

## MAE-518: Modelagem em Séries Temporais Financeiras

Primeira Prova. 29.04.2002.

- 1.** Suponha que o log-retorno diário de um ativo siga o modelo

$$r_t = 0,01 + 0,5r_{t-1} + a_t + 0,2a_{t-1},$$

onde  $a_t \sim \text{i.i.d.}(0; 0,02)$ .

- (a) Calcule a média e variância de  $r_t$ .
- (b) Calcule as autocorrelações de lags 1 e 2.
- (c) Supondo  $r_{100} = -0,01$  e  $a_{100} = 0,01$ , calcule as previsões 1 e 2 passos à frente, na origem  $T = 100$ .
- (d) Calcule os desvios padrões dos erros de previsão em (c).

- 2.** Suponha que temos as seguintes estimativas de  $\rho_j$  e  $\phi_{jj}$  para o processo  $X_t$ :

$j$	1	2	3	4	5	6
$\hat{\rho}_j$	-0,82	0,41	-0,12	0,08	-0,09	0,05
$\hat{\phi}_{jj}$	-0,82	-0,43	-0,05	0,25	0,20	0,12

Além disso,  $\bar{X} = -0,08$ ,  $\hat{\gamma}_0 = 2,4$ . Identifique um modelo ARIMA para  $X_t$  e obtenha estimativas preliminares para os parâmetros.

- 3.** Suponha que os resíduos  $\hat{a}_t$  do modelo  $(1 - B)X_t = (1 + 0,6B)a_t$ , onde  $a_t \sim \text{RB}(0, \sigma_a^2)$ , ajustado a uma série com  $N = 80$  observações, forneceram as seguintes autocorrelações estimadas dos resíduos:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_a(j)$	0,39	0,20	0,09	0,04	0,09	-0,13	-0,05	0,06	0,11	-0,02

Verifique se o modelo ajustado é adequado ou se existe alguma indicação de que o modelo deva ser modificado. Se houver, indique um novo modelo.

**4.** Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

(a) Mostre que a previsão um passo à frente da volatilidade, com origem  $T$ , é dada por

$$\hat{\sigma}_T^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2.$$

(b) Usando o fato que  $X_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$  e  $E(\varepsilon_{T+1}^2 - 1 | \mathcal{F}_T) = 0$ , mostre que

$$\hat{\sigma}_T^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_T^2(1).$$

(c) Em geral, mostre que

$$\hat{\sigma}_T^2(h) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_T^2(h-1), \quad h > 1,$$

e que

$$\sigma_T^2(h) \longrightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad h \rightarrow \infty,$$

se  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .