

MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
<http://www.ime.usp.br/~pam>

Aula 10

27 de setembro de 2021

Sumário

- 1 Estimadores espectrais autorregressivos
- 2 Estimadores de máxima entropia

Introdução

1. A aplicação de modelos autorregressivos na análise espectral foi sugerida por Parzen (1969). Estimadores equivalentes, baseados no princípio da máxima entropia, foram considerados independentemente por Burg (1967, 1975). Estimadores espectrais autoregressivos (EEAR) produzem estimadores que são mais suaves que os estimadores espectrais considerados nas seções anteriores e com maior resolução. Veja Jones (1974) e Makhoul (1975) para mais detalhes sobre esse tópico.
2. A ideia básica é considerar um modelo AR(p)

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

ajustado a observações X_1, \dots, X_T de um process estacionário $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, com espectro $f(\lambda)$.

3. Em (1), ϕ_0, \dots, ϕ_p são parâmetros reais e $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$. Sabemos que o espectro desse processo é dado por

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j}|^2}, \quad -\pi < \lambda < \pi. \quad (2)$$

1. O EEAR sugerido por Parzen é

$$\hat{f}_p(\lambda) = \frac{S_p^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j e^{-i\lambda j}|^2}, \quad -\pi < \lambda < \pi, \quad (3)$$

na qual S_p^2 é um estimador de momentos da variância do erro, σ^2 .

2. O estimador dessa variância é dado por

$$S_p^2 = c_0 - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j c_j, \quad (4)$$

e $\hat{\phi}_j$ são os estimadores de Yule-Walker dos coeficientes.

3. Em (4) os c_j são as autocovariâncias amostrais e c_0 é a variância amostral.

1. O racional da proposta é que todo processo fracamente estacionário, não determinístico, pode ser aproximado por um processo autorregressivo de ordem p suficientemente grande. Uma questão importante é a determinação da ordem p , mas isso foi exaustivamente tratado na literatura, e vários procedimentos podem ser utilizados para esse fim.
2. Mencionamos os critérios de informação AIC e BIC, que para o caso de um modelo AR(p) ficam

$$\text{AIC}(p) = \log S_p^2 + 2p/T,$$

$$\text{BIC}(p) = \log S_p^2 + p \log T/T,$$

sendo T o número de observações, e esses devem ser calculados para $p \leq P$, com P grande. A ideia é escolher o valor de p que minimiza AIC ou BIC. Outros critérios foram sugeridos e mencionamos FPE (Akaike, 1969), CAT (Parzen, 1979) e HQ (Hannan and Quinn, 1979).

3. Determinada a ordem p , os parâmetros podem ser estimados pelo método sugerido acima, por máxima verossimilhança ou mínimos quadrados. Para detalhes, o leitor deve consultar Brockwell e Davis (1991) ou Morettin e Toloí (2018). Usando resultados de Anderson e Walker (1964) e sob condições apropriadas sobre ε_t e o processo, pode ser provado que os estimadores de Yule-Walker, $\hat{\phi}_j$, são assintoticamente normais.

1. No que se refere às propriedades dos EEAR, Berk (1974) provou que eles são consistentes e assintoticamente normais. Resultados similares foram obtidos por Kromer (1969). Especificamente, os seguintes resultados são válidos.
2. **Teorema 1.** (Berk, 1974). *Suponha que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, sendo ε_t ruído branco com média zero e variância σ^2 . Suponha que*

$$\Psi(z) = 1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots = \frac{1}{\Phi(z)},$$

na qual $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots$ é não nula para $|z| < 1$. Suponha, também, que:

- (i) $\Phi(e^{i\lambda})$ é não nula, $-\pi < \lambda < \pi$;
- (ii) $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, para todo t ;
- (iii) $p^3/T \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow \infty$;
- (iv) $p^{1/2}(|\phi_{p+1}| + |\phi_{p+2}| + \dots) \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow \infty$.

Então, quando $T \rightarrow \infty$, $\hat{f}_p(\lambda)$ converge para $f(\lambda)$ em probabilidade.

