MAE-219: Introdução à Probabilidade e Estatística I

Prof. Pedro Morettin e Prof. Nelson I. Tanaka

Gabarito - Lista de Exercícios 6
1o. Semestre de 2016

1 Questão 1

X: Número de caras nos dois primeiros resultados. $\Rightarrow X \in \{0, 1, 2\}$
Y: Número de caras no último resultado $\Rightarrow Y \in \{0, 1\}$
S: Número de caras total nos três lançamentos$\Rightarrow X \in \{0, 1, 2, 3\}$.

	X			
Y	0	1	2	P(Y=y)
0	p_{00}	p_{10}	p_{20}	1/2
1	p_{01}	p_{11}	p_{21}	1/2
P(X=x)	$p_{0.}$	$p_{1.}$	$p_{2.}$	1

Tabela 1: Distribuição conjunta de X e Y

1.1 item a.

Probabilidades Marginais de X:

$$p0. = \mathbb{P}(\text{coroa nos dois primeiros resultados}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p1. = \mathbb{P}(\text{1 cara e 1 coroa}) = \mathbb{P}\left((1^o\text{cara e } 2^o\text{coroa}) \text{ ou } (1^o\text{coroa e } 2^o\text{cara})\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p2. = \mathbb{P}(\text{cara nos dois primeiros resultados}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Probabilidades Conjuntas:

Considere C para cara e $\bar{C}$ para coroa e (R1,R2,R3) Resultados para os três lançamentos, em ordem.

Temos então:

$$
\begin{aligned}
p_{00} &= \mathbb{P}(\bar{C},\bar{C},\bar{C}) = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8, \text{ pois são lançamentos independentes.}\\
p_{10} &= \mathbb{P}(1 \text{ cara nos dois primeiros e coroa no último}) =\\
&= \mathbb{P}\left((C,\bar{C},\bar{C}) \text{ ou } (\bar{C},C,\bar{C})\right) = (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) = 1/4\\
p_{20} &= \mathbb{P}(C,C,\bar{C}) = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8\\
p_{01} &= \mathbb{P}(\bar{C},\bar{C},C) = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8\\
p_{11} &= \mathbb{P}\left((\bar{C},C,C) \text{ ou } (C,\bar{C},C)\right) = (1/2).(1/2).(1/2) + (1/2).(1/2).(1/2) = 1/4\\
p_{21} &= \mathbb{P}(C,C,C) = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8
\end{aligned}
$$

Assim, a Tabela 1 fica:

	X			
Y	0	1	2	P(Y=y)
0	1/8	1/4	1/8	1/2
1	1/8	1/4	1/8	1/2
P(X=x)	1/4	1/2	1/4	1

Tabela 2: Distribuição conjunta de X e Y

X e Y são independentes se e só se $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x).\mathbb{P}(Y = y)$, para todo par (x,y) possível, o que de fato ocorre em todas as caselas da Tabela 2. Sabemos ainda que, se X e Y são independetes, então COV(X,Y)=0. Calculando, temos:

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i \mathbb{P}(x_i, y_i) = 0.0.\frac{1}{8} + 0.1.\frac{1}{4} + 0.2.\frac{1}{8} + 1.0.\frac{1}{8} + 1.1.\frac{1}{4} + 1.2.\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}(x_i) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i \mathbb{P}(y_i) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = 1/2$$

$$COV(X,Y) = \frac{1}{2} - 1.\frac{1}{2} = 0$$

1.2 item b.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}(x_i) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i \mathbb{P}(y_i) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = 1/2$$

S	0	1	2	3
P(S=s)	p_0	p_1	p_2	p_2

Tabela 3: Distribuição de probabilidade de S

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \mathbb{P}(\bar{C},\bar{C},\bar{C}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
p_1 &= \mathbb{P}\left((\bar{C},\bar{C},C) \text{ ou } (\bar{C},C,\bar{C}) \text{ ou } (C,\bar{C},\bar{C})\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
p_2 &= \mathbb{P}\left((C,C,\bar{C}) \text{ ou } (C,\bar{C},C) \text{ ou } (\bar{C},C,C)\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
p_3 &= \mathbb{P}(C,C,C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\
E(S) &= 0.\frac{1}{8} + 1.\frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Variâncias:$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = 0^2.\frac{1}{4} + 1^2.\frac{1}{2} + 2^2.\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$E(Y^2) = 0^2.\frac{1}{2} + 1^2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(S^2) = 0^2.\frac{1}{8} + 1^2.\frac{3}{8} + 2^2.\frac{3}{8} + 3^2.\frac{1}{8} = 3$$

Assim:

$$Var(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$Var(S) = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

1.3 item c.

