

MAT2464 - Cálculo II - IMEUSP
Lista 2 de Exercícios - 2º semestre de 2025
 Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

* **Limite (definição).** Sejam $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, um vetor $L \in \mathbb{R}^n$, e $t_0 \in [a, b]$.

Dizemos que $F(t)$ *tende a* L quando t *tende a* t_0 , se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que: para todo $t \in [a, b]$ temos

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |F(t) - L| < \epsilon.$$

[Isto é, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, com $t \neq t_0$, temos $|F(t) - L| < \epsilon$.]

Nomenclatura e notação. Dizemos que F é uma função a várias variáveis reais e indicamos o limite por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L.$$

* **Teorema.** Sejam $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, um ponto $t_0 \in [a, b]$ e um vetor $L \in \mathbb{R}^n$. Então temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0.$$

* **Teorema.** Consideremos uma função $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, um vetor $L = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, e um ponto $t_0 \in [a, b]$. Então temos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} F_1(t) = L_1, \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} F_n(t) = L_n. \end{cases}$$

Prova (ideia central). Vide figura, com duas hipotenusas. Cada cateto mede menos que a hipotenusa e esta menos que a soma das medidas dos catetos.

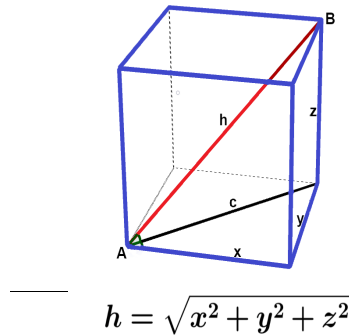


Figura 1: Hipotenusa e catetos: $\max\{x, y, z\} \leq h \leq x + y + z$

* **Produto escalar e limites.** [Exemplo 3, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed., p. 126]
 Sejam $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\vec{G} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas funções vetoriais. Em coordenadas,

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) \text{ e } \vec{G} = (G_1, \dots, G_n).$$

Suponhamos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = \vec{b} = (b_1, \dots, b_n).$$

Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

* **Continuidade.** Dizemos que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $t_0 \in [a, b]$ se e só se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

1. [Exercícios 7.4 – 1(c), Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Calcule

$$\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t), \quad \text{onde } \vec{r}(t) = \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} \vec{i} + \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t - 2} \vec{j} + 2t \vec{k}.$$

2. [Exercícios 7.4 - 3, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a) $\vec{F}(t) = t \vec{i} + \sqrt{t} \vec{j} + 3 \vec{k}.$

b) $\vec{F}(t) = \sqrt{t-1} \vec{i} + \sqrt{t+1} \vec{j} + e^t \vec{k}.$

3. [Exercícios 7.4 - 4, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Consideremos a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e as funções vetoriais $\vec{F}, \vec{G} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 Suponhamos que as três funções são contínuas no ponto $t_0 \in [a, b]$. Prove que

$$\vec{F} + \vec{G}, \quad f \vec{F} \quad \text{e} \quad \vec{F} \cdot \vec{G}$$

são contínuas no ponto t_0 .

Se $n = 3$, mostre que também $\vec{F} \times \vec{G}$ é contínua em t_0 .

- * **Derivada (definição).** Consideremos $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $t_0 \in [a, b]$.
A derivada de F em t_0 é

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0},$$

se tal limite existir. [Nas extremidades a e b , a derivada é a *derivada lateral*.]

Nomenclatura e notação. Se F admite derivada em t_0 , dizemos que F é *derivável* ou *diferenciável* em t_0 . Dizemos que F *derivável* ou *diferenciável*, se o for em cada ponto de seu domínio. Escrevemos também

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = F'(t_0).$$

- * **Teorema.** Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um ponto $t_0 \in [a, b]$.
Então, F é derivável em t_0 se e só suas componentes o são. Neste caso, temos

$$F'(t_0) = (F'_1(t_0), F'_2(t_0), \dots, F'_n(t_0)).$$

Prova. Segue do teorema já enunciado sobre limites (a existência do limite, e respectivo valor, são verificáveis componente a componente).

