**CÔNICAS** - MAT 2464 - Cálculo II

Segundo semestre de 2025

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

[ `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ele-conicas.pdf` ]

No plano euclidiano consideremos dois pontos **(focos)** distintos $F_1$ e $F_2$.

## ELIPSE

(1) Se $2a$ é um comprimento fixo e maior que a distância entre $F_1$ e $F_2$, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é $2a$ é uma elipse.

A equação padrão da elipse é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

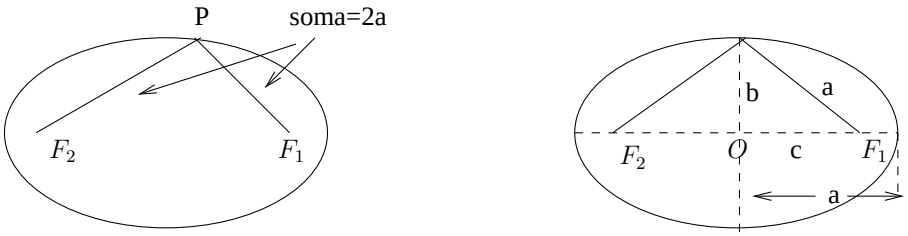


Figura 1: Desenho de uma elipse no plano euclidiano (à esquerda). Desenho de uma elipse no plano cartesiano (à direita).

**Prova.**

Seja $s$ a reta pelos focos (desenhe) e $O$ o ponto médio entre os focos.

Trace por $O$ a reta $t$, perpendicular a $s$ e mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Só há 2 pontos em $t$ com soma das distâncias a $F_1$ e $F_2$ igual a $2a$ (ambos distam $a$ de cada foco) e simétricos em relação à reta $s$ (contém os focos).

Por semelhança de triângulos é fácil ver que se $P$ é um ponto da elipse, então o ponto $P'$, o simétrico de $P$ em relação à reta $s$, também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a $s$.

Para o mesmo $P$, temos que o ponto $P''$, simétrico de $P$ em relação à reta $t$ (perpendicular ao segmento $\overline{F_1F_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias aos focos $F_1$ e $F_2$ é $2a$.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares ($t$ e $s$) e um centro natural. Para desenhá-la, escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxy$ tal que $Ox$, o eixo $x$, corresponda à reta $t$, $Oy$ à reta $s$ e adotemos $O$, o ponto médio entre os focos, como a origem. Assim $O = (0, 0)$.

Nesse sistema temos os seguintes elementos para uma elipse (vide figura):

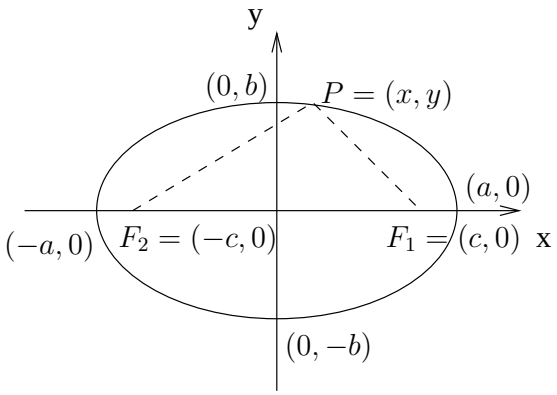


Figura 2: Focos, Vértices e Polos - Elipse

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$.
- Polos: $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, com $b > 0$.
- Eixo maior: $\overline{A_1A_2}$.
- Eixo-menor: $\overline{B_1B_2}$.
- Semi-eixo maior é o número $a$.
- Semi-eixo menor é o número $b$.
- Distância focal é o número $2c$.
- Semi-distância focal é o número $c$.
- Excentricidade é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo maior}} < 1$.

É claro que temos os comprimentos $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_2F_2}| = a$. Donde segue

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2.$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a.$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2+y^2 = (2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois $|\overline{PF_2}| = 2a - |\overline{PF_1}|$.

O quadrado das equações (3) e (4) fornecem as equações

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 + y^2 = a^2 \ \mp 2cx \ + \ \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando,

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5).

Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

## HIPÉRBOLE

(2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos $F_1$ e $F_2$ é constante e igual a $2a$, onde $a > 0$, é uma hipérbole.

