

**MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:
INTERPRETAÇÕES E EXEMPLOS**

Definições: Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω aberto em \mathbb{R}^n . Um ponto p em Ω é:

- Crítico, ou estacionário, da função f , se $\nabla f(p) = 0$.
- Um máximo [mínimo] local da função f se existe um raio $r > 0$ tal que $f(p) \geq f(x)$ [$f(p) \leq f(x)$], para todo x na intersecção $B(p; r) \cap \Omega$.
- Extremante local de f se p é ponto de máximo [mínimo] local de f .
- Extremante local de f em um subconjunto A de Ω , se p está em A e p é ponto de máximo [mínimo] local da função f restrita a A .

Teorema 1. *Sejam f e g funções em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω aberto em \mathbb{R}^2 , e L a curva de nível 0 de g , com $\nabla g \neq 0$ nos pontos de L . Seja p um extremante local de f em L . Temos*

$$(1.1) \quad \nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \text{ para algum } \lambda \text{ em } \mathbb{R}.$$

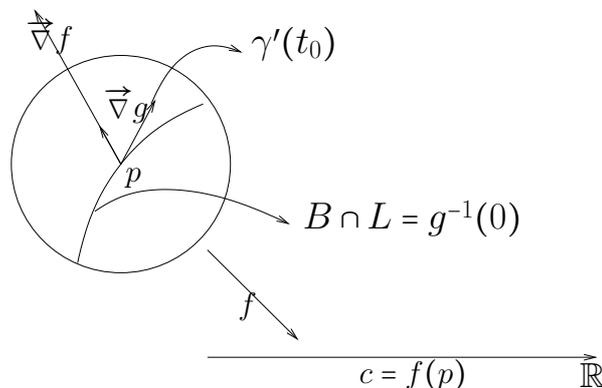


Figura 1: Teorema de Lagrange no Plano

Prova. (Vide Figura 1.) Localmente, em p , pelo Teorema da Função Implícita L é uma curva $\gamma(t)$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) \neq 0$. Assim, $(f \circ \gamma)(t)$ têm extremante em $t = 0$. Portanto $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e, pela regra da cadeia, $\nabla f(p) \perp \gamma'(0)$. Também temos

$$g \circ \gamma \equiv 0, \quad \nabla g(p) \perp \gamma'(0), \quad \gamma'(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(p) \neq 0.$$

Logo, $\nabla f(p)$ é paralelo a $\nabla g(p) \neq 0$. Donde, a tese ■

Interpretações Geométricas para o Teorema 1 (Lagrange).

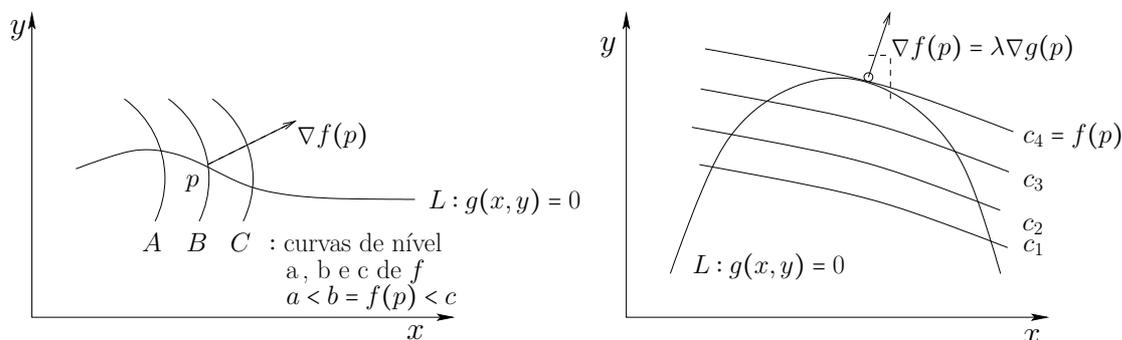


Figura 2: Ilustrações 2A e 2B (complementares) para o Teorema de Lagrange

Interpretação para Figura 2-A (à esquerda).

Suponha $\nabla f(p) \neq \vec{0}$ oblíquo a L em p . Então, a curva C de nível $f(p)$, de f , cruza a curva L e as curvas de nível c , de f , para $c \approx f(p)$, com gráficos próximos a C , também cruzam L e, orientando-as na direção de crescimento de c (a direção do gradiente) vemos que p não é ponto de máximo, nem de mínimo, local de f em L , contra a hipótese. Donde $\nabla f(p)$ é ortogonal a L , assim como $\nabla g(p)$. Logo, o vetor $\nabla f(p)$ é paralelo a $\nabla g(p)$.