Como são 3 lançamentos, então temos que S=X+Y.
Assim, E(S)=E(X)+E(Y) e isto sempre se verifica.
Como X e Y são independentes, entao Cov(X,Y)=0. Assim, Var(S)=Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y) e isto também ocorre sempre, desde que exista a independência entre X e Y.

2 Questão 2

Temos 1 papel com o número 1, dois papéis com número 3 e 1 papel com número 5.

2.1 item a.

	X1			
X2	1	3	5	P(X2=b)
1	1/16	1/8	1/16	1/4
3	1/8	1/4	1/8	1/2
5	1/16	1/8	1/16	1/4
P(X1=a)	1/4	1/2	1/4	1

Tabela 4: Distribuição conjunta de X1 e X2

2.2 item b.

Como o papel é recolocado, X1 e X2 são independentes e possuem a mesma distribuição. Assim, $\mathbb{P}(X1 = a, X2 = b) = \mathbb{P}(X1 = a).\mathbb{P}(X2 = b)$ para todos os possíveis pares (a,b) da Tabela 4. Além disso, como há reposição:

$$\mathbb{P}(X1 = 1) = \mathbb{P}(X2 = 1) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(X1 = 3) = \mathbb{P}(X2 = 3) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(X1 = 5) = \mathbb{P}(X2 = 5) = 1/4$$

2.3 item c.

$$E(X1) = E(X2) = 1.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{2} + 5.\frac{1}{4} = 3$$
$$E(X1^2) = E(X2^2) = 1^2.\frac{1}{4} + 3^2.\frac{1}{2} + 5^2.\frac{1}{4} = 11$$
$$Var(X1) = Var(X2) = 11 - 3^2 = 2$$

Cálculo para M:

$$M = \frac{X1 + X2}{2} : \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{5+5}{2},\right)$$

M	P(M=m)
1	$\mathbb{P}(M=1)=\mathbb{P}(X1=1,X2=1)=\mathbb{P}(X1=1).\mathbb{P}(X2=1)=1/16$
2	$\mathbb{P}(M=2)=\mathbb{P}\left[(1,3)ou(3,1)\right]=1/8+1/8=1/4$
3	$\mathbb{P}(M=3)=\mathbb{P}\left[(1,5)ou(3,3)ou(5,1)\right]=1/16+1/4+1/16=3/8$
4	$\mathbb{P}(M=4)=\mathbb{P}\left[(5,3)ou(3,5)\right]=1/8+1/8=1/4$
5	$\mathbb{P}(M=5)=\mathbb{P}\left[(5,5)\right]=1/16$

Tabela 5: Distribuição de M

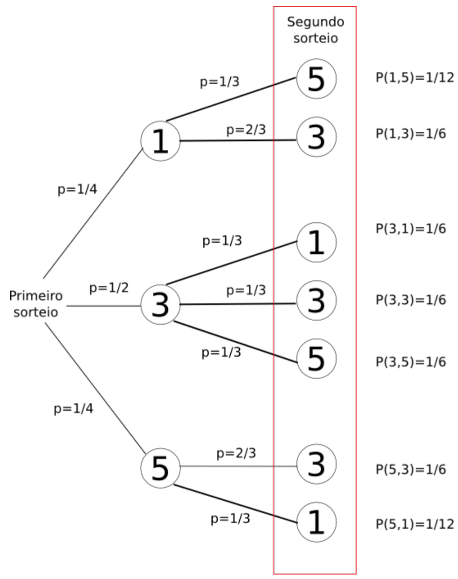
$$
\begin{aligned}
&Var(M)=E(M^2)+E(M)^2\\
&E(M)=1.\frac{1}{16}+2.\frac{1}{4}+3.\frac{3}{8}+4.\frac{1}{4}+5.\frac{1}{16}=3\\
&E(M^2)=1^2.\frac{1}{16}+2^2.\frac{1}{4}+3^2.\frac{3}{8}+4^2.\frac{1}{4}+5^2.\frac{1}{16}=10\\
&Var(X1)=10-3^2=1
\end{aligned}
$$

2.4 item d.

Os cálculos das distribuições continuariam inalterados pois a proporção de bilhetes continuaria a mesma em ambos os sorteios. As esperanças e variâncias seriam as mesmas.

3 Questão 3

3.1 itens a e b.



