MAE 0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística
Lista 3

Professores: Pedro Morettin & Chang Chiann

1. Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

   (a) Lançamento de dois dados: anota-se a configuração obtida.

   $\Omega = \{(Cara, Coroa), (Coroa, Cara), (Cara, Cara), (Coroa, Coroa)\}$

   (b) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

   (c) Investiga-se famílias com 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.

   $\Omega = \{(F, F, F, F), (F, F, F, M), (F, F, M, M), (F, M, M, M),$
   $(M, M, M, M), (M, F, F, F), (M, M, F, F), (M, M, M, F), ...\}$

   (ou seja, todas as 16 permutações)

   (d) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que queimem.

   $\Omega = \{t : t > 0\}$

   (e) Lança-se uma moeda até aparecer cara e anota-se o número de lançamentos.

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

   Ou seja, pode aparecer Cara no primeiro lançamento, no segundo e assim por diante.

   (f) De um grupo de 5 pessoas (A,B,C,D,E) sorteiam-se duas, uma após outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.

   $\Omega = \{(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, A), (B, B), ...\}$

   Ou seja, todas as 25 permutações.

   (g) Mesmo enunciado que f, sem reposição.

   $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, A), (B, C), ...\}$

   Ou seja, todas as 5*4=20 permutações.

2. Duas moedas são lançadas - liste os eventos:

(a) pelo menos uma cara (A)

$2A = \{(Cara, Coroa), (Cara, Cara), (Coroa, Cara)\}$

(b) duas caras (B)

$B = \{(Cara, Cara)\}$

(c) complementar de (b)

$B^c = \{(Cara, Coroa), (Coroa, Coroa), (Coroa, Cara)\}$

3. Considere o lançamento de dois dados. Considere os eventos A: soma dos números obtidos igual a 9 e B: número no primeiro dado maior ou igual a 4. Enumere os elementos de A e B. Obtenha $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c.

$$A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cup B = \{(3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$A^c = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

4. Obtenha as probabilidades dos eventos que aparecem nos problemas 2 e 3.

Problema 2

$P(A) = \dfrac{3}{4}$

$P(B) = \dfrac{1}{4}$

$P(B^c) = \frac{3}{4}$

Problema 3

$P(A) = \frac{4}{36}$

$P(B) = \frac{18}{36}$

$P(A \cup B) = \frac{19}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$

$P(A^c) = \frac{32}{36}$

5. Em uma prova caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 erraram apenas um problema. Qual é a probabilidade de que um aluno, escolhido ao acaso:

Q2/Q1	A	E	Total
A	120	42	162
E	12	74	86
Total	132	116	248

(a) Não tenha acertado nenhum problema?

$Prob = 74/248 = 0,3$

(b) Tenha acertado apenas o segundo problema?

$Prob = 42/248 = 0,17$

6. Considere um quadrado com vértices (0,0), (1,0), (0,1) e (1,1). Suponha que a probabilidade de uma região A (evento) seja a área desta região.

(a) Considere o evento A= conjunto dos pontos cuja distância às origem seja menor ou igual a um. Represente A graficamente.

A região A equivale a um quarto de círculo com raio igual à 1.

(b) Calcule $P(A)$.

$P(A) = \frac{\pi}{4}$

(c) Calcule $P(B)$, onde $B = \{(x, y) : x \geq b \cup y \geq b\}$, onde b é um número tal que $0 < b < 1$.

$P(B) = P(x \geq b) + P(y \geq b) - P(x \geq b \cap y \geq b)$
$P(B) = (1-b) + (1-b) - (1-b)^2$

(d) Calcule $P(B^c)$, onde B foi definido em (c).

$P(B^c) = 1 - P(B) = 2b - 1 + (1-b)^2$

7. Considere um quadrado como da figura 1. Considere os eventos:

$$A = \{(x,y) : 1/3 \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq 1/2\}$$
$$B = \{(x,y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1/4 \leq y \leq 3/4\}$$

Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c)$, $P(B^c)$ e $P(A^c \cap B^c)$
$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$
$P(A \cap B) = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{24}$
$P(A^c) = \frac{5}{6}$
$P(B^c) = \frac{3}{4}$
$P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{8}$

8. Considere, agora, a situação do problema 6, mas suponha que o quadrado não tenha área unitária. Como você definiria a probabilidade de um evento A?