- * **Vetor Tangente e Reta Tangente.** Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em t_0 , com

$$\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Dizemos que $\frac{dF}{dt}(t_0)$ é um *vetor tangente* à trajetória da curva F , no ponto $F(t_0)$.
A reta

$$X = F(t_0) + \lambda \frac{dF}{dt}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

é a *reta tangente* à trajetória de F no ponto $F(t_0)$.

- * **Derivação e produto escalar, produto interno, e produto vetorial.** Consideremos $\vec{F}, \vec{G} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, as três deriváveis. Então,

$$f \cdot \vec{F}, \quad \vec{F} \cdot \vec{G} \quad \text{e, se } n = 3, \quad \vec{F} \times \vec{G}$$

são deriváveis. Ainda mais, valem as regras operatórias

$$\text{a) } \frac{d}{dt}(f \cdot \vec{F}) = \frac{df}{dt} \cdot \vec{F} + f \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}.$$

$$\text{b) } \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}.$$

$$\text{c) } \frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt}.$$

* **Integral (definição).** Consideremos uma função vetorial $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ e uma escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ arbitrária, dita subordinada à partição $\mathcal{P}$, e satisfazendo $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Escrevemos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, para cada $i = 1, \dots, n$. A norma da partição $\mathcal{P}$ é dada pelo número $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$.

A integral de $\vec{F}$ é definida por

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(c_i) \Delta t_i,$$

se tal limite existir, independentemente da escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $\mathcal{P}$.

* **Teorema.** Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então, $\mathcal{F}$ é integrável em $[a, b]$ se e só se cada componente de F é integrável em $[a, b]$. Neste caso, temos

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \left(\int_a^b F_1(t) dt, \int_a^b F_2(t) dt, \dots, \int_a^b F_n(t) dt \right).$$

* **Comprimento de Curva (definição).** Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em todo ponto. O comprimento de γ é o número

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

=====

4. [Exercícios 7.5 - 1, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Calcule as derivadas $\frac{d\vec{F}}{dt}$ e $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$.

a) $\vec{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2 + 1)).$

b) $\vec{F}(t) = \sqrt[3]{t^2} \vec{i} + \cos t^2 \vec{j} + 3t \vec{k}.$

c) $\vec{F}(t) = \sin 5t \vec{i} + \cos 4t \vec{j} - e^{-2t} \vec{k}.$

5. [Exercícios 7.5 - 2, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Determine a equação da reta tangente à trajetória da função, no ponto dado.

a) $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $G(t) = (t^2, t)$ e $G(1)$

c) $F(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2\right)$ e $F(2)$

d) $F(t) = (t, t^2, t, t^2)$ e $F(1)$

6. [Exercícios 7.5 - 9, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Suponha $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$ para todo t . Faça

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}, \text{ onde } v(t) = \|\vec{v}(t)\|.$$

Prove que

(a) $\vec{T}$ e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

(b) $\frac{d\vec{v}}{dt} = v \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \vec{T}$.

7. [Exercícios 7.6 - 1, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Calcule.

a) $\int_0^1 (t \vec{i} + e^t \vec{j}) dt$

b) $\int_{-1}^1 \left[\sin 3t \vec{i} + \frac{1}{1+t^2} \vec{j} + \vec{k} \right] dt$

c) $\int_1^2 (3 \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}) dt$

8. [Exercícios 7.7 - 1, Guidorizzi, Vol 2., 5ª ed.]

Calcule o comprimento da curva dada.

a) $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), t \in [0, 2\pi]$

b) $\gamma(t) = (2t - 1, t + 1), t \in [1, 2]$

c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t}), t \in [0, \pi]$

d) $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \in [0, 1]$

e) $\gamma(t) = (t, \ln t), t \in [1, e]$

f) $\gamma(t) = (1 - \cos t, t - \sin t), t \in [0, \pi]$

g) $\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \right), t \in [-1, 0]$