Interpretação para Figura 2-B (à direita): Representemos as curvas de nível $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = f(x_0, y_0) = f(p)$ no sentido de crescimento de f [i.e., no sentido de $\nabla f(p)$]. Claramente o valor máximo de f sobre a curva $L = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, corresponde ao maior valor c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepta a curva L . Em tal ponto p de intersecção tais curvas tem mesma reta tangente e mesma reta normal, as quais a priori tem direção $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p)$ (Figura 2-B), respectivamente. Logo, tais vetores são paralelos e $\nabla f(p)$ é um múltiplo de $\nabla g(p)$ já que este é não nulo.

Observações. Mantenhamos a notação do Teorema 1 e de sua prova.

- (1) Suponhamos que p é ponto crítico de f . Então, pondo $\lambda = 0$ temos $\nabla f(p) = \vec{0} = \lambda \nabla g(p)$. Porém, não existe λ tal que $\vec{0} \neq \nabla g(p) = \lambda \nabla f(p)$. Neste sentido, a equação (1.1) é a melhor possível.
- (2) Pontos críticos de f pertencentes a L , são **candidatos** a extremantes locais de f restrita a L .
- (3) Se $\nabla f \neq \vec{0}$ em todo ponto, localmente parametrizamos a curva de nível $c = f(p)$, de f , por uma curva δ , com $\delta' \neq \vec{0}$. Esta curva tem vetor tangente ortogonal a $\nabla f(p)$. Logo, $\delta'(p) \perp \nabla g(p)$. No ponto p , visto que os vetores tangentes δ' e γ' são não nulos e ortogonais a $\nabla g(p)$, vemos que δ' e γ' são múltiplos um do outro. Donde as curvas $L = g^{-1}(0)$ e a de nível $c = f(p)$ da função f , tangenciam-se em p .
- (4) Os extremantes saem do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

- (5) Na equação (1.1) [i.e., $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$], é possível eliminar o parâmetro λ (a conveniência depende do problema). Basta resolvermos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (p) = 0.$$

A questão da determinação dos extremantes locais de f sobre a curva $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ é usualmente referida como o problema da determinação dos máximos e mínimos de f sujeita à **restrição** $g(x, y) = 0$ ou, dos máximos e mínimos **condicionados** de f sujeita à **condição** $g(x, y) = 0$.

Vejamos alguns conceitos úteis ao Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Definições Topológicas. Sejam A e K dois subconjuntos de \mathbb{R}^n .

- A é fechado se seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus \{A\} = A^c$ é aberto.
- K é compacto se é fechado e limitado.

Teorema (Weierstrass). *Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um compacto K de \mathbb{R}^n . Então, f assume valor máximo e valor mínimo em K .*

Prova. Vide página destinada ao curso.

Exemplo 1. Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que tangencia a curva (ramo de hipérbole) $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Dê o ponto de tangência.

Solução.

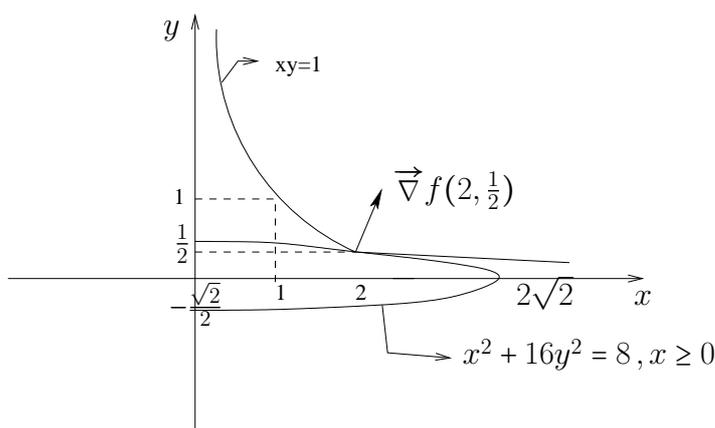


Figura 3: Ilustração ao Exemplo 1

No ponto (x_0, y_0) em que as curvas se tangenciam seus vetores tangentes são paralelos e seus vetores normais também. O normal à curva de nível é ∇f e o normal à hipérbole $xy = 1$ é $\nabla g(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$ (não nulo pois $x_0 y_0 = 1$). Obtemos $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e,

$$\langle 2x_0, 32y_0 \rangle = \lambda \langle y_0, x_0 \rangle .$$

Logo, $2x_0 \cdot 32y_0 = \lambda y_0 \cdot \lambda x_0$ e, como $x_0 y_0 = 1$, obtemos $64 = \lambda^2$ e $\lambda = \pm 8$. Como $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, não temos $\lambda = -8$. Donde segue $x_0 = 4y_0$ e portanto, $1 = x_0 y_0 = 4y_0^2$ e assim encontramos $y_0 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = 2$ e o ponto de tangência

$$(x_0, y_0) = \left(2, \frac{1}{2} \right) .$$

A curva de nível é a elipse dada por $x^2 + 16y^2 = f(2, \frac{1}{2}) = 4 + 4 = 8$ ■

Exemplo 2. Analise os máximos e mínimos de

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2, \quad \text{com a restrição } x^2 + 2y^2 = 1.$$

Solução.

Sejam a elipse $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e a função $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$. Então, $E = g^{-1}(0)$ e $\nabla g = (2x, 4y) \neq \vec{0}$ sobre E . Como f é contínua e E é compacto, por Weierstrass, f assume máximo e mínimo em E . Por multiplicadores de Lagrange, para tais extremantes existe λ em \mathbb{R} tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} (2x - 2y, -2x + 6y) = \lambda(2x, 4y) \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ na primeira equação do sistema à direita temos,

$$\begin{vmatrix} 2x - 2y & 6y - 2x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y(x - y) - x(3y - x) = 0.$$

Porém, temos $0 = 2(xy - y^2) - (3xy - x^2) = (x - 2y)(x + y)$. Assim, obtemos as soluções $P = (2y, y)$ ou $Q = (-y, y)$. Como P e Q pertencem à elipse concluímos que

$$\begin{cases} (2y)^2 + 2y^2 = 1 \\ \text{ou} \\ y^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ \text{ou} \\ Q = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{cases}$$

Computemos f em P e em Q . Como $f(-x, -y) = f(x, y)$ temos,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2. \end{aligned}$$

Os pontos $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ são de máximo e os pontos $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ são de mínimo ■

Teorema 2. *Sejam f e g em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω um aberto em \mathbb{R}^3 . Consideremos a superfície de nível $S = g^{-1}(0)$, com $\nabla g \neq \vec{0}$ em todo ponto de S . Seja p , em S , um extremante local de f restrita a S . Então temos*

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Interpretação. (Análoga ao caso planar.) Se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$ é oblíquo a S em p (i.e., ao plano π tangente a S em p), então a superfície S' de nível $f(p)$, de f , cruza S em p e as superfícies de nível c , de f , para valores de c próximos de $f(p)$, também cruzam S e orientando-as na direção $\nabla f(p)$, de crescimento de c , vemos que p não é extremante de f , contra a hipótese. Logo, $\nabla f(p)$ é ortogonal a S , assim como $\nabla g(p) \neq \vec{0}$. Donde $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p)$ são paralelos.

Prova.

Pelo Teorema das Funções Implícitas, S é localmente em $p = (x_0, y_0, z_0)$ (i.e., em uma bola aberta contendo p), o gráfico de uma função $z = \varphi(x, y)$, com o par (x, y) numa vizinhança de (x_0, y_0) e $\varphi(x_0, y_0) = z_0$. Pelas hipóteses, dada uma curva arbitrária γ no gráfico de φ , satisfazendo $\gamma(0) = p$, a função $(f \circ \gamma)$ tem máximo ou mínimo em $t = 0$. Logo, $\nabla f(p) \perp \gamma'(0)$. Assim, $\nabla f(p)$ é ortogonal ao plano π , tangente ao gráfico de φ em p . Claramente $\nabla g(p)$ é ortogonal ao gráfico de φ e, portanto, ao plano π .

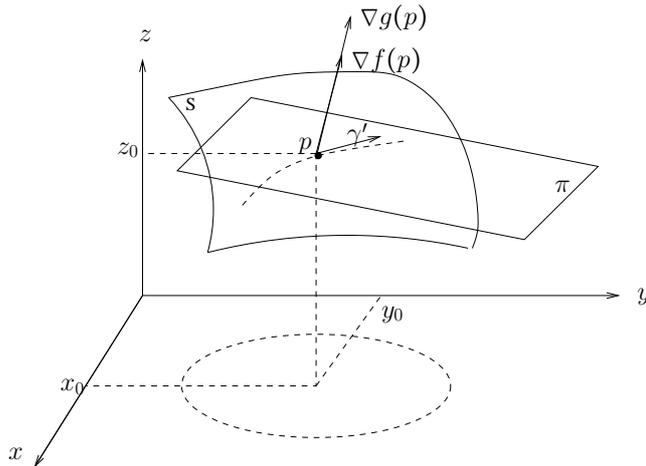


Figura 4: Ilustração ao Teorema 2.