	X1			
X2	1	3	5	P(X2=b)
1	0	p_{13}	p_{15}	1/4
3	p_{31}	p_{33}	p_{35}	1/2
5	p_{51}	p_{53}	0	1/4
P(X1=a)	1/4	1/2	1/4	1

Tabela 6: Distribuição conjunta de X1 e X2

$$p_{13} = \mathbb{P}(X2 = 3|X1 = 1) = \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$
$$p_{15} = \mathbb{P}(X2 = 5|X1 = 1) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$
$$p_{31} = \mathbb{P}(X2 = 1|X1 = 3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$p_{33} = \mathbb{P}(X2 = 3|X1 = 3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$p_{35} = \mathbb{P}(X2 = 5|X1 = 3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$p_{51} = \mathbb{P}(X2 = 1|X1 = 5) = \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$
$$p_{53} = \mathbb{P}(X2 = 3|X1 = 5) = \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Observe que as probabilidades marginais de X1 não devem ser diferentes daquelas encontradas na questão 2, já que o mecanismo probabilístico até a primeira retirada é o mesmo. Já para X2, as probabilidades marginais são calculadas a seguir:

$$\mathbb{P}(X2 = 1) = \mathbb{P}(X2 = 1, X1 = 3) + \mathbb{P}(X2 = 1, X1 = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(X2 = 3) = \mathbb{P}(X2 = 3, X1 = 1) + \mathbb{P}(X2 = 3, X1 = 3) + \mathbb{P}(X2 = 3, X1 = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X2 = 5) = \mathbb{P}(X2 = 5, X1 = 1) + \mathbb{P}(X2 = 5, X1 = 3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

Vemos que agora X1 e X2 não são independentes pois, por exemplo:
P(X1=1 e X2=1)=0≠P(X1=1).P(X2=1)=(1/4).(1/4)=1/16

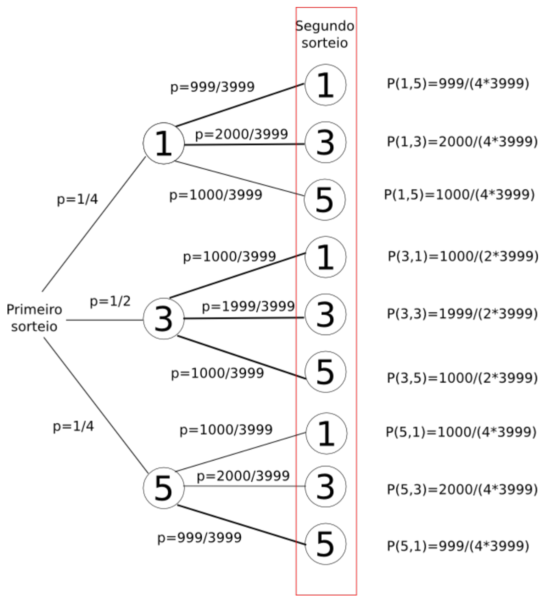
3.2 item c.

M	P(M=m)
1	0
2	$1/6 + 1/6 = 1/3$
3	$1/12 + 1/6 + 1/12 = 1/3$
4	$1/6 + 1/6 = 1/3$
5	0

Tabela 7: Distribuição de M

$$E(X1) = 1.(1/4) + 3(1/2) + 5.(1/4) = 3$$
$$E(X2) = 1.(1/4) + 3(1/2) + 5.(1/4) = 3$$
$$E(M) = E(\frac{X1 + X2}{2}) = 3$$
$$E(X1^2) = 1.(1/4) + 3^2(1/2) + 5^2.(1/4) = 11$$
$$E(X2^2) = 1.(1/4) + 3^2(1/2) + 5^2.(1/4) = 11$$
$$E(M^2) = 4.(1/3) + 3^2(1/3) + 4^2.(1/3) = 29/3$$
$$Var(X1) = 11 - 9 = 2$$
$$Var(X1) = 11 - 9 = 2$$
$$Var(X1) = 29/3 - 3^2 = 2/3$$

3.3 item d.



	X1			
X2	1	3	5	P(X2=b)
1	333/5332	500/3999	250/3999	1/4
3	500/3999	1999/7998	500/3999	1/2
5	250/3999	500/3999	333/5332	1/4
P(X1=a)	1/4	1/2	1/4	1

Tabela 8: Distribuição conjunta de X1 e X2

X1 e X2 não são independentes por, por exemplo, P(X1=1,X2=1)=333/5332 $\neq$ P(X1=1).P(X2=1)=(1/4).(1/4)=1/16.

$$E(X1) = E(X2) = 1.(1/4) + 3.(1/2) + 5.(1/4) = 3$$
$$E(X1^2) = E(X2^2) = 1^2.(1/4) + 3^2.(1/2) + 5^2.(1/4) = 11$$
$$Var(X1) = Var(X2) = 11 - 3^2 = 2$$