A equação padrão da hipérbole é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad a , b > 0 .$$

**Observação 1.**

Se um ponto $P$, no plano, forma um triângulo com os focos (isto é, $P$, $F_1$ e $F_2$ não colineares), pela desigualdade triangular temos $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$. Logo, $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$ e, analogamente, $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$. Assim,

$$| \, |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \, | < |\overline{F_1F_2}|.$$

A condição de existência da hipérbole é então: $2a < |\overline{F_1F_2}|$.

**Observação 2.**

Para um ponto $P$ na hipérbole temos

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \text{ ou } |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a.$$

Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \qquad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a .$$

O ramo direito (esquerdo) da hipérbole é obtido atribuindo o sinal $+$ $(-)$ na equação (H).

**Prova.**

Seja $Oxy$ um sistema de cooordenadas cartesianas com o eixo $x$ contendo o segmento $\overline{F_1F_2}$ e por eixo $y$ a reta mediatriz deste segmento. Vide figura na próxima página.

Supondo $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ ( $0 < a < c$ ) temos : $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ , $c > 0$.

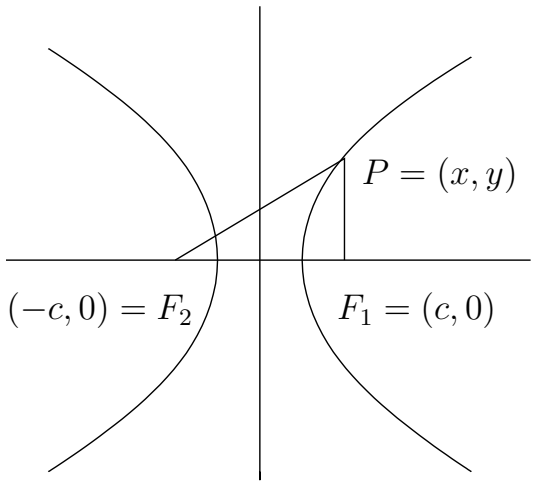


Figura 3: Hipérbole-Focos

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas cartesianas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \ .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e então elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 \ = \ [\, \pm 2a + |\overline{PF_1}| \,]^2 \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}| + (x-c)^2 + y^2 \ ,$$

donde

$$4cx \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}|$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| \ = \ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left( \frac{c}{a} x - a \right)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| \ = \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ = \ \pm \left( \frac{c}{a} x + a \right) \ ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$. Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da hipérbole e o negativo ao ramo esquerdo.

Os quadrados destas equações (2) e (3) fornecem

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2,$$

que reduzimos a

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ou

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Pela condição de existência, $0 < a < c$, temos $c^2 - a^2 > 0$ e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2$$

[vide triângulo retângulo de catetos $a$ e $b$ e hipotenusa $c$ na Figura 3 a seguir] e substituindo em (4) encontramos

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

**Elementos de uma hipérbole.**

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Centro: o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- Vértices: $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, com $a > 0$.
- Eixo real: o segmento $\overline{A_1A_2}$ e, também, o comprimento, $2a$, deste segmento.
- Semi-eixo real: o número $a$.
- Eixo principal: a reta contendo os focos e o eixo real.
- Eixo transverso ou imaginário ou conjugado: a reta mediatriz de eixo real.
- Distância focal: o número $2c = |\overline{F_1F_2}|$.
- Semi-distância focal: o número $c$.

- Semi-eixo transverso: o número $b > 0$ definido pela relação $b^2 = c^2 - a^2$.
- Assíntotas: as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
- Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo real}} > 1$.

Note também o triângulo retângulo de vértices em $(0,0)$, $(a,0)$ e $(a,b)$.

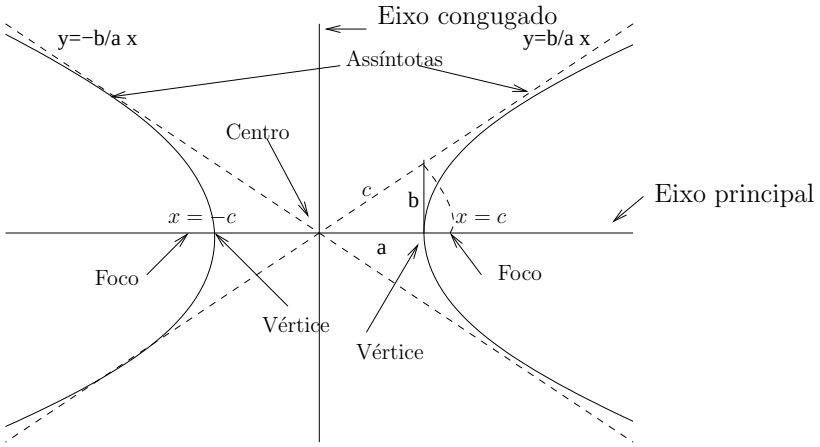


Figura 4: Elementos da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A figura abaixo destaca o *retângulo fundamental para hipérboles*.

