

MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
<http://www.ime.usp.br/~pam>

Aula 2

23 de agosto de 2021

Sumário

- 1 Análise de Fourier clássica
- 2 Quatro decomposições
- 3 Exemplos de séries temporais

Análise de Fourier

1. **Análise de Fourier, ou análise harmônica** é usada tradicionalmente para resolver algumas equações diferenciais parciais que aparecem na física matemática, como a equação do calor e a equação de ondas.
2. O objetivo básico é de aproximar uma função $f(t)$ por uma combinação linear de componentes senoidais, cada uma com dada frequência. O conjunto $\{w_n(t) = e^{int}, n = 0, \pm 1, \dots\}$ de funções ortogonais, de período 2π , forma a base para a análise de Fourier. Na realidade, esse conjunto é gerado por dilatações de uma única função, $w(t) = e^{it}$, ou seja, $w_n(t) = w(nt)$ para qualquer n inteiro.
3. O fato básico é que toda função periódica, de período 2π , de quadrado integrável, é gerada por uma superposição de dilatações inteiras da função $w(t)$.

Análise de Fourier

1. A análise de Fourier é apropriada para analisar os processos estacionários. Para processos não estacionários e processos com características especiais, outros sistemas ortogonais podem ser úteis, como as ondaletas, a serem tratadas neste curso.
2. Vamos nos restringir ao caso de funções determinísticas. Esse estudo é básico para a extensão da análise ao caso de processos estocásticos.
3. A fórmula de Euler

$$e^{int} = \cos(nt) + i\text{sen}(nt) \quad (1)$$

relaciona o sistema das exponenciais complexas com o sistema

$$\{\cos(nt), \text{sen}(nt), n = 0, \pm 1, \dots\},$$

de senos e cossenos.

Funções periódicas

1. Dizemos que uma função $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é *periódica*, de período p , se para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = f(t + kp), \quad (2)$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. No que segue, vamos supor que $p \neq 0$.

2. Dizemos que $f(t)$ é um *harmônico de frequência angular λ e amplitude A* , λ e A positivos, se

$$f(t) = A \cos(\lambda t) \quad \text{ou} \quad f(t) = A \sin(\lambda t). \quad (3)$$

3. Como, para todo inteiro k , $\cos[\lambda(t + 2\pi k/\lambda)] = \cos(\lambda t + 2\pi k) = \cos(\lambda t)$, o mesmo ocorrendo com o seno, vemos que um harmônico de frequência λ tem período $p = 2\pi/\lambda$.
4. A frequência angular λ dá o número de ciclos completos em 2π unidades de tempo (radianos).

Funções periódicas

1. Podemos considerar, também, a frequência em ciclos por unidade de tempo, ν , que se relaciona com a frequência angular λ por meio de $\lambda = 2\pi\nu$. Segue-se que $p = 1/\nu$.
2. Assim, por exemplo, uma onda cossenoide de período $p = 5$ segundos tem frequência $\nu = 1/5 = 0,2$ ciclos por segundo e frequência angular $\lambda = 0,4\pi$ radianos. Dizer que $\nu = 0,2$ significa dizer que, em um segundo, ocorre $1/5$ de um ciclo.
3. A Figura 1 ilustra um harmônico

$$f(t) = A \cos(\lambda t + \phi), \quad -\infty < t < \infty, \quad (4)$$

no qual foi introduzido um parâmetro adicional ϕ , chamado *fase*, que dá o deslocamento da onda relativamente à origem.

