

MAT 226 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS I

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2017

LISTA 7 DE EXERCÍCIOS

Exercícios extraídos de D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2008, pp. 242–244 e pp. 298–301.

1. Localize e classifique os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas. Esboce o plano de fase em torno dos pontos de equilíbrio.

$$(a) \begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - y. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x - 4y. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x' = -4x + 2y \\ y' = 3x - 2y. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 2xy. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = ye^y \\ y' = 1 - x^2. \end{cases}$$

2. Ache uma integral primeira para o sistema (a) acima. Isto é, determine uma função $V(x, y)$ tal que as soluções do sistema (a) “moram” nas curvas de níveis de V [logo, $V(x(t), y(t)) = c$ para todo t].
Dica. Procure V da forma $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

3. Transforme a equação do oscilador harmônico

$$mx'' + \mu x' + kx = 0$$

num sistema no plano de fases (x, y) e estude os tipos de singularidade que ocorrem, conectando-as com as noções de amortecimento forte, crítico e oscilatório.

4. Consideremos o sistema “sela do macaco”

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Mostre que $V(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é uma integral primeira para o sistema e esboce o plano de fase em torno da origem.

5. Compare os planos de fase dos sistemas

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = xy \\ y' = -x^2 \end{cases}$$

Em ambos temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ambas de classe C^1 , com produto interno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2$$

e tais que $x' = f(x)$ tem uma órbita fechada. Mostre que g tem um zero.

7. Mostre que as equações abaixo têm solução periódica.

(a) $u'' - (1 - u^2)u' + u^5 = 0$.

(b) $u'' + (u^2 - 2)u' + u + \sin u = 0$.

8. Mostre que o sistema abaixo tem uma solução periódica:

$$\begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2 - 9) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2 - 9). \end{cases}$$

[Nesse caso, pode-se resolver explicitamente o sistema e determinar essa solução. Use coordenadas polares.]

9. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x \frac{f(r)}{r} \\ y' = x + y \frac{f(r)}{r}, \end{cases} \quad \text{onde } r^2 = x^2 + y^2,$$

tem soluções periódicas correspondendo aos zeros de $f(r)$. Determine essas soluções nos casos abaixo e discuta a estabilidade dos ciclos

(i) $f(r) = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$

(ii) $f(r) = (r - 4)^2(r^2 - 8r + 5)$.

10. Determine regiões onde os sistemas abaixo não têm soluções periódicas.

$$(a) \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 + y + y^3, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 2x - xy^4 + y^3 \\ y' = x^3 + y - yx^4. \end{cases}$$

VIDE VERSO

Exercícios extraídos de D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, 2008, pp. 298–301.

11. Determine a solução geral do sistema $x' = Ax$ e do sistema $x' = Bx$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sejam A e B como no exercício 11. Resolva os seguintes itens.

- (a) Compute e^{tA} e e^{tB} .
- (b) Esboce as soluções de $x' = Ax$ no plano (com a base canônica usual).
- (c) Mostre que é falsa a desigualdade

$$|e^{tA}x| \leq |x| \quad \text{para quaisquer } t \geq 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^2.$$

13. Usando a fórmula de variação das constantes, escreva a expressão que fornece as soluções da equação

$$x'' + x = h(t).$$

14. Considere os sistemas lineares n dimensionais (S1) e (S2) dados por

$$(S1) \quad x' = A(t)x \quad \text{e} \quad (S2) \quad y' = A(t)y + h(t),$$

com $A(t)$ e $h(t)$ contínuas e periódicas de período p . Mostre o que se pede.

- (a) Se $\lambda = 1$ for autovalor da matriz principal $X(p)$ do sistema (S1) avaliada no ponto p , então (S1) tem solução p -periódica não nula.
- (b) Se $\lambda = 1$ não for autovalor da matriz principal $Y(p)$ do sistema (S2) avaliada no ponto p , então (S2) tem solução p -periódica.

Dica. Denote por $y(t, t_0)$ a solução de (S2) com condição inicial $y(0, y_0) = y_0$. Use “variação das constantes” e mostre que existe y_0 tal que $y(p, y_0) = 0$.

15. Seja A uma matriz tal que todo autovalor λ tem parte real negativa.

(a) Mostre que a integral

$$\int_0^{+\infty} (e^{sA})^T e^{sA} ds$$

converge, onde X^T indica a matriz transposta de uma matriz X .