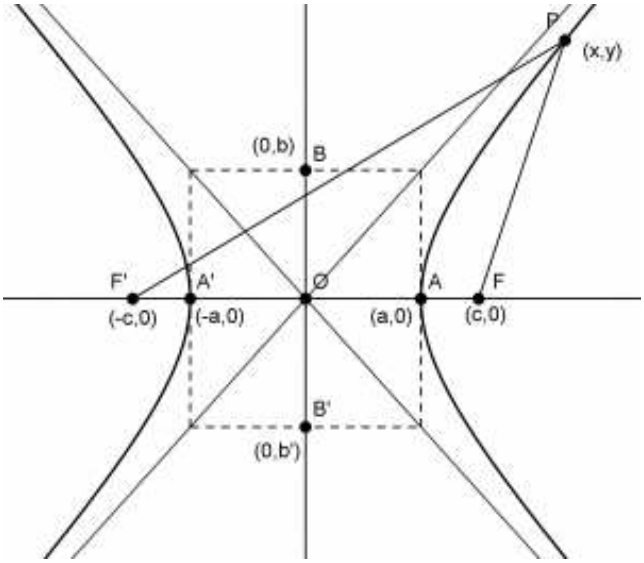


Figura 5: Retângulo fundamental e assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

## HIPÉRBOLE X CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos a circunferência fundamental e a hipérbole fundamental, dadas respectivamente por

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 - y^2 = 1.$$

Sabemos que podemos dar as coordenadas (polares) de um ponto $P = (x, y)$ da circunferência através das funções $\cos\theta$ e $\sin\theta$, onde $\theta$ é o ângulo que o segmento $\overline{OP}$ forma com o eixo $Ox$.

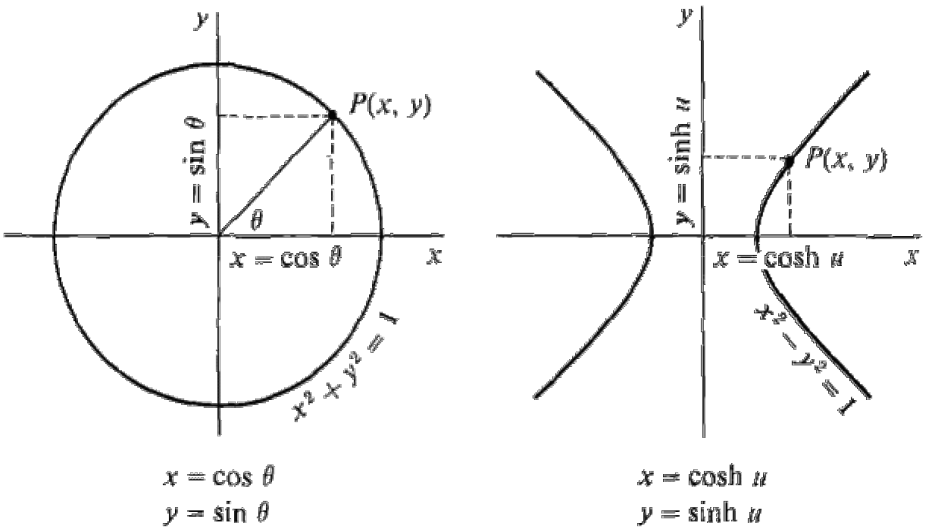


Figura 6: Coordenadas polares X Coordenadas hiperbólicas

Analogamente, consideremos um ponto $P = (x, y)$ no ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Donde segue $x \geq 1$ e $y \in (-\infty, +\infty)$.