Sejam (x_1, x_2) e $(y_1, y_2$ os limites do quadrado equivalente ao evento A. Seja R a área total do quadrado equivalente ao espaço amostral. Assim:

$$P(A) = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{R}$$

9. Selecionamos da tabela abaixo um dentre os 100 números. Preencher a tabela (ou itens):

(a) O primeiro dígito é zero

$Prob = \frac{1}{10}$

(b) Os dois dígitos são iguais

$Prob = \frac{1}{10}$

(c) Os dois dígitos são diferentes

$Prob = \frac{9}{10}$

(d) O primeiro dígito é maior que o segundo

$Prob = \frac{45}{100}$ (equivale à matriz triangular superior sem a diagonal)

(e) O primeiro dígito é maior ou igual ao segundo

$Prob = \frac{55}{100}$ equivale à matriz triangular superior com a diagonal)

(f) O segundo dígito é 1

$Prob = \frac{1}{10}$

(g) A soma dos dígitos é 5

$Prob = \frac{6}{100}$

(h) A soma dos dígitos é 9

$Prob = \frac{1}{10}$

(i) Nenhum dos dígitos é maior que 3

$Prob = \frac{16}{100}$

(j) Apenas um dos dígitos é maior que 3 e o segundo não

$Prob = \frac{48}{100}$

10. Uma gaveta contém 5 pares de meias verdes e 3 de meias azuis. Tiram-se 2 meias ao acaso. Qual a probabilidade de se formar:

(a) Um par verde?

Com reposição: $Prob = \frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16} = \frac{25}{64}$

Sem reposição: $Prob = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} = \frac{3}{8}$

(b) Um par de meias da mesma cor?

Com reposição: $Prob = \frac{25}{64} + \frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16} = 0,53$

Sem reposição: $Prob = \frac{3}{8} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} = 0,5$

(c) Um par com meias de cores diferentes?

(Pode ser AV ou VA)

Com reposição: $Prob = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{16} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{16} = 0,47$

Sem reposição: $Prob = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} = 0,5$

11. O problema do aniversário - Considere k pessoas numa sala. Qual a probabilidade de que no mínimo duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês? A partir de qual valor de k você "arriscaria"dizer que essa probabilidade é maior do que 1/2?

A probabilidade $p = P(A)$ de que que no mínimo duas pessoas dentre k pessoas façam aniversário no mesmo dia (evento A) é igual à $1-P(A^c)$, sendo A^c o evento em que nenhuma pessoa faça aniversário no mesmo dia. Sabemos que $P(A^c) = \dfrac{365 \cdot 364...(365-k+1)}{365^k}$. Portanto, para que $p = 1 - P(A^c) > 0,5$, temos que $k < 23$.

12. A probabilidade de que A resolva um problema é de 2/3 e a probabilidade de que B resolva é de 3/4. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade do problema ser resolvido?

O problema pode ser resolvido somente por A, somente por B ou por ambos. Ou seja, queremos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Dada a independência na resolução $(P(A \cap B) = P(A)P(B))$, temos que $P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 0,92$.

13. Na tabela abaixo, os número que aparecem são probabilidades relacionadas com a ocorrência de A,B, $(A \cap B)$, etc. Assim, $P(A) = 0,10$, enquanto que $P(A \cap B) = 0,04$. Verifique se A e B são independentes.

Para ser independente, teríamos que ter $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Isso não acontece, pois $P(A) = 0,10$, $P(B) = 0,12$ e $P(A \cap B) = 0,04 \neq 0,0012$.

14. Uma pessoa joga um dado. Se sair 6 ganha a partida. Se sair 3, 4 ou 5 perde. Se sair 1 ou 2 tem o direito de jogar novamente. Desta vez, se sair 4, ganha e se sair outro número perde. Qual é a probabilidade de ganhar?