(X1,X2)	M
(1,1)	1
(1,3)	2
(1,5)	3
(3,1)	2
(3,3)	3
(3,5)	4
(5,1)	3
(5,3)	4
(5,5)	5

Tabela 9: Possíveis valores para M e pares de X1 e X2 que o resultam

A partir deste mapeamento, podemos calcular a distribuição de probabilidade de M a partir das probabilidades dos pares de X1 e X2:

M	P(M=m)
1	333/5332
2	(500/3999).2=1000/3999
3	(250/3999).2+(1999/7998)=2999/7998
4	(500/3999).2=1000/3999
5	333/5332

Tabela 10: Distribuição de probabilidade de M

Assim, E(M)=333/5332+2.(1000/3999)+3.(2999/7998)+4.(1000/3999)+5.(333/5332)=3
Outra maneira é: $E(M) = E(\frac{X1+X2}{2}) = (3+3)/2 = 3$.

$$E(M^2) = \frac{333}{5332} + 2^2.(\frac{1000}{3999}) + 3^2.(\frac{2999}{7998}) + 4^2.(\frac{1000}{3999}) + 5^2.(\frac{333}{5332}) = \frac{39989}{3999}$$
$$Var(M) = \frac{39989}{3999} - 3^2 = \frac{3998}{3999}$$

4 Questão 4

4.1 item a.

Calculemos primeiro a distribuição de X e Y:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = 1/4$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/4$$

Analogamente, $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/4, \mathbb{P}(Y = 0) = 1/2, \mathbb{P}(Y = 1) = 1/4$
E(X)=E(Y)=-1.(1/4)+0.(1/2)+1.(1/4)=0
E(XY)=(-1).(-1).0+(-1).0.(1/4)+(-1).(-1).0+0.(-1).(1/4)+0.0.0+0.1.(1/4)+1.(-1).0+0.1.(1/4)+1.1.0=0
Assim, Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0

4.2 item b.

Se X e Y fossem independentes então P(X=x,Y=y)=P(X=x).P(Y=y) para qualquer par (x,y) possível, o que não acontece, por exemplo para (x,y)=(0,0) pois P(X=0,Y=0)=0 mas P(X=0).P(Y=0)=1/4.

5 Questão 5

X: Maior dos números observados
Y: Menor dos números observados
Z=X+Y

5.1 item a.

	X				
Y	1	2	3	4	P(Y=y)
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	$p_{1.}$
2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	$p_{2.}$
3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	$p_{3.}$
4	p_{41}	p_{42}	p_{34}	p_{44}	$p_{4.}$
P(X=x)	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$p_{.3}$	$p_{.4}$	1

Tabela 11: Distribuição conjunta de X e Y

Iniciemos nomeando os dados por A e B e seu par de resultados (a,b). Assim, quando nos referirmos ao resultado (1,3), por exemplo, estamos dizendo que o dado A teve como resultado 1 e o dado B, 3.

$$
\begin{aligned}
p_{.1} &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(1,1) = (1/4).(1/4) = 1/16 \\
p_{.2} &= \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}\left[(\text{A=2 e B=1 ou 2) ou (A= 1 ou 2 e B=2)}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[A=2, B\in\{1,2\}\right] + \mathbb{P}\left[A\in\{1,2\}, B=2\right] - \mathbb{P}\left[A=2, B=2\right] \\
&= (1/4).(1/2) + (1/2).(1/4) - (1/4).(1/4) = \\
&= 3/16 \\
p_{.3} &= \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}\left[(\text{A=3 e B}\neq\text{4) ou (A}\neq\text{4 e B=3)}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[A=3, B\in\{1,2,3\}\right] + \mathbb{P}\left[A\in\{1,2,3\}, B=4\right] - \mathbb{P}\left[A=3, B=3\right] \\
&= (1/4).(1/3) + (1/4).(3/4) - (1/4).(1/4) = \\
&= 5/16 \\
p_{.4} &= \mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}\left[(\text{A=4 ou B=4})\right] \\
&= \mathbb{P}\left[A=4\right] + \mathbb{P}\left[B=4\right] - \mathbb{P}\left[A=4, B=4\right] \\
&= (1/4) + (1/4) - (1/4).(1/4) \\
&= 7/16 \\
p_{1.} &= \mathbb{P}(Y=1 = \mathbb{P}(\text{A=1 ou B=1}) = \mathbb{P}\left[A=1\right] + \mathbb{P}\left[B=1\right] - \mathbb{P}\left[A=1, B=1\right] \\
&= (1/4) + (1/4) - (1/4).(1/4) = \\
&= 7/16 \\
p_{2.} &= \mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}\left[(\text{A=2 e B}\neq\text{1) ou (A}\neq\text{1 e B=2)}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[A=2, B\in\{2,3,4\}\right] + \mathbb{P}\left[A\in\{2,3,4\}, B=2\right] - \mathbb{P}\left[A=2, B=2\right] \\
&= (1/4).(3/4) + (3/4).(1/4) - (1/4).(1/4) = \\
&= 5/16 \\
p_{3.} &= \mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}\left[(\text{A=3 e B=3 ou 4) ou (A= 3 ou 4 e B=3)}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[A=3, B\in\{3,4\}\right] + \mathbb{P}\left[A\in\{3,4\}, B=3\right] - \mathbb{P}\left[A=3, B=3\right] \\
&= (1/4).(1/2) + (1/2).(1/4) - (1/4).(1/4) = \\
&= 3/16 \\
p_{4.} &= \mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(4,4) = (1/4).(1/4) = 1/16
\end{aligned}
$$