A função seno hiperbólico é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e então existe um único número real $u$ tal que

$$\operatorname{sinh}(u) = y.$$

Então, pela conhecida relação $\cosh^2 u - \operatorname{sinh}^2 u = 1$, e sabendo que a função cosseno hiperbólico somene assume valores maiores ou iguais a 1, concluímos que

$$\cosh(u) = x.$$

Sabemos também que área do setor circular compreendido entre o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cos x, \sin x)$ [tal setor é determinado pelo arco de circunferência unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cos x, \sin x)$ e medindo $x$ rad], é

$$\frac{x}{2}.$$

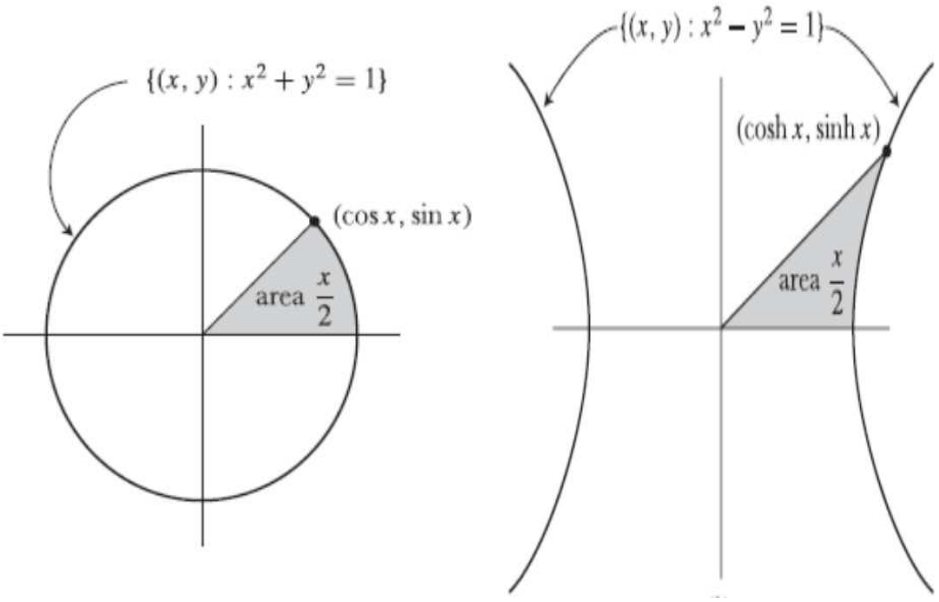


Figura 7: Área do setor circular X área do setor hiperbólico

Analogamente, pode ser mostrado (utilizando cálculo integral) que as hipérboles satisfazem a propriedade descrita a seguir.

A área do setor hiperbólico (vide figura acima) compreendido entre a curva hiperbólica, o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cosh x, \sinh\, x)$, onde

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

[tal setor é determinado pelo arco de hipérbole unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cosh x, \sinh\, x)$], é

$$\frac{x}{2}.$$

Sobre as funções seno e cosseno hiperbólicos, temos a relação hiperbólica fundamentel

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Ainda mais, a função $\cosh x$ é par, a função $\sinh x$ é ímpar e valem as relações

$$\begin{cases} \cosh'(x) = \sinh(x) \\ \sinh'(x) = \cosh(x). \end{cases}$$

Seus gráficos tem o aspecto abaixo.

