ser finito. Ou seja, f tem um número finito de saltos grandes(maiores que ε) e um número possivelmente infinito, mas contável, de saltos pequenos.

- Exemplo: dada $g : [0, T] \to \mathbb{R}$, contínua, f_i, $i = 0, \dots, n-1$ constantes e $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, então

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} f_i I_{[t_i, t_{i+1}[}(t).$$

é cadlag, g é a componente contínua, saltos em t_i e $\Delta f(t_i) = f_i - f_{i-1}$.
- cadlag ou caglad? há diferença! Se uma função cadlag tem um salto em t, o valor $f(t)$ não é previsível seguindo a trajetória até t. Em finanças, saltos representam eventos não previsíveis, logo funções cadlag são naturais.
- É possível definir uma topologia e uma noção de convergência no espaço de funções cadlag. Com esta toplogia e a σ-álgebra de Borel correspondente, o espaço das funções cadlag é chamado de *espaço de Skorokhod* e denotado por $D([0, T], \mathbb{R}^d)$.

4. Ferramentas básicas

- Filtração (fluxo de informação) sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: família crescente de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$.
- Um p.e. $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ diz-se *não-antecipativo* com respeito a $\{\mathcal{F}_t\}$, ou $\mathcal{F}_t$-adaptado, se, para todo $0 \leq t \leq T$, o valor de X_t é "revelado" no instante t: a v.a. X_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável.
- História de um processo: é o fluxo de informação $\{\mathcal{F}_t^X\}$, onde $\mathcal{F}_t^X$ é a σ-álgebra gerada pelos valores passados do processo, completada pelos conjuntos de medida nula.

- O Processo de Poisson é um exemplo fundamental de um p.e. com trajetórias descontínuas e pode ser usado para construir processos com saltos mais complexos.
- Definição: Seja $\{\tau_i, i \geq 1\}$ uma sequência de v.a. exponenciais independentes, com parâmetro λ e $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. O processo $\{N_t, t \geq 0\}$ definido por

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{t \geq T_n\}} \tag{5}$$

é chamado Processo de Poisson (PP) com intensidade λ.
- O PP é um processo de contagem: conta o número de tempos aleatórios T_n que ocorrem entre 0 e T, onde $\{T_n - T_{n-1}, n \geq 1\}$ é uma sequência de v.a. iid exponenciais.

- **Proposição** Para um PP $\{N_t, t \geq 0\}$ temos:
  1. Para todo $t > 0$, N_t é a.s. finito;
  2. As trajetórias são descontínuas, com saltos de tamanho 1;
  3. As trajetórias são cadlag;
  4. Para todo $t > 0$, $N_{t-} = N_t$ com probabilidade 1;
  5. N_t é contínuo em probabilidade: $\forall t > 0$, $N_s \to N_t$, em probabilidade, quando $s \to t$;
  6. $\forall t > 0$, $N_t \sim$Poisson(λt);
  7. A função característica de N_t é

$$E(e^{iuN_t}) = \exp\{\lambda t(e^{iu} - 1)\}, \ \forall u \in \mathbb{R};$$

8. N_t tem incrementos independentes;
9. Os incrementos de N_t são homogêneos: $\forall t > 0,\ N_t - N_s \overset{d}{=} N_{t-s}$;
10. N_t tem a propriedade de Markov: $\forall t > s$,

$$E\{f(N_t)|N_u, u \leq s\} = E\{f(N_t)|N_s\}.$$

- **PP compensado**. Considere $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$. Então, $\tilde{N}_t$ segue versão centrada da distribuição de Poisson com f.c. $\exp[\lambda t(e^{iz} - 1 - iz)]$, tem incrementos independentes e

$$E(\tilde{N}_t|\tilde{N}_s) = \tilde{N}_s, \; t > s.$$

  Esta é a propriedade de martingale.Dizemos que $\{\tilde{N}_t\}$ é um *PP compensado* e $\{\lambda t, t \geq 0\}$ é o *compensador de* N_t. Esta é a quantidade que tem de ser subtraída de N_t a fim de se obter um martingale.
- $\tilde{N}_t$ não tem valores inteiros e não é um processo de contagem.
- $E(\tilde{N}_t/\lambda) = 0, \quad \mathrm{Var}(\tilde{N}_t/\lambda) = t.$
- $\{\tilde{N}_t/\lambda, 0 \leq t \leq T\} \stackrel{\lambda \to \infty}{\Rightarrow} \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$: FCLT em $D([0, T])$