Para a distribuição conjunta, é importante notar que, como possuímos apenas 2 dados, quando o resultado de um for o valor máximo, o outro será(salvas as situações de empate, em que o máximo é igual ao mínimo), obrigatoriamente, o mínimo. Assim, as probabilidades conjuntas são resultantes da probabilidade de cada par dos resultados dos dados A e B. Outra observação óbvia é o fato de o máximo não poder ser menor que o mínimo, isto é: P(X<Y)=0.

Assim, a Tabela 11 fica:

	X				
Y	1	2	3	4	P(Y=y)
1	1/16	1/8	1/8	1/8	7/16
2	0	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	0	1/16	1/8	3/16
4	0	0	0	1/16	1/16
P(X=x)	1/16	3/16	5/16	7/16	1

Tabela 12: Distribuição conjunta de X e Y

Pois:

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(A=1,B=1)=1/16$$
$$\mathbb{P}(X=2,Y=1)=\mathbb{P}((A=1,B=2)ou(A=2,B=1))=1/8$$
$$\mathbb{P}(X=3,Y=1)=\mathbb{P}((A=1,B=3)ou(A=3,B=1))=1/8$$
...
$$\mathbb{P}(X=4,Y=3)=0$$
$$\mathbb{P}(X=4,Y=4)=\mathbb{P}(A=4,B=4)=1/16$$

5.2 item b.

Agora, para Z=X+Y, teremos:

M	P(M=m)
2	1/16
3	1/8
4	1/8+1/16=3/16
5	1/8+1/8=1/4
6	1/16+1/8=3/16
7	1/8
8	1/16

Tabela 13: Distribuição de probabilidade de Z=X+Y

$$E(Z)=2.(1/16)+3.(1/8)+4.(3/16)+5.(1/4)+6.(3/16)+7.(1/8)+8.(1/16)=5$$
$$E(Z^2)=2^2.(1/16)+3^2.(1/8)+4^2.(3/16)+5^2.(1/4)+6^2.(3/16)+7^2.(1/8)+8^2.(1/16)=27,5$$
$$Var(Z)=27,5-5^2=2,5$$
$$E(X)=1.(1/16)+2.(3/16)+3.(5/16)+4.(7/16)=3,125$$
$$E(Y)=1.(7/16)+2.(5/16)+3.(3/16)+4.(1/16)=1,875$$
$$E(X^2)=1.(1/16)+2^2.(3/16)+3^2.(5/16)+4^2.(7/16)=10,625$$
$$E(Y^2)=1.(7/16)+2^2.(5/16)+3^2.(3/16)+4^2.(1/16)=4,375$$
$$Var(X)=10,625-3,125^2=0,86$$
$$Var(Y)=4,375-1,875^2=0,86$$

6 Questão 6

6.1 item a.

$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = \sigma^2 - \mu^2$

6.2 item b.

