

MAE-518: Modelagem em Séries Temporais Financeiras

Primeira Prova. 29.04.2002.

1. Suponha que o log-retorno diário de um ativo siga o modelo

$$r_t = 0,01 + 0,5r_{t-1} + a_t + 0,2a_{t-1},$$

onde $a_t \sim \text{i.i.d.}(0; 0,02)$.

- (a) Calcule a média e variância de r_t .
- (b) Calcule as autocorrelações de lags 1 e 2.
- (c) Supondo $r_{100} = -0,01$ e $a_{100} = 0,01$, calcule as previsões 1 e 2 passos à frente, na origem $T = 100$.
- (d) Calcule os desvios padrões dos erros de previsão em (c).

2. Suponha que temos as seguintes estimativas de ρ_j e ϕ_{jj} para o processo X_t :

j	1	2	3	4	5	6
$\hat{\rho}_j$	-0,82	0,41	-0,12	0,08	-0,09	0,05
$\hat{\phi}_{jj}$	-0,82	-0,43	-0,05	0,25	0,20	0,12

Além disso, $\bar{X} = -0,08$, $\hat{\gamma}_0 = 2,4$. Identifique um modelo ARIMA para X_t e obtenha estimativas preliminares para os parâmetros.

3. Suponha que os resíduos \hat{a}_t do modelo $(1 - B)X_t = (1 + 0,6B)a_t$, onde $a_t \sim \text{RB}(0, \sigma_a^2)$, ajustado a uma série com $N = 80$ observações, forneceram as seguintes autocorrelações estimadas dos resíduos:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_a(j)$	0,39	0,20	0,09	0,04	0,09	-0,13	-0,05	0,06	0,11	-0,02

Verifique se o modelo ajustado é adequado ou se existe alguma indicação de que o modelo deva ser modificado. Se houver, indique um novo modelo.

4. Considere um modelo GARCH(1,1):

$$\begin{aligned}X_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.\end{aligned}$$

(a) Mostre que a previsão um passo à frente da volatilidade, com origem T , é dada por

$$\hat{\sigma}_T^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X_T^2 + \beta_1 \sigma_T^2.$$

(b) Usando o fato que $X_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ e $E(\varepsilon_{T+1}^2 - 1 | \mathcal{F}_T) = 0$, mostre que

$$\hat{\sigma}_T^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_T^2(1).$$

(c) Em geral, mostre que

$$\hat{\sigma}_T^2(h) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_T^2(h-1), \quad h > 1,$$

e que

$$\sigma_T^2(h) \longrightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad h \rightarrow \infty,$$

se $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.