6. Processos pontuais e medidas aleatórias

- O PP conta o número de tempos aleatórios T_n ocorrendo em $[0, t]$, onde T_n são somas de v.a. iid exponenciais.
- Mais geralmente, dada uma sequência crescente de tempos aleatórios T_n, com $P(T_n \to \infty) = 1$, podemos definir o processo de contagem

$$X_t = \sum_{n \geq 1} 1_{\{t \geq T_n\}} = \#\{n \geq 1, T_n \leq t\}.$$

  X_t= número de tempos T_n ocorrendo em $[0, t]$.
- X_t= cadlag, com trajetórias descontínuas, com saltos de tamanho 1.
- Fato: Se X_t for um processo de contagem com incrementos estacionários independentes, então X_t é um processo de Poisson.

- O PP $N = \{N_t, t \geq 0\}$ úm processo de contagem: se $T_1, T_2, \ldots$ é uma sequência de tempos de saltos de N então N_t dá o número de saltos entre 0 e t.
- T_i formam uma configuração aleatória em $\mathbb{R}^+$ e o PP conta o número de tais pontos em $[0, t]$.
- Este procedimento de contagem define uma *medida* M sobre $[0, \infty)$, tal que para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^+$,

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\}.$$

  Então, $M(\omega, \cdot)$ é positiva, com valores inteiros e $M(A) < \infty$ com probabilidade 1, para todo A limitado. Como M depende de ω, é uma *medida aleatória* (m.a.).

- A intensidade λ do PP determina o *valor médio* da m.a. M: $E[M(A)] = \lambda|A|$, onde $|A|$ é a medida de Lébesgue de A.
- O PP pode ser expresso como

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0,t]) = \int_{[0,t]} M(\omega, ds).$$

- As propriedades do PP podem ser transladadas em propriedades de M. Para intervalos disjuntos $[t_1, t_1'], \cdots, [t_n, t_n']$:

  (i) $M([t_k, t_k'])$ dá o número de saltos do PP em $[t_k, t_k']$; é uma v.a de Poisson com intensidade $\lambda(t_k' - t_k)$.

(ii) para dois intervalos disjuntos $(j \neq k)$, $M(t_j, t_j'])$ e $M([t_k, t_k'])$ são v.a. independentes;

(iii) mais geralmente, para todo A mensurável, $M(A)$ segue uma distribuição de Poisson, com intensidade $\lambda|A|$, $|A| = \int_A dx$ é a medida de Lébesgue de A.

Da mesma maneira, podemos associar uma m.a. ao PP compensado, $\tilde{N}_t$:

$$\tilde{M}(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda dt = M(\omega, A) - \lambda|A|.$$

$\tilde{M}$ não terá valores inteiros, nem será positiva: é uma medida sinalizada.

- Podemos estender o que foi feito acima para o caso de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, substituindo a medida de Lébesgue por qualquer medida de Radon(uma medida de Radon sobre $(E, \mathcal{B})$ é uma medida μ tal que para todo conjunto $B \in \mathcal{B}$ compacto e mensurável, $\mu(B) < \infty$).
- Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um e.p., $E \subset \mathbb{R}^d$ e μ uma medida de Radon positiva sobre $(E, \mathcal{B})$. Uma medida aleatória de Poisson sobre E, com intensidade μ, é uma medida aleatória com valores inteiros tal que:

  (i) para qualquer $\omega \in \Omega$, $M(\omega, \cdot)$ é uma medida de Radon sobre E com valores inteiros: $\forall A \subset E$, mensurável, $M(A) < \infty$ é uma v.a. com valores inteiros;

(ii) para todo $A \subset E$, $M(A)$ é uma v.a. de Poisson com intensidade $\mu(A)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(M(A) = k) = \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^k}{k!};$$

(iii) Se $A_1, \cdots, A_n$ são disjuntos, $M(A_1), \cdots, M(A_n)$ são independentes.

- **Proposição** (Construção de uma m.a. de Poisson). Para toda medida de Radon μ sobe $E \subset \mathbb{R}^d$, existe uma medida aleatória de Poisson M sobre E com intensidade μ.
- Podemos também construir uma m.a. compensada de Poisson $\tilde{M}$ por meio de

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A),$$

tal que $E[\tilde{M}(A)] = 0$ e $\text{Var}[\tilde{M}(A)] = \mu(A)$.