Exemplo 1

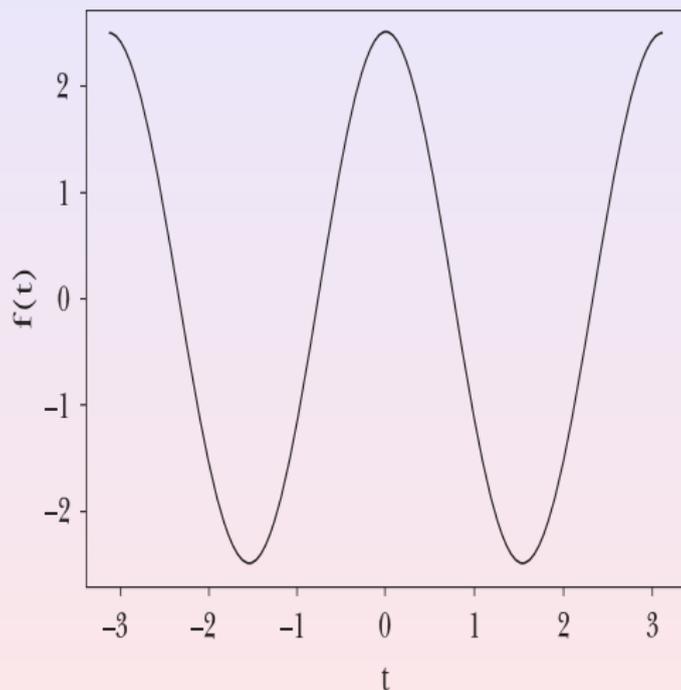


Figura 1: Harmônico com $A = 2,5$, $\lambda = 2$ e $\phi = 0$.

Funções periódicas

1. Chamando $a = A \cos \phi$ e $b = -A \sin \phi$, (4) pode ser escrita

$$f(t) = a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t). \quad (5)$$

2. Sob suposições diversas sobre seu comportamento, uma função $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, pode ser expressa na forma

$$f(t) = \sum_{\lambda} [a(\lambda) \cos(\lambda t) + b(\lambda) \sin(\lambda t)], \quad (6)$$

na qual o símbolo de somatória pode representar uma soma finita ou infinita, ou mesmo uma integral. Dizemos que (6) é uma **representação espectral** de $f(t)$.

3. Podemos ter quatro situações, descritas a seguir.

Tempo contínuo e frequência discreta

1. Aqui temos uma função periódica $f(t)$, de período T , e de quadrado integrável. Então,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}, \quad (7)$$

em que a igualdade deve ser entendida como um limite em média quadrática, e os coeficientes c_n 's são dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt. \quad (8)$$

2. As frequências $\lambda_n = 2\pi n/T$ são chamadas **frequências de Fourier**, a equação (7) é a **representação em série de Fourier** de $f(t)$ e os c_n 's são os **coeficientes de Fourier** de $f(t)$.
3. ou seja, a potência de $f(t)$ sobre $(-T/2, T/2)$, que é energia por unidade de tempo, é decomposta num número infinito de termos, sendo cada termo $|c_n|^2$ a contribuição à potência, do termo da série de Fourier de $f(\cdot)$ com frequência λ_n .

Série de Fourier

A equação (7) também pode ser escrita na forma

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \text{sen}(\lambda_n t)\}, \quad (9)$$

em que

$$c_n = \begin{cases} (a_n - ib_n)/2, & \text{se } n \geq 1 \\ a_0/2, & \text{se } n = 0 \\ (a_{|n|} + ib_{|n|})/2, & \text{se } n \leq -1. \end{cases} \quad (10)$$

Série de Fourier

1. Os coeficientes a_n, b_n de (10) são dados por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\lambda_n t) dt, \quad n \geq 0, \quad (11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(\lambda_n t) dt, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

2. O harmônico de (9) para $n = 1$ é chamado **fundamental** e corresponde a uma onda cosseno (seno) de período igual ao de $f(t)$. Para $n = 2$, temos o **primeiro harmônico**, de período igual à metade do período de $f(t)$, e assim sucessivamente.
3. Como c_n é um número complexo, ele pode ser escrito também na forma polar

$$c_n = R_n e^{i\phi_n}, \quad (13)$$

de modo que $R_n = |c_n| = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ e

$\phi_n = \text{arctg}\left\{\frac{-b_n}{a_n}\right\}, n = 0, 1, 2, \dots$

Tempo contínuo e frequência contínua

1. Suponha agora que $f(t)$ não seja periódica; logo, não podemos representá-la na forma (7). A idéia é considerar a função

$$f_T(t) = f(t), -T/2 \leq t \leq T/2 \quad (14)$$

e então estender $f_T(\cdot)$ periodicamente a toda reta.