1. Suponha, agora, que as suposições do Teorema 1 sejam válidas, exceto se substituirmos (i) pela suposição que a densidade espectral $(\sigma^2/2\pi)|\Psi(e^{i\lambda})|^2 > 0$. Então, temos o seguinte resultado.
2. **Teorema 2.** (Berk, 1974) *As variáveis aleatórias $\sqrt{p/T}(\hat{f}_p(\lambda_j) - f(\lambda_j))$, para $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p < \pi$, são assintoticamente independentes e normalmente distribuídas, com médias nulas e variâncias $2f^2(\lambda_j)$. Para $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pi$, a distribuição assintótica é normal, com média zero e variância $4f^2(0)$ ou $4f^2(\pi)$, respectivamente.*
3. Os teoremas mostram que, se a ordem p é assintoticamente suficiente para eliminar o viés, a autoregressão conduz a um estimador consistente da densidade espectral de X_t . Além disso, os estimadores são assintoticamente normais e independentes, para frequências fixas e diferentes, e a variância assintótica é a mesma que a do periodograma. Veja abaixo para uma discussão dos estimadores de Burg.

Exemplo

1. Vamos considerar o logaritmo da série de lincas canadenses. Essa série foi extensivamente analisada no passado, para uma resenha veja Campbell and Walker (1977). A série fornece o número desses animais aprisionados durante $T = 114$ anos, de 1821 a 1934, e seu gráfico está na Figura 1. Devido a sua aparente pseudo-periodicidade, um modelo AR(2) foi sugerido para descrever os dados.
2. Em nosso caso, um modelo autorregressivo de ordem 11 foi escolhido de acordo com o critério AIC e o modelo estimado (ajustado para a média) resultou

$$\begin{aligned} X_t = & 1,130X_{t-1} - 0,517X_{t-2} + 0,275X_{t-3} - 0,308X_{t-4} + \\ & + 0,176X_{t-5} - 0,184X_{t-6} + 0,079X_{t-7} - 0,030X_{t-8} + \\ & + 0,130X_{t-9} + 0,224X_{t-10} - 0,327X_{t-11} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

sendo a variância residual estimada $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0,037$.

3. A densidade espectral estimada está na Figura 2. Compare com o periodograma na Figura 3. Nota-se um período de aproximadamente 10 anos.

Exemplo

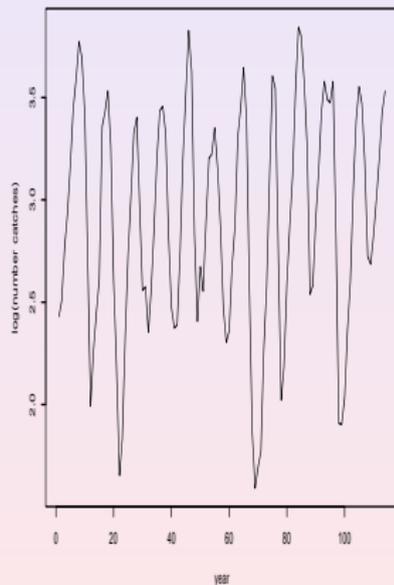


Figura 1: Logaritmo da série de lincas.

Exemplo

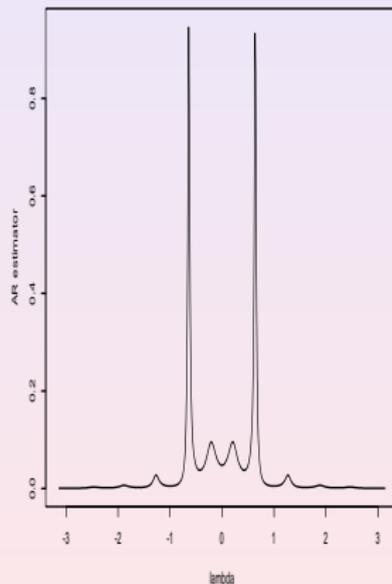


Figura 2: Estimador espectral autorregressivo para a série de lincas.

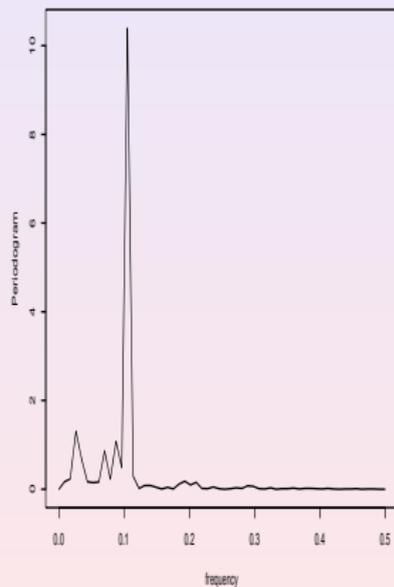


Figura 3: Periodograma para a série de lincs.