Lançamento 1: P(ganhar no primeiro lançamento)=P(sair 6)=1/6; P(perder no primeiro lançamento)=P(sair 3,4 ou 5)=1/2; se sair 1 ou 2 (cuja probabilidade é 1/3), joga novamente:
Lançamento 2: P(ganhar no segundo lançamento)=P(sair 4)=1/6; P(perder no segundo lançamento)=5/6.

O indivíduo ganha se: ou tira 6 logo no primeiro lançamento (evento A) ou tira 1,2 no primeiro lançamento (evento B) e tira 4 no segundo lançamento (evento C).
$Prob = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

Como A,B e C são eventos independentes, temos que $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. Além disso, A e B são mutuamente exclusivos, logo $P(A \cap B \cap C) = 0$. Assim, temos que:

$Prob = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = 0,23.$

15. Considere uma urna contendo 3 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. Retire duas bolas da urna, sem reposição.

(a) Obtenha os resultados possíveis e as respectivas probabilidades.

$\Omega = \{(P,P),(P,V),(V,P),(V,V)\}$
$P(\{(P,P)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$
$P(\{(P,V)\}) = P(\{(V,P)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
$P(\{(V,V)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

(b) O mesmo problema, para extrações com reposição.

$\Omega = \{(P,P),(P,V),(V,P),(V,V)\}$
$P(\{(P,P)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$
$P(\{(P,V)\}) = P(\{(V,P)\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$
$P(\{(V,V)\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

16. No problema anterior, calcule as probabilidades dos eventos:

(a) bola preta na primeira e segunda extrações;

$P(\{(P,P)\} = \frac{6}{56}$ sem reposição
$P(\{(P,P)\} = \frac{9}{64}$ com reposição

(b) bola vermelha na primeira extração;

$P(\{(V,P),(V,V)\} = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} = \frac{35}{56}$ sem reposição
$P(\{(V,P),(V,V)\} = \frac{15}{64} + \frac{25}{64} = \frac{40}{64}$ com reposição

(c) bola preta na segunda extração.

$P(\{(V,P),(P,P)\} = \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{21}{56}$ sem reposição
$P(\{(V,P),(P,P)\} = \frac{15}{64} + \frac{9}{64} = \frac{24}{64}$ com reposição

17. Uma urna contem 5 bolas pretas, 3 vermelhas, 3 azuis e 2 amarelas. Extraem-se simultaneamente 5 bolas. Qual é a probabilidade de que saiam duas bolas pretas, duas azuis e uma amarela?

Como as bolas são retiradas ao mesmo tempo, a retirada é sem reposição. Assim, a probabilidade de tirar a configuração (P P Az Az Am) é:

$$\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{1287}.$$

Porém, existem $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$ configurações diferentes, cada uma com a mesma probabilidade. Portanto, $Prob = 30 \cdot \frac{2}{1287} = \frac{20}{429}$.

18. Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?

$\Omega = \{(AA), (ACC), (ACBB), (ACBA), (BB), (BCC), (BCAA), (BCAB)\}.$

19. No espaço amostral do problema anterior, atribua a cada ponto contendo k letras a probabilidade $\frac{1}{2^k}$ (assim, AA tem probabilidade 1/4).

(a) Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é um.

$P(\{(AA), (BB)\}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$P(\{(ACC), (BCC)\}) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
$P(\{(ACBB), (BCAA)\}) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$
$P(\{(ACBA), (BCAB)\}) = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$
$P(\Omega) = P(\{(AA), (BB)\}) + P(\{(ACC), (BCC)\}) + P(\{(ACBB), (BCAA)\})$
$+P(\{(ACBA), (BCAB)\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$

(b) Calcule a probabilidade de que A vença (um jogador vence quando ganha duas partidas seguidas). Em seguida, calcule a probabilidade de que B vença. Qual a probabilidade de que não haja decisão?