2. Se esta for de quadrado integrável, podemos usar o que vimos na seção anterior para obter

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{n,T} e^{i\lambda_n t}, \quad (15)$$

com

$$F_{n,T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-i\lambda_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt. \quad (16)$$

Integral de Fourier

1. Substituindo (16) em (15) e colocando $\Delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n-1} = 2\pi/T$, obtemos

$$f(t) = f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt \right] e^{i\lambda_n t} \right\} \frac{\Delta\lambda}{2\pi},$$

e para $T \rightarrow \infty$, temos que $\Delta\lambda \rightarrow 0$ e portanto

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda, \quad (17)$$

com

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (18)$$

2. Supondo-se $f(t)$ de quadrado integrável, (17) e (18) estarão bem definidas em $L_2(\mathbb{R})$. Dizemos que (17) é a **representação de $f(t)$ como uma integral de Fourier** e que $F(\cdot)$, dada por (18), é a **transformada de Fourier de $f(t)$** .

Relação de Parseval

1. A relação de Parseval, neste caso, fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (19)$$

2. A quantidade $|F(\lambda)|^2$ é chamada **função de densidade espectral de energia** de $f(t)$, que pode ser comparada com uma função de densidade de probabilidade.

Tempo discreto e frequência contínua

1. Suponha agora uma função $f(t)$ de quadrado integrável, definida para $-\infty < t < +\infty$, e que queremos observá-la em instantes de tempo equiespaçados, ou seja, *amostrá-la* em instantes $0, \pm\Delta t, \pm 2\Delta t, \dots$
2. A **transformada de Fourier** desta sequência

$$f_t = f(t\Delta t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

é definida por

$$F_{\Delta}(\lambda) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_t e^{-i\lambda t \Delta t}. \quad (20)$$

3. A transformada inversa é

$$f_t = \int_{-\pi/(\Delta t)}^{\pi/(\Delta t)} F_{\Delta}(\lambda) e^{i\lambda t \Delta t} d\lambda. \quad (21)$$

Relação de Parseval

1. A relação de Parseval para essa situação é

$$\Delta t \sum_t |f_t|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/(\Delta t)}^{\pi/(\Delta t)} |F_\Delta(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (22)$$

2. Um caso especial frequente ocorre para $\Delta t = 1$, para o qual temos as modificações óbvias nas relações acima.
3. Um fenômeno interessante que ocorre quando amostramos uma função contínua em intervalos de tempo igualmente espaçados é o **aliasing**.

Aliasing

1. Usando os resultados acima e sendo F a transformada de Fourier de f , temos que

$$\begin{aligned} f_t &= f(t\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha t\Delta t} d\alpha = \\ &= \sum_j \int_{\pi(j-1)/(\Delta t)}^{\pi(j+1)/(\Delta t)} F(\alpha) e^{i\alpha t\Delta t} d\alpha = \\ &= \int_{-\pi/(\Delta t)}^{\pi/(\Delta t)} \sum_j F\left(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t}\right) e^{i\lambda t\Delta t} d\lambda, \end{aligned}$$

após fazermos a transformação $\lambda = \alpha - \frac{2\pi j}{\Delta t}$.

2. Usando (21) temos que

$$F_{\Delta}(\lambda) = \sum_j F\left(\lambda + \frac{2\pi j}{\Delta t}\right), \quad |\lambda| \leq \frac{\pi}{\Delta t}. \quad (23)$$

3. Segue-se que a transformada de Fourier, na frequência λ , da sequência amostrada f_t , é igual à soma das transformadas de Fourier de $f(t)$, nas frequências λ , $\lambda \pm 2\pi/(\Delta t)$, $\lambda \pm 4\pi/(\Delta t)$ etc.