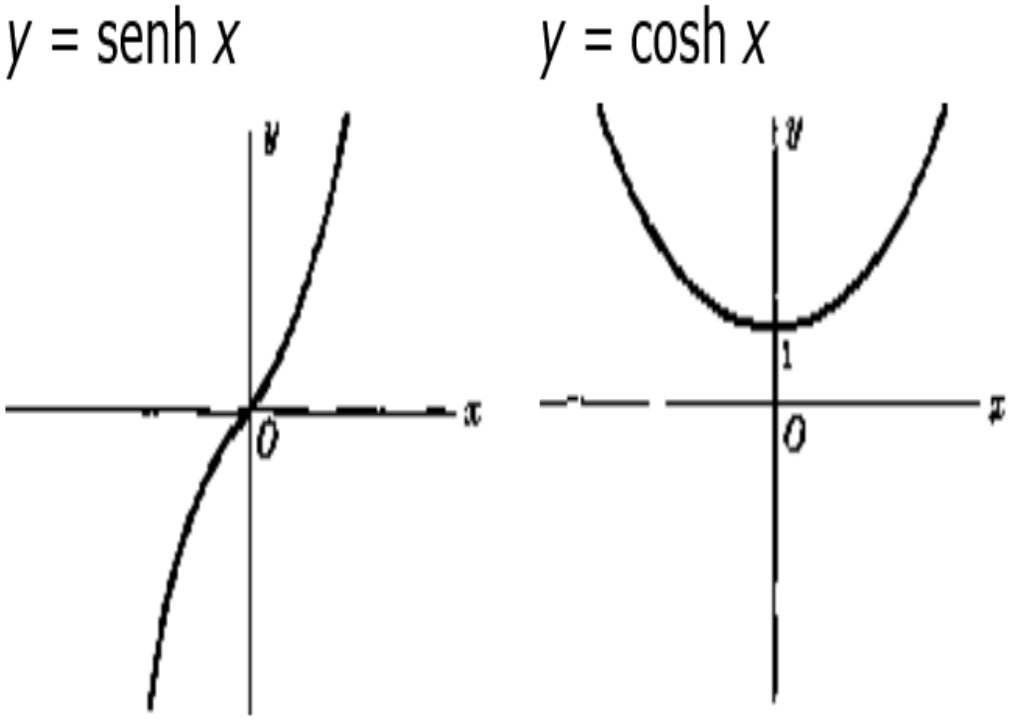


Figura 8: Gráficos do seno hiperbólico e do cosseno hiperbólico

**Cálculo da Área Hachurada do Setor Hiperbólico na Figura 7.**

Seja *área*$(H)$ a área geométrica hachurada do setor hiperbólico na Figura 7. O valor numérico desta área corresponde à área de um triângulo retângulo subtraída a área abaixo do ramo da hipérbole $v = \sqrt{u^2 - 1}$ (no sistema cartesiano $Ouv$), com $u$ restrita ao intervalo $[1, \cosh x]$, onde $x \geq 0$, e acima do eixo $Ou$. Temos,

$$\textit{área}(H) = \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} - \int_1^{\cosh x} \sqrt{u^2 - 1} du.$$

Achemos uma primitiva para a função $u \mapsto \sqrt{u^2 - 1}$, onde $u \in [1, +\infty)$. Temos, para a substituição $u = \sec\theta$, onde $\theta \in [0, \pi/2)$, as identidades

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{u^2 - 1}\, du \quad &= \quad \int \sqrt{\sec^2\theta - 1}\, \sec\theta \tan\theta\, d\theta \\
&= \quad \int \sqrt{\tan^2\theta}\, \sec\theta \tan\theta\, d\theta \\
&= \quad \int (\sec\theta \tan^2\theta)\, d\theta \\
&= \quad \int (\sec\theta \tan\theta) \tan\theta\, d\theta \\
&=^{\substack{f'=\sec\theta\tan\theta,\ g=\tan\theta \\ f=\sec\theta,\ g'=\sec^2\theta}} \quad \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \quad \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Da terceira e da última das identidades imediatamente acima segue

$$\int (\sec\theta \tan^2\theta)\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta\, d\theta.$$

Logo, sabendo que $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ é uma primitiva de $\sec\theta$ obtemos

$$2\int (\sec\theta \tan^2\theta)\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1,$$

onde $C_1$ é uma constante real arbitrária. Donde segue, com $C_2$ uma constante real arbitrária,

$$\int (\sec\theta \tan^2\theta)\, d\theta = \frac{\sec\theta\tan\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta|}{2} + C_2.$$

Retornando à variável $u \geq 1$, com $u = \sec\theta$ e então $\tan\theta = \sqrt{u^2-1}$, obtemos

$$\int \sqrt{u^2-1}du = \frac{u\sqrt{u^2-1} - \ln(u+\sqrt{u^2-1})}{2} + C_2.$$

Assim, a área procurado do setor hiperbólico é

$$\begin{aligned}
\textit{área}(H) &= \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} - \int_1^{\cosh x} \sqrt{u^2-1}du \\
&= \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} - \left[\frac{u\sqrt{u^2-1} - \ln(u+\sqrt{u^2-1})}{2}\right]_{u=1}^{u=\cosh x} \\
&= \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} \\
&\quad - \frac{\cosh x\sqrt{\cosh^2 x - 1} - \ln\left(\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}\right)}{2} \\
&= \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} - \frac{\cosh x\sqrt{\operatorname{senh}^2 x} - \ln\left(\cosh x + \sqrt{\operatorname{senh}^2 x}\right)}{2} \\
&= \frac{(\cosh x)(\sinh x)}{2} - \frac{(\cosh x)(\operatorname{senh} x) - \ln(\cosh x + \operatorname{senh} x)}{2} \\
&= \frac{\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x)}{2} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}{2} \\
&= \frac{\ln(e^x)}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos então