$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu$

7 Questão 7

$$\begin{aligned}
E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] &= E\left[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\right] = \\
&= E(XY) - E(X.E(Y)) - E(E(X)Y) + E(E(X)E(Y) = \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

8 Questão 8

$$E(M) \quad = \quad E\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}\right] = \frac{1}{4}\left[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)\right] = \mu$$

Como $X_1, ..., X_1$ são independentes,

$$\begin{aligned}
Var(M) &= \left(\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4)\right) \\
&= \frac{4\sigma^2}{16} = \frac{\sigma^2}{4}
\end{aligned}$$

9 Questão 9

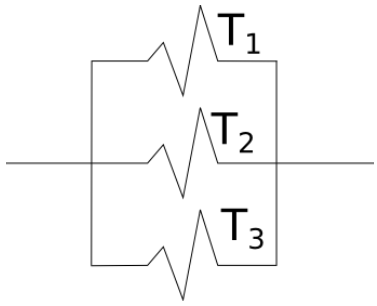
$T \sim Exp(\lambda), \lambda = 1500$
$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-t/\lambda} \Rightarrow e^{-t/\lambda}$

9.1 item a.

$\mathbb{P}(T \leq 2000|T \geq 1000) = 1 - \mathbb{P}(T \geq 2000|T \geq 1000),$
Pela propriedade de falta de memória da dist. exponencial:
$= 1 - \mathbb{P}(T \geq 1000) = \mathbb{P}(T < 1000) = 1 - e^{-1000/1500} = 0,777$
Uma outra forma é calcular a probabilidade pela definição de probabilidade condicional, isto é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq 2000|T \geq 1000) &= 1 - \mathbb{P}(T \geq 2000|T \geq 1000) = 1 - \frac{\mathbb{P}(T \geq 2000, T \geq 1000)}{\mathbb{P}(T \geq 1000)} = \\
&= 1 - \frac{\mathbb{P}(T \geq 2000)}{\mathbb{P}(T \geq 1000)} = 1 - \frac{e^{(-2000/1500)}}{e^{(-1000/1500)}} = 1 - e^{-1000/1500} = 0,777
\end{aligned}$$

9.2 item b.



$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Pelo menos um componente funcione mais que 1500 horas}) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{Todos os componentes falhem antes de 1500 horas}) = \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq 1500, T_2 \leq 1500, T_3 \leq 1500)
\end{aligned}
$$

Como T_1, T_2, T_3 são independentes:

$$= 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq 1500)\mathbb{P}(T_2 \leq 1500)\mathbb{P}(T_3 \leq 1500) = 1 - \left(1 - e^{-1}\right)^3 = 0,7474$$

9.3 item c.

Para que o sistema continue funcionando, todos os componentes devem funcionar simultaneamente, isto é, se um falhar o sistema pára. Assim:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Tempo do sistema} \geq 110) > 0.8 \\
&= \mathbb{P}(T_1 \geq 110, T_2 \geq 110, ..., T_n \geq 110) > 0,8
\end{aligned}
$$

Considerando todos os componentes independentes e que todos possuem a mesma distribuição:

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(T_1 \geq 110)\mathbb{P}(T_2 \geq 110), ..., \mathbb{P}(T_n \geq 110) > 0,8 \\
&= \underbrace{\left(e^{-110/1500}\right) . \left(e^{-110/1500}\right), ..., \left(e^{-110/1500}\right)}_{\text{n vezes}} > 0.8 \Rightarrow e^{-110n/1500} > 0,8 \\
&\Rightarrow \frac{-110}{1500} > -0,223 \Rightarrow n < 3,043 \Rightarrow \text{O número máximo de componentes é 3.}
\end{aligned}
$$

9.4 item d.

Seja X o número de componentes que não falharam ao longo do tempo.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=10) &= \mathbb{P}(\text{todos estão em funcionamento após 1500h}) = \mathbb{P}(T>1500)^{10} \\
&= \left(e^{-1500/1500}\right)^{10} = e^{-10} \\
\mathbb{P}(X=0) &= \mathbb{P}(\text{todos terem falhado em até 1500h}) = \mathbb{P}(T \leq 1500)^{10} = \left(1-e^{-1}\right)^{10} \\
\mathbb{P}(X=9) &= \mathbb{P}(\text{após 1500h, 1 falhar e 9 continuarem funcionando }) \\
&= \binom{10}{1} \mathbb{P}(T \leq 1500)\mathbb{P}(T>1500)^{9} = 10\left(1-e^{-1}\right)e^{-9} \\
\mathbb{P}(X=8) &= \mathbb{P}(\text{após 1500h, 2 terem falhado e 8 continuarem funcionando }) \\
&= \binom{10}{2} \mathbb{P}(T \leq 1500)^{2}\mathbb{P}(T>1500)^{8} = 45\left(1-e^{-1}\right)^{2}e^{-8} \\
\dots \\
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\text{após 1500h, 9 terem falhado e 1 continuar funcionando }) \\
&= \binom{10}{9} \mathbb{P}(T \leq 1500)^{9}\mathbb{P}(T>1500)^{1} = 10\left(1-e^{-1}\right)^{9}e^{-1}
\end{aligned}
$$