Aliasing

1. Dizemos que λ é *alias* de $\lambda \pm 2\pi/(\Delta t)$, $\lambda \pm 4\pi/(\Delta t)$ etc.
2. A maior frequência que não seja *alias* de outra frequência no intervalo $(-\pi/(2\Delta t), \pi/(2\Delta t))$ é $\pi/(\Delta t)$, chamada *frequência de Nyquist*, indicada por λ_N .
3. Se $\Delta t = 1$, $\lambda_N = \pi$. No caso de frequência em ciclos por unidade de tempo, a frequência de Nyquist é $\nu_N = 1/2$.

Tempo discreto e frequência discreta

1. Suponha, agora, um número finito de valores amostrados de $f(t)$, para $0 < t < T$, a saber, f_0, f_1, \dots, f_{N-1} , nos pontos

$$t_j = \frac{T}{N}j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (24)$$

2. Segue-se que $\Delta t = T/N$ e $f_j = f(t_j)$. Da teoria da integral de Riemann, se $g(t)$ for contínua,

$$\int_0^T g(t)dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{T}{N}j\right),$$

logo podemos aproximar os coeficientes de Fourier dados em (11) e (12) por

$$a_n^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(\lambda_n j), \quad (25)$$

$$b_n^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin(\lambda_n j), \quad (26)$$

onde $\lambda_n = (2\pi n)/N$ são as **frequências de Fourier**. □

Transformada discreta de Fourier

1. Na forma complexa, a **transformada discreta de Fourier** da sequência f_j é dada por

$$F_n = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\lambda_n j}. \quad (27)$$

2. Essa transformada discreta é muito importante nas aplicações, ao se estimar o espectro de um processo estacionário. O cálculo direto da transformada (27) envolve N^2 operações complexas; no entanto, usando um algoritmo chamado **FFT (fast Fourier transform)**, ela pode ser calculada usando $N \ln N$ operações. Esse é o algoritmo de Cooley e Tukey (1965).
3. A transformada inversa é

$$f_t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i\lambda_n t}, \quad (28)$$

e a relação de Parseval fica

$$\sum_{t=0}^{N-1} |f_t|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_n|^2. \quad (29)$$

Exemplo de AF

1. Vamos considerar a série $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$ de temperaturas médias mensais da cidade de Cananéia, SP, de janeiro de 1976 a dezembro de 1985 (em graus Celsius), $N = 120$ observações. Um gráfico da série é mostrado na Figura 2 e vemos claramente uma componente anual.
2. A Tabela 1 mostra parte da análise de Fourier, com o número harmônico n , os coeficientes discretos de Fourier $a_n^{(N)}$, $b_n^{(N)}$ e

$r_n^{(N)} = \sqrt{[a_n^{(N)}]^2 + [b_n^{(N)}]^2}$, calculados usando (25)-(26). Lembre-se que $a_0^{(N)} = \bar{X}$, a média amostral, e como N é par, podemos escrever

$$X_t = a_0^{(N)} + \sum_{j=1}^{N/2} \{a_j^{(N)} \cos(\lambda_j t) + b_j^{(N)} \sin(\lambda_j t)\},$$

na qual $\lambda_j = 2\pi j/N$ são as frequências de Fourier. A energia média da série é dada por