P(A vencer)$=P(\{(AA), (BCAA)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
P(B vencer)$=P(\{(BB), (ACBB)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
P(C vencer)$=P(\{(ACC), (BCC)\}) = \frac{1}{4}$
P(sem decisão)$=P(\{(ACBA), (BCAB)\}) = \frac{1}{8}$.

20. Na tabela abaixo damos as áreas de concentração de 1000 estudantes de uma faculdade, segundo o ano em que estão matriculados. A letra N indica uma área de concentração nas ciências naturais, S nas ciências sociais e H nas ciências humanas. Além desses símbolos, vamos denotar por U o evento do estudante estar no 3º ou 4º ano e por L o evento do

estudante estar no 1º ou no 2º. Vamos calcular as probabilidades correspondentes aos seguintes eventos na seleção de um estudante ao acaso. (Procure sempre expressar, em palavras, o evento cuja probabilidade você estiver determinando).

Ano	N	S	H	Totais
1º	75	125	100	300
2º	60	100	90	250
3º	50	110	90	250
4º	45	85	70	200
Totais	230	420	350	1000

Dividindo cada número de cada ano/área de concentração pelo total de alunos (1000), temos a seguinte tabela:

Ano	N	S	H	Totais
1º	0,075	0,125	0,100	0,300
2º	0,060	0,100	0,090	0,250
3º	0,050	0,110	0,090	0,250
4º	0,045	0,085	0,070	0,200
Totais	0,230	0,420	0,350	1,000

(a) P(N), P(S), P(H)

$P(N) = 0,23$; $P(S) = 0,42$ e $P(H) = 0,35$

(b) P(1º ano e N), P(3º ano e S), P(4º e H)

$P(1^o ano \cap N) = 0,075$; $P(3^o ano \cap S) = 0,11$ e $P(4^o \cap H) = 0,07$

(c) P(L e H), P(U e N)

$P(L \cap H) = P((1^o ano \cup 2^o ano) \cap H) = P((1^o ano \cap H) \cup (2^o ano \cap H)) = 0,1 + 0,09 = 0,19$

$P(U \cap N) = P((3^o ano \cup 4^o ano) \cap N) = P((3^o ano \cap N) \cup (4^o ano \cap N)) = 0,05 + 0,045 = 0,095$

(d) P(N ou S), P(U ou H)

$P(N \cup S) = P(N) + P(S) = 0,23 + 0,42 = 0,65$

$P(U \cup H) = P(3^o ano \cup 4^o ano \cup H)$

(e) P(N|4º), P(4º|N), P(N ou 8|3º), P(H|N)

$$P(N|4^o) = \frac{P(N \cap 4^o)}{P(4^o)} = \frac{0,045}{0,20} = 0,225$$
$$P(4^o|N) = \frac{P(N \cap 4^o)}{P(N)} = \frac{0,045}{0,23} = 0,1956$$
$$P(H|N) = \frac{P(H \cap N)}{P(N)} = 0$$

22. Um capitão de um time de futebol se queixou que em três jogos consecutivos o seu time perdeu o sorteio para a escolha do campo. Você acha que ele tem razão de reclamar?

Não, pode acontecer, apesar da probabilidade ser baixa. Um sorteio é independente do outro, logo a chance disso acontecer é de $(1/2)^3 = 1/8$.

23. Considere números aleatórios de dois algarismos. Seja G o evento de que o número é divisível por 4; H o evento de que ele seja divisível por 5.

(a) Determine P(G) e P(H)

O número total de números aleatórios de 2 algarismos é 10*10=100 números. Destes, 25 são múltiplos de 4 e 20 são múltiplos de 5. Logo, $P(G) = 1/4$ e $P(H) = 1/5$.

(b) Determine P(G e H)

$P(G \cap H) = 5/100 = 1/20$ (pois os números 20,40,60,80,100 são ambos divisíveis por 4 e 5)

(c) Os eventos G e H são exclusivos?

Não, pois a interseção não é vazia, conforme item anterior.

(d) Os eventos G e H são independentes ?

Sim, pois $P(G \cap H) = P(G)P(H)$.