Assim, a distribuição de X é dada por:

X	P(X=x)
10	0,00005
9	0,00078
8	0,00603
7	0,02764
6	0,08311
5	0,17137
4	0,24538
3	0,24093
2	0,15525
1	0,05928
0	0,01019

Tabela 14: Distribuição de probabilidade de X

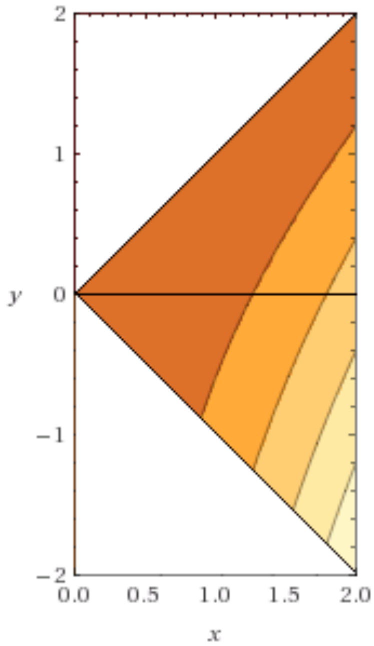
E(X)=10.0,00005+9.0,00078+...+0.0,01019=3,6788

Portanto o número esperado de componentes sobreviventes após 1500h é de aproximadamente 3,7.

10 Questão 10

10.1 item a.

O Domínio de variação é dado pela área colorida na figura abaixo. As diferenças de cor indicam as curvas de nível da função.



10.2 item b.

$$f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{8}, x \in (0,2), -x < y < x$$

Inicialmente verifiquemos que $\int\int_D f(x,y)dydx = 1$

$$\int_0^2 \int_{-x}^{x} \frac{x^2 - xy}{8} dydx = \int_0^2 \left. \frac{x^2y - xy^2/2}{8} \right|_{y=-x}^{x} dx =$$
$$= \int_0^2 x^3/8 - x^3/16 - (-x^3/8 - x^3/16)dx = \int_0^2 (x^3/4)dx = (x^4/4)|_0^2 = 2^4/16 = 1$$

Agora:

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{x^2 - xy}{8} dy = \frac{x^3}{4}, x \in (0,2)$$

Para f(y), temos que $-x < y < x$ e $0 < x < 2$. Considere inicialmente o caso $-x < y < 0 \Rightarrow x > -y$ com $y < 0$ e $x \in (0,2) \Rightarrow y > -2$

$$\int_{-y}^{2} \frac{x^2 - xy}{8} I(y < 0)dx = (x^3/8 - x^2y/16)I(y < 0)\Big|_{x=-y}^{2} =$$
$$= (1/3 - y/4 + 5y^3/48)I(y < 0)$$

No caso $0 < y < x \Rightarrow x > y$ com $y > 0$ e $x \in (0, 2) \Rightarrow y < 2$

$$\int_{-y}^{2} \frac{x^2 - xy}{8} I(y > 0)dx = (x^3/3 - x^2y/2)\frac{I(y > 0)}{8}\Big|_{x=y}^{2} =$$
$$= (8/3 - 2y - y^3/3 + y^3/3)I(y > 0) =$$
$$= (1/3 - y/4 + y^3/48)I(y > 0)$$

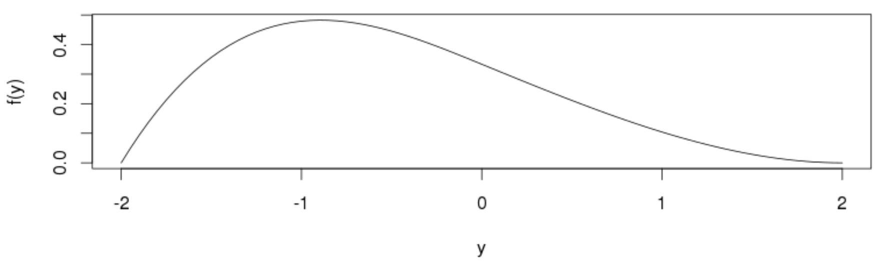
Assim,

$$f(y) = \begin{cases} (1/3 - y/4 + 5y^3/48), \text{ se -2<y<0} \\ (1/3 - y/4 + y^3/48), \text{se 0<y<2} \end{cases}$$

Note que:

$$\int_{-2}^{2} f(y)dy = \int_{-2}^{0} (1/3 - y/4 + 5y^3/48)dy + \int_{0}^{2} (1/3 - y/4 + y^3/48)dy = 1/4 + 3/4 = 1$$

A Figura abaixo ilustra a curva da função densidade f(y).