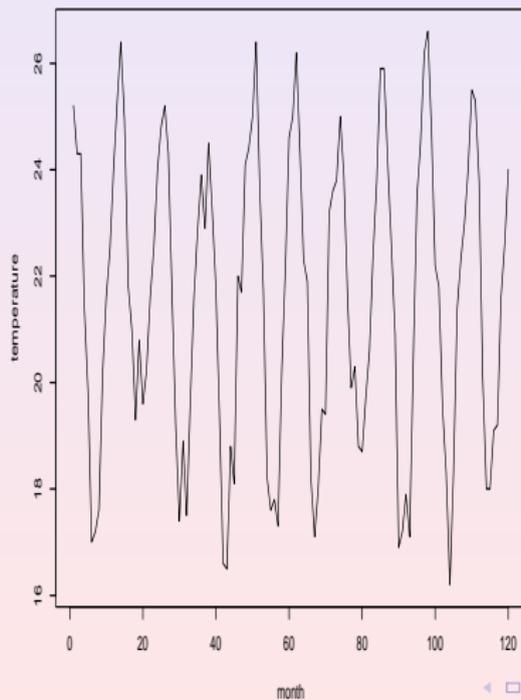
$$s_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t^2 = [a_0^{(N)}]^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N/2} [r_j^{(N)}]^2.$$

Exemplo de AF

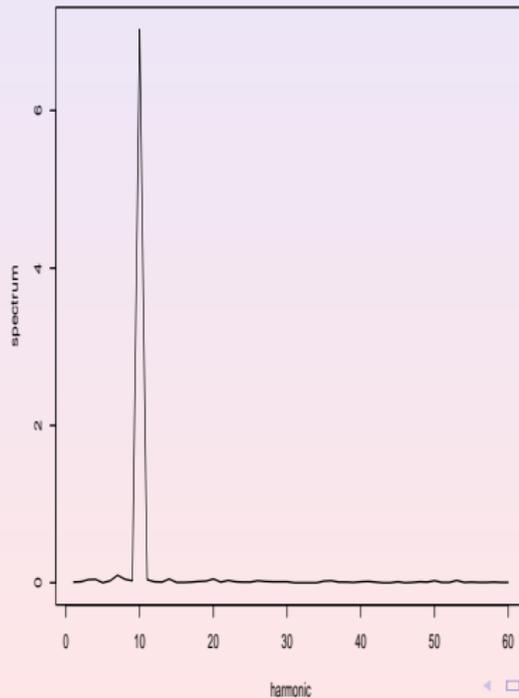
A Figura 3 mostra o **espectro (de linhas) de Fourier**, $(n \times [r_n^{(N)}]^2/2)$. O valor 7,03 corresponde ao harmônico $n = 10$, responsável por mais de 88% da variância total. Esse harmônico corresponde à periodicidade de 12 meses. Segue-se que um modelo conveniente para a série é

$$X_t = 21,532 + 3,652 \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) + 0,851 \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right) + \varepsilon_t.$$

Exemplo de AF



Exemplo de AF



Exemplo de AF

Tabela 1: Análise de Fourier da série de temperaturas de Cananéia, SP de janeiro de 1976 a dezembro de 1985.

n	$a_n^{(T)}$	$b_n^{(T)}$	$r_n^{(T)}$
0	21,5317	-	21,3517
1	0,1257	-0,0565	0,1378
4	-0,1575	-0,2458	0,2919
7	0,0738	-0,4317	0,4380
10	3,6522	0,8507	3,7500
15	-0,0433	-0,0406	0,0594
27	-0,0229	-0,1717	0,1732
35	-0,2030	-0,0656	0,2133
50	-0,1439	-0,1857	0,2349
55	0,0616	-0,0967	0,1146

Sunspots

Na Figura 4, temos representada a série de manchas solares de Wolf, consistindo de observações anuais de 1749 a 1924. As manchas solares são observadas diariamente (na realidade, cada número diário é uma média ponderada de medidas feitas em diversas estações) e cada observação representa o número de manchas (*spots*) visíveis na face do Sol e o número de grupos nos quais elas se agrupam. Para uma descrição completa, veja Vidakovic (1999, pag. 282).

Note que existe certa regularidade na série, não tão evidente como na série de marés. Os vales estão mais ou menos alinhados, mas os picos têm amplitudes variáveis e as distâncias entre eles também são variáveis. Este é um exemplo de uma série temporal não linear e assimétrica. Essa série tem sido objeto de muitas análises, pois a atividade solar influencia um grande número de fenômenos físicos que ocorrem na Terra, em diferentes escalas. Veja, por exemplo, Bloomfield (2000) e Morettin *et al.* (1993).