(e) Determine P(G ou H)

$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = 8/20 = 0,40$

24. A senhora Y, quando tem dores de cabeça, escolhe ao acaso um dentre dois analgésicos. Se um deles tem probabilidade 3/4 de aliviar a dor e o outro tem probabilidade 2/3, qual é a probabilidade de que passe a dor de cabeça da senhora Y?

Dois medicamentos: A e B
Escolha ao acaso: P(A)=P(B)=1/2

Evento aliviar a dor: C P(passar dor)$=\frac{1}{2}P(C|A)+\frac{1}{2}P(C|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{8}+\frac{2}{6}=\frac{18}{48}+\frac{16}{48}=\frac{34}{48}$.

25. Em uma fábrica de parafusos, as máquinas A, B e C produzem 25, 35 e 40 por cento do total produzido, respectivamente. Da produção de cada máquina 5,4 e 2 por cento, respectivamente, são parafusos defeituosos. Escolhe-se ao acaso um parafuso e verifica-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de que o parafuso venha da máquina A? Da B? Da C?

$P(def)=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,40\cdot 0,02=0,0345$
$P(A|def)=\dfrac{P(A\cap def)}{P(def)}=\dfrac{0,25\cdot 0,05}{0,0345}=0,36$
$P(B|def)=\dfrac{P(B\cap def)}{P(def)}=\dfrac{0,35\cdot 0,04}{0,0345}=0,41$
$P(C|def)=\dfrac{P(C\cap def)}{P(def)}=\dfrac{0,40\cdot 0,02}{0,0345}=0,23$

26. As probabilidades de que dois eventos independentes ocorram são p e q, respectivamente. Qual a probabilidade :

(a) de que nenhum destes eventos ocorra?

$P(A)=p;P(B)=q$
$P(A^c\cap B^c)=(1-p)(1-q)$

(b) de que pelo menos um destes eventos ocorra?

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=p+q-pq$

27. Prove que se A e B são independentes, também o serão A^c e B^c, A e B^c e A^c e B.

$P(A\cup B)=P(A)P(B)$, pela independência
$P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)$ pelas Leis de DeMorgan
$=1-\{P(A)+P(B)-P(A)P(B)\}=(1-P(A))-P(B)(1-P(A))=(1-P(A))(1-P(B))=P(A^c)P(B^c)$

$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)$
$=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c)$

(análogo para A^c e B)

28. Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são avaliados por uma prova e 25% dos candidatos são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os restantes 25% como fracos (F). Como medida de economia, o departamento de seleção pretende substituir

o treinamento por um teste de conhecimentos gerais e específicos. Mas para isso, gostaria de conhecer qual a probabilidade de que um indivíduo aprovado no teste, fosse considerado fraco, caso fizesse o curso. Assim, este ano, antes do início do curso, os candidatos foram submetidos ao teste e de acordo com os resultados receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso as seguintes probabilidades condicionais foram obtidas: $P(A|B) = 0,8$;$P(A|M) = 0,5$;$P(A|F) = 0,2$. Calcular $P(F|A)$,$P(B|A)$ e $P(M|A)$.

Usando o teorema de Bayes, temos que $P(F|A) = P(F \cap A)/P(A)$ e $P(A|F) = P(A \cap F)/P(F)$. Como $P(A|F) = 0,2$ e $P(F) = 0,25$, temos que $P(A \cap F) = 0,25 \cdot 0,2 = 0,05$. Além disso, usando a Lei da Probabilidade Total, temos que $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|M) \cdot P(M) + P(A|F) \cdot P(F) = 0,8 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,5$. Logo, $P(F|A) = 0,05/0,5 = 0,1$. Analogamente, $P(B|A) = 0,4$ e $P(M|A) = 0,5$.

29. Se P(A) = 1/3, P(B^c) = 1/4, A e B podem ser disjuntos (ou mutuamente exclusivos)?

Do enunciado, temos que $P(B) = 3/4$. Logo, se forem disjuntos, temos $P(A \cup B) = 1/3 + 3/4 = 13/12 > 1 = P(\Omega)$. Logo, A e B não podem ser disjuntos.