11 Questão 11

$$f_{Y|X=x}(x) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{(x^2 - xy)/8}{(x^3/4)} = \frac{(x^2 - xy)}{8}\frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - xy}{2x^3}, x \in (0, 2), -x < y < x$$

$$f_{X|Y=y}(x) \begin{cases} \frac{x^2-xy}{8}\left(\frac{48}{16-12y+5y^3}\right) = \frac{6(x^2-xy)}{16-12y+5y^3}, \text{ se } -x < y < 0, x \in (0,2) \\ \frac{x^2-xy}{8}\left(\frac{48}{16-12y+y^3}\right) = \frac{6(x^2-xy)}{16-12y+y^3}, \text{ se } 0 < y < x, x \in (0,2) \end{cases}$$

12 Questão 12

$$f(x,y) = \frac{x+y}{64}, x \in [0,4], y \in [0,4]$$

12.1 item a.

$$f(x) = \int_0^4 \frac{x+y}{64} dy = \left(\frac{xy}{64} + \frac{y^2}{2.64}\right)\Bigg|_{y=0}^4 = x/16 + 16/128 = \frac{x+2}{16}, x \in [0,4]$$

$$f(y) = \int_0^4 \frac{x+y}{64} dx = \left(\frac{xy}{64} + \frac{x^2}{2.64}\right)\Bigg|_{x=0}^4 = y/16 + 16/128 = \frac{y+2}{16} y \in [0,4]$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{x+y}{64}}{\frac{y+2}{16}} = \frac{x+y}{4(y+2)}, (x,y) \in [0,4]^2$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{x+y}{64}}{\frac{x+2}{16}} = \frac{x+y}{4(x+2)}, (x,y) \in [0,4]^2$$

12.2 item b.

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= \int y.f_{Y|X=x}(y)dy = \int_0^4 y.\frac{x+y}{4(x+2)}dy = \int_0^4 \frac{yx+y^2}{4(x+2)}dy = \\ &= \frac{y^2x}{2.4(x+2)} + \frac{y^3}{3.4(x+2)}\Bigg|_{y=0}^4 = \frac{2x}{x+2} + \frac{16}{3(x+2)} \\ &= \frac{6x+16}{3(x+2)}, x \in [0,4] \\ E(X|Y) &= \int x.f_{X|Y=y}(x)dx = \int_0^4 x.\frac{x+y}{4(y+2)}dx = \int_0^4 \frac{yx+x^2}{4(y+2)}dy = \\ &= \frac{x^2y}{2.4(y+2)} + \frac{x^3}{3.4(y+2)}\Bigg|_{x=0}^4 = \frac{2y}{y+2} + \frac{16}{3(y+2)} \\ &= \frac{6y+16}{3(y+2)}, y \in [0,4] \end{aligned}$$

12.3 item c.

Para calcular $\rho(X,Y)$, calculemos inicialmente E(X),E(Y),E(XY),Var(X) e Var(Y).

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^4 xf(x)dx = \int_0^4 x\frac{x+2}{16}dx = \left(\frac{x^3}{3.16}+\frac{x^2}{16}\right)\Big|_0^4 = \\
&= 4/3+1-0 = 7/3 = E(Y) \\
E(X^2) &= \int_0^4 x^2f(x)dx = \int_0^4 x^2\frac{x+2}{16}dx = \left(\frac{x^4}{4.16}+\frac{2x^3}{3.16}\right)\Big|_0^4 = \\
&= 4+8/3-0 = 20/3 = E(Y^2)
\end{aligned}
$$

Logo, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 20/3 - (7/3)^2 = 11/9 = Var(Y)$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^4\int_0^4 xy.f(x,y)dxdy = \int_0^4\int_0^4 xy\frac{x+y}{64}dxdy = \\
&= (1/64)\int_0^4 \left(\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^4 dy = (1/64)\left(\frac{4^3y^2}{3.2}+\frac{4^2y^3}{2.3}-0\right)\Big|_0^4 = \\
&= (1/64)\left(\frac{4^34^2}{3.2}+\frac{4^24^3}{2.3}-0\right) = (1/64).(4^5/3) = 16/3
\end{aligned}
$$

Logo, $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 16/3 - (7/3)(7/3) = -1/9$.
Finalmente, $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{DP(X)DP(Y)} = \frac{(-1/9)}{(11/9)^{1/2}(11/9)^{1/2}} = \frac{(-1/9)}{(11/9)} = -1/11$.