Sunspots

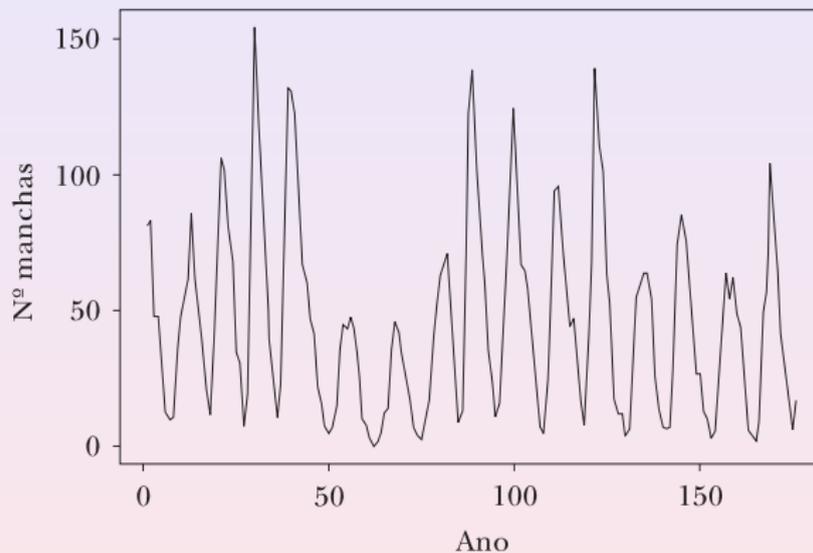


Figura 4: Série de manchas solares de Wolf.

Série AR(1) simulada

A Figura 5 apresenta 200 valores de uma série simulada pelo modelo

$$X_t = 0,8X_{t-1} + \epsilon_t,$$

onde ϵ_t são v.a. independentes, normais, com média zero e variância um.
É um modelo autorregressivo de ordem um.

Série AR(1) simulada

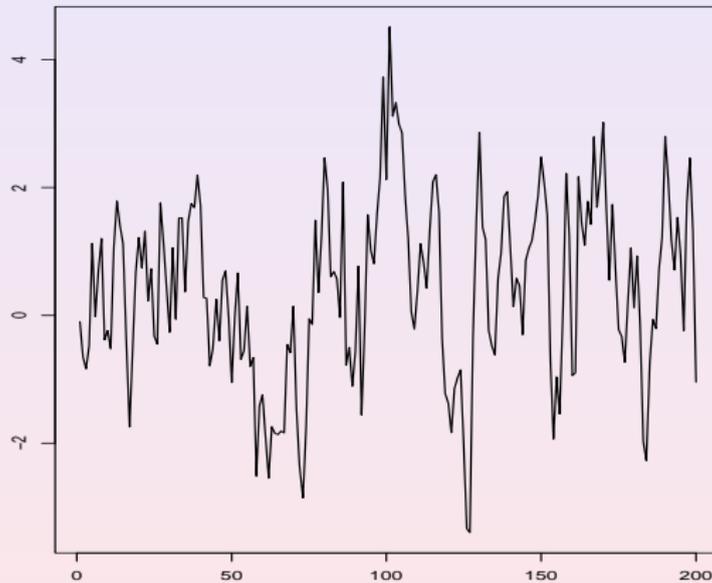


Figura 5: Valores simulados de um modelo $AR(1)$.

Precipitações em Fortaleza

A Figura 6 mostra a série de precipitações atmosféricas de Fortaleza, CE, de 1849 a 1997, totalizando 149 observações anuais.

Essa série também tem despertado grande interesse, tendo sido analisada por vários autores dentre os quais Girardi e Teixeira (1978), Markam (1974), Jones e Kearns (1976), Morettin *et al.* (1985) e Morettin *et al.* (1993).