$$\textit{área}(H) = \frac{x}{2} \quad \blacksquare$$

## PARÁBOLA

(3) Fixados no plano euclidiano, um ponto $F$ (foco) e uma reta $d$ (reta diretriz), com $F \notin d$, o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias ao foco $F$ e à reta diretriz $d$ são iguais é uma parábola.

A equação padrão da parábola é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 = 4py, \text{ onde } p > 0.$$

**Observação.**

A parábola é simétrica em relação à reta pelo foco $F$ e perpendicular à diretriz $d$. Esta reta pelo foco éo eixo de simetria da parábola. O ponto médio entre o foco $F$ e a projeção de $F$ sobre $d$ (isto é, o ponto equidistante entre o foco e a reta diretriz) é o ponto da parábola mais próximo de $d$ e é chamado vértice da parábola.

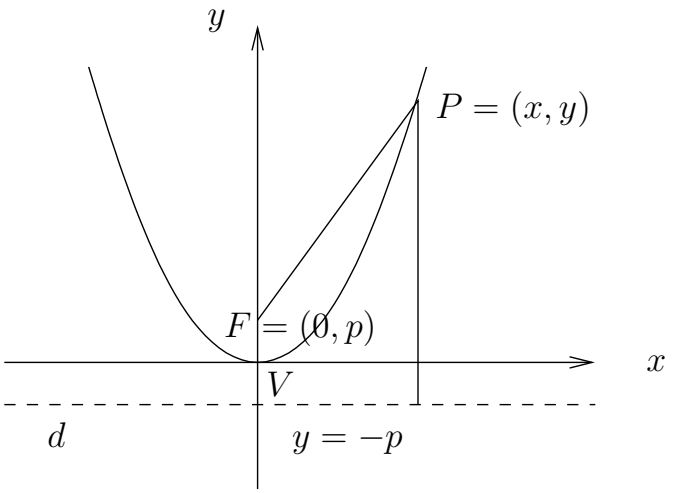


Figura 9: Parábola

**Prova.**

Seja $Oxy$ um sistema cartesiano de coordenadas tal que:

(i) o eixo $y$ corresponde ao eixo de simetria

(ii) a origem ao vértice,

(iii) o eixo $x$ à reta pela origem, paralela a $d$ e,

(iv) orientemos o eixo $y$ tal que $F = (0, p), p > 0$.

Assim, a equação da reta diretriz $d$ é dada por

$$y = -p.$$

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py \ .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