1. O método de máxima entropia (MME) da análise espectral foi proposto por Burg (1967, 1975), juntamente com um procedimento para o cálculo dos coeficientes de um preditor linear.
2. A obtenção de um estimador, pelo MME, do espectro de um processo estacionário, uniformemente amostrado, é feita maximizando-se a entropia do processo. Primeiramente, vamos introduzir algumas noções sobre informação e entropia.
3. Considere a situação na qual podem ocorrer M saídas de um sistema, a saber, X_1, \dots, X_M , com probabilidades p_1, \dots, p_M . A probabilidade de ocorrência da saída X_i está relacionada com a informação que temos sobre ela. Esta informação é definida por $I = \log_2(1/p_i)$.
4. Suponha que o sistema seja observado por um longo período de tempo, T . Então, esperamos que a saída X_i ocorra $p_i T$ vezes, $i = 1, \dots, M$. A informação total sobre o sistema será

$$I_{\text{total}} = \sum_{i=1}^M p_i T \log_2(1/p_i).$$

5. A entropia H do sistema é definida por (Shannon, 1948)

$$H = \frac{I_{\text{total}}}{T} = - \sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i.$$

1. É razoável supor que a entropia é uma medida da incerteza descrita por um conjunto de probabilidades e é sempre positiva (com exceção do caso em que todas as $p_i = 0$, exceto para uma que é igual a um, de modo que não há incerteza). Portanto, entropia é uma medida da desordem de um sistema.
2. Suponha, agora, que o processo X_t sob consideração seja estacionário, com densidade espectral $f(\lambda)$ e função de autocorrelação $\rho_k, k \in \mathbb{Z}$. Então, Smylie et al. (1973) mostraram que

$$H = \frac{1}{4\lambda_N} \int_{-\lambda_N/2\pi}^{\lambda_N/2\pi} \log f(\lambda) d\lambda, \quad (\text{A.8.2})$$

em que λ_N é a frequência de Nyquist.

3. Ou

$$H = \frac{1}{4\lambda_N} \int_{-\lambda_N/2\pi}^{\lambda_N/2\pi} \log \left[\sum_k \rho_k \exp\{-i\lambda k \Delta t\} \right] d\lambda, \quad (5)$$

na qual Δt é o intervalo de amostragem.

1. Maximizando (5) com respeito a ρ_k , com a restrição que $f(\lambda)$ é consistente com autocorrelações conhecidas, $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{M-1}$, obtemos o estimador da densidade espectral pelo MME, a saber,

$$f_{\text{ME}}(\lambda) = \frac{p_M}{\frac{\lambda_M}{2\pi} |1 + \sum_{j=1}^M \beta_j \exp\{-i\lambda j \Delta t\}|^2},$$

na qual p_M é uma constante e β_j são os coeficientes do erro de predição. Vemos que este é equivalente ao EEAR, dado em (3). A equivalência entre o MME e a representação autorregressiva de um processo estacionário, foi estabelecida por Van den Bos (1971).

2. Se X_t é dado por um AR(p), com $p = M$, então o filtro linear

$$\varepsilon_t = X_t - \sum_{i=1}^M \phi_i X_{t-i}$$

tem coeficientes $1, -\phi_1, \dots, -\phi_M$, que são identificados com $1, \beta_1, \dots, \beta_M$.

3. Burg (1967) sugeriu um método para estimar os coeficientes autorregressivos (ou os coeficientes do filtro), que não necessitam estimativas anteriores da f.a.c.v. A recursão de Burg é bastante similar ao algoritmo de Durbin–Levinson, usado para obter os estimadores de Yule-Walker. Para detalhes, veja os artigos mencionados acima e Morettin (1984).

Referências

- Berk, K. (1974). Consistent autoregressive spectral estimates. *The Annals of Statistics*, **2**, 489–502.
- Brillinger, D. R. (1981). *Time Series: Data Analysis and Theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- Burg, J. P. (1967). Maximum entropy spectral analysis. Paper presented at the 37th. Annual Intern. Meeting, Soc. of Explor. Geophysics, Oklahoma City, October.
- Morettin, P. A. (1984). The Levinson algorithm and its applications in time series analysis. *International Statistical Revue*, **52**, 83–92.
- Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Referências

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. São Paulo: Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.

Shannon, C. E. (1948). A Mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal, n. 27, pp. 379-423.

Smylie, D. E.; Clarke, G. K. C. and Ulrych, T. J. (1973). Analysis of irregularities in the Earth's rotation". In: Alder, B.; Fernbach, S.; Rotenberg, M. (eds.). *Methods in Computational Physics*. New York, Academic Press, 1973, vol. 13, pp. 391-430.

Yaglom, A. M. (1962). *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.