A série é bastante irregular, não sugerindo a existência de possíveis periodicidades ou tendências. Veja também Harvey e Souza (1987) e Harvey (1989).

Na figura, apresentamos também uma curva suave ajustada por um procedimento robusto, denominado *Lowess*. Essa curva dá a tendência da série, à medida que o tempo evolui.

Estados de sono de crianças

A Figura 7 apresenta a série de estados de sono de um recém-nascido cuja mãe não ingeriu bebida alcoólica durante a gravidez (brevemente, “não exposto”). Esta é uma série temporal categorizada, sendo que os estados são categorizados, a cada minuto, da seguinte maneira:

- 1: sono tranquilo – *trace alternant*;
- 2: sono tranquilo – *high-voltage*;
- 3: sono indeterminado;
- 4: sono ativo – *low-voltage*;
- 5: sono ativo – *mixed*;
- 6: acordado.

Estados de sono de crianças

Na Figura 7, apresentamos também a série de estados de sono de um recém-nascido cuja mãe ingeriu bebida alcoólica moderadamente durante a gravidez (“exposto”). Ambas as séries consistem de 128 dados, observados a cada minuto. Essas séries são parte de um conjunto maior de dados analisados por Stoffer *et al* (1988), com o objetivo de estudar os efeitos do consumo moderado de álcool, por parte das mães, sobre os padrões de sono dos recém-nascidos.

Andromeda

A Figura 8 mostra $n = 256$ magnitudes da estrela variável (cefeida) RU Andromeda. Os dados foram obtidos da American Association of Variable Star Observers (AAVSO) International Database em www.aavso.org (veja Sardy et al., 1999). As observações são obtidas em instantes de tempo irregularmente espaçadas, devido a diversos fatores, inclusive bloqueio da estrela pelo Sol, condições meteorológicas e disponibilidade de uso de telescópio. Algum tratamento dos dados foi feita, por exemplo substituir observações múltiplas na mesma data pelo seu valor mediano. As observações vão do Dia Juliano 2.440.043 a 2.441.592 (5/07/1968 a 01/10/1972).

Andromeda

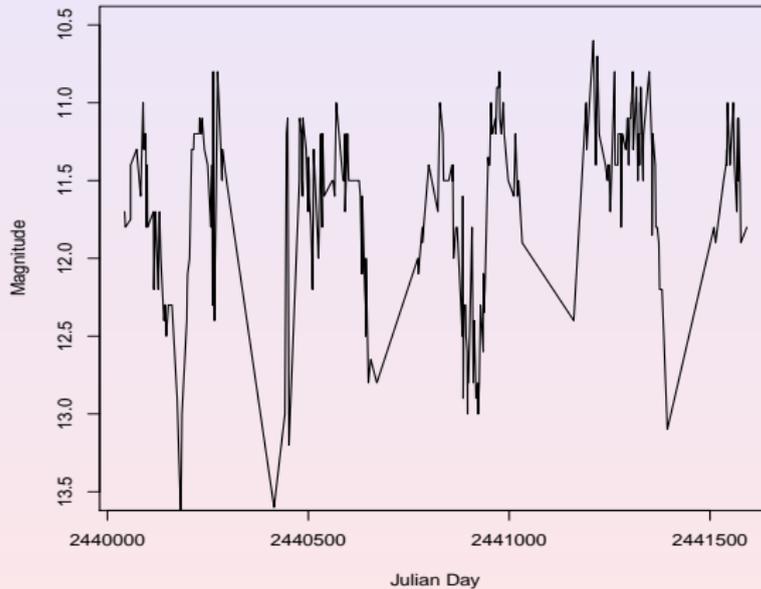


Figura 8: Magnitudes da estrela variável RU Andromeda.

Referências

Bloomfield, P. (2004). *Fourier Analysis of Time Series*. Wiley.

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.