**Observação.**

A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

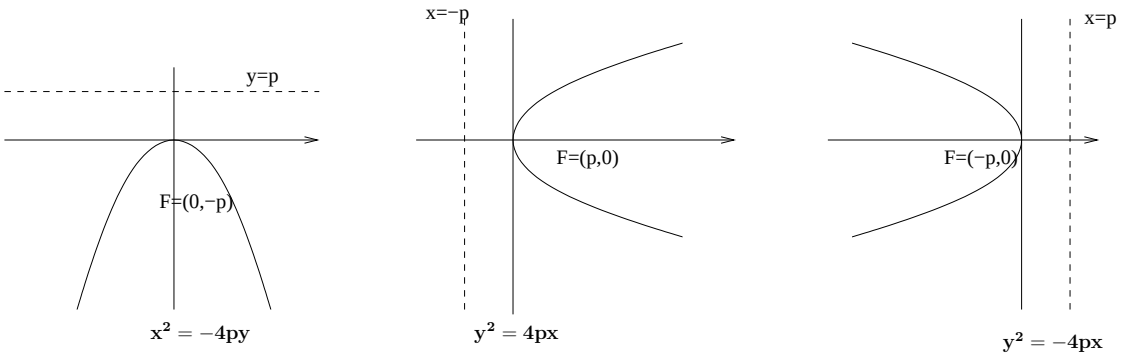


Figura 10: posições e equações - parábolas

## CÔNICAS (NO ESPAÇO) E ESTILOS DE LINGUAGEM. AS CÔNICAS NA *RETÓRICA* DE ARISTÓTELES

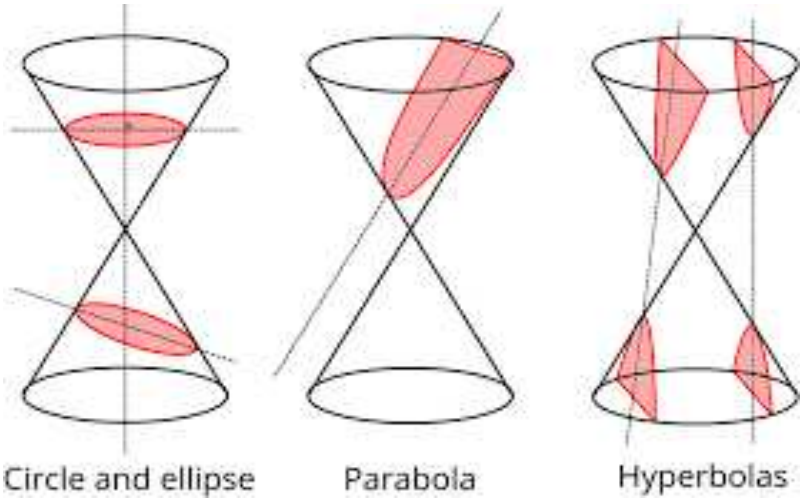


Figura 11: Cônicas no Cone Duplo

Cada uma das infinitas retas que formam a superfície de um cone duplo é chamada uma geratriz. Fixemos uma geratriz qualquer.

Consideremos as cônicas elipse, parábola, hipérbole e o adjetivo paralelo.

- A parábola é a intersecção de uma superfície cônica com um plano paralelo a uma de suas geratrizes. Na parábola, o ângulo entre o plano contendo a parábola e o plano contendo a base do cone é igual ao ângulo entre a geratriz e o plano contendo tal base. Dito de outra forma, o plano contendo a parábola é paralelo à geratriz.

- Na elipse, o ângulo entre o plano que a contém e o plano contendo a base do cone é menor que o ângulo entre a geratriz e o plano contendo tal base.

- A hypérbole é a intersecção da uma superfície cônica com um plano paralelo ao eixo do cone.

- Paralelo, do grego *parallelos*, de *para allelois*, um ao lado do outro, de *para*, ao lado, mais *allos*, outro.

As Cônicas e a Retórica. Aristóteles aplicou os termos geométricos parábola, elipse, e hypérbole em sua obra *Retórica*. Vejamos as prováveis associações.

- Parábola, do grego *parabolé*, atirar para o lado, lançar ou jogar ao lado, superpor, comparar (no sentido que uma coisa pode ser comparada a outra se colocadas uma ao lado da outra), de *para*, "ao lado", mais *ballein*, "lançar, atirar". Narração alegórica na qual o conjunto de elementos evoca, por semelhança ou comparação, outras realidades de ordem superior. As parábolas religiosas são exemplos famosos.

- Elipse, do grego *élleipsis*, omissão, falta, não alcançar, não chegar a, defeito. Omissão deliberada de palavas que se subentendem, com o intuito de assegurar a economia de expressão. Exemplo: "Casa de ferreiro, espeto de pau", "Prefiro almoços, ela jantares", "Sobre minha mesa, livros e papéis".

- Hipérbole, do grego *hyperbole*, de *hyper* (sobre, por cima de, além de) e *bole* (lançamento, ação de lançar), ato de atirar além, excesso, exagero. Figura de retórica que corresponde ao exagero, com efeitos enfáticos. Exemplo: "Rebentar de tanto rir". Justificativa aristotélica: em geometria, o plano que contém a hipérbole excede pois o ângulo que tal plano faz com o plano contendo a base do cone é maior que o ângulo que uma geratriz faz com o plano contendo a base do cone ou, ainda, excede pelo motivo que o plano contendo a hipérbole corta as duas folhas do cone (de duas folhas).

*Oswaldo Rio Branco de Oliveira*
*Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo*
*oliveira@ime.usp.br*