(b) Dada

$$C = \int_0^{+\infty} (e^{sA})^T e^{sA} ds,$$

mostre que

$$CA + A^T C = -I.$$

Dica. Integre os dois lados de

$$\frac{d}{ds} \left\{ (e^{sA})^T e^{sA} \right\} = (e^{sA})^T e^{sA} A + A^T (e^{sA})^T e^{sA}, \text{ para } s \in [0, +\infty).$$

(c) Seja C a matriz em (b). Defina $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(x) = \langle Cx, x \rangle \text{ (produto interno usual).}$$

Mostre as propriedades abaixo.

(c1) A função V é definida positiva. Isto é,

$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

Dica. Vale a identidade $\langle A^T x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$.

(c2) Se $x(t)$ é não nula e satisfaz $x' = Ax$, então temos

$$\frac{d}{dt} \{V(x(t))\} < 0 \text{ para todo } t.$$

16. Considere as equações (duas equações) do modelo presa-predador

$$(MPP) \quad \begin{cases} x' = (a - by)x, & \text{com constantes } a > 0 \text{ e } b > 0 \\ e \\ y' = (-c + dx)y, & \text{com constantes } c > 0 \text{ e } d > 0. \end{cases}$$

Ache uma função de Liapunov para (MPP), em torno do ponto de equilíbrio

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right).$$

Dica. Procure V da forma $V(x, y) = F(x) + G(y)$.

17. Esboce o plano de fase da equação

$$x'' + (x^2 + y^2 - 1)x' + x = 0.$$

chamando a atenção para os pontos de equilíbrio, soluções periódicas, orientação das soluções, conjuntos α e ω -limites, estabilidade e instabilidade, etc. Todas as conclusões que você puder, não esqueça de justificá-las.

18. Seja $x' = -xf(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $f(0) > 0$.

(a) Verifique que $V(x) = |x|^2$ é uma função de Liapunov

(b) Analise a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$.

19. Considere o sistema

$$x' = f(x),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo gradiente. Isto é, existe uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$f(x) = -\nabla V(x) = -\text{grad } V(x).$$

Mostre as afirmações abaixo.

(a) $V' = -|\nabla V(x)|^2$, com a usual notação

$$V' = \frac{d}{dt} \{V(x(t))\}.$$

(b) Se \bar{x} é um ponto de mínimo isolado de V , então \bar{x} é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável da equação $x' = f(x)$.

(c) Se x é um ponto ω -limite [isto é, $x \in \omega(x_0)$], então x é um ponto de equilíbrio.

Outros exercícios (não em “Equações Diferenciais Aplicadas” de D. J. Figueiredo e A. F. Neves)

20. Seja X um campo vetorial de classe C^1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que, se $\phi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \Omega$ for uma curva integral maximal de X e se existir

$$\lim_{t \rightarrow \omega_+} \phi(t) = p \in \Omega,$$

então $\omega_+ = +\infty$ e p é uma singularidade (i.e. um ponto de equilíbrio) de X .

21. Seja $X = -\nabla V$, com $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) Prove que X não possui órbitas periódicas.

Dica. Se $\phi(t)$ é uma curva integral regular de X , então

$$\frac{d}{dt} \{V \circ \phi\}(t) < 0 \quad [\text{i.e., } V \circ \phi \text{ é estritamente decrescente.}]$$

- (b) Suponha que para todo $c \in \mathbb{R}$ o conjunto $V^{-1}(-\infty, c]$ é compacto e que as singularidades de ∇V são isoladas. Mostre as afirmações abaixo.

- (b1) Para todo p em Ω , a curva integral maximal de $x' = -\nabla V(x)$ que se inicia em p e é indicada $\gamma_p : J(p) \rightarrow \Omega$, está definida em $[0, +\infty)$.

- (b2) Existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_p(t).$$

- (b3) O limite em (b2) é uma singularidade de ∇V .

22. **Cr terio de Bendixon.** Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de classe C^1 em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Suponha que

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0$$

em todos os pontos de Ω . Então X não tem órbitas periódicas em Ω .

Dica. Suponha que γ seja uma órbita periódica. Aplique o teorema da divergência ao conjunto limitado por γ^* .

23. Esboce o retrato de fase do pêndulo simples.

24. Encontre a hamiltoniana H do sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x^3 + 4x \end{cases}$$

e esboce o retrato de fase correspondente.

25. Esboce os retratos de fase dos fluxos gradientes $z' = -\nabla V(z)$, onde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nos casos abaixo. Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os quanto à estabilidade. Esboce também as superfícies de nível de V .

(a) $V(x, y) = x^2 + 4y^2$.

(b) $V(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$.

(c) $V(x, y) = x \sin y$.

26. Encontre uma fun o de Liapunov estrita para o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema

$$\begin{cases} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2. \end{cases}$$