Logo, $\nabla f(p)$ e $\nabla g(p) \neq \vec{0}$ são paralelos. Donde concluímos a tese ■

Observação 6. No Teorema 2 também é simples eliminar o parâmetro λ . A resolubilidade da equação $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ equivale à de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} (p) = \vec{0}.$$

Exemplo 3. Encontre o único ponto P no plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0, 0, 0)$ e a $(1, 1, 1)$ é mínima.

Solução.

Geometricamente, se K é um disco fechado e limitado que contém os pontos dados e intersecta o plano π dado, o ponto procurado pertence a $K \cap \pi$ e é então o mínimo absoluto da função (quadrado da distância)

$$D(x, y, z) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$$

restrita ao compacto $K \cap \pi$. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo. Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x, y, z)$ com a restrição $3x + 2y + z = 12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x, y, z) = \lambda \langle 3, 2, 1 \rangle, \quad \lambda \text{ em } \mathbb{R},$$

ou, eliminando o parâmetro λ ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x + 2(x - 1) & 2y + 2(y - 1) & 2z + 2(z - 1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x - 1 & 2y - 1 & 2z - 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y - 1 - 4z + 2) \vec{i} - (2x - 1 - 6z + 3) \vec{j} + (4x - 2 - 6y + 3) \vec{k} = \vec{0}$ e portanto, $2y = 4z - 1$ e $x = 3z - 1$. Donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z - 1) + (4z - 1) + z = 12$. Finalmente,

$$z = \frac{16}{14}, \quad y = \frac{25}{14}, \quad x = \frac{34}{14} \quad \text{e} \quad P_0 = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14} \right).$$

Atenção. Neste caso podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x + 2(x - 1)}{3} = \frac{2y + 2(y - 1)}{2} = \frac{2z + 2(z - 1)}{1} \quad (= \lambda) \quad \blacksquare$$

Exemplo 4. Consideremos o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

- (a) Determine o ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano π mais próximo à origem.
 (b) Com o método utilizado em (a) mostre que a distância de todo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano é dada pela fórmula:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1 Solução.

- (a) Geometricamente sabemos que existe tal ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que $P_1 = (0, 0, 0)$ se $d = 0$. Passemos à determinação do mínimo da função $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância, sujeita à restrição $ax + by + cz + d = 0$. Utilizando multiplicadores de Lagrange temos,

$$\nabla\Phi(P_1) = (2x_1, 2y_1, 2z_1) = \lambda(a, b, c).$$

Logo, $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \frac{\lambda}{2}(a, b, c)$ e, substituindo tais coordenadas para P_0 na equação para π temos $0 = ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + d$.
 Onde, $\frac{\lambda}{2} = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Assim, o ponto de π mais próximo à origem é

$$P_1 = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}(a, b, c).$$

- (b) Geometricamente é claro que existe em π o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mais próximo de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Claramente, P_2 é ponto de mínimo absoluto da função $\Psi(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ restrita ao plano $ax + by + cz + d = 0$, que avalia o quadrado da distância dos pontos do plano π ao ponto P_0 . Aplicando multiplicadores de Lagrange temos,

$$\nabla\Psi(P_2) = (2(x_2 - x_0), 2(y_2 - y_0), 2(z_2 - z_0)) = \mu(a, b, c).$$

Portanto, $\overrightarrow{P_0P_2} = \frac{\mu}{2}(a, b, c)$ e a distância de P_2 ao plano π , dada pelo módulo do vetor $\overrightarrow{P_0P_2}$, é então $\frac{|\mu|}{2}|(a, b, c)|$. Visto que $P_2 = P_0 + \frac{\mu}{2}(a, b, c)$ pertence a π temos $a(x_0 + \frac{\mu}{2}a) + b(y_0 + \frac{\mu}{2}b) + c(z_0 + \frac{\mu}{2}c) + d = 0$. Onde,

$$\frac{\mu}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d).$$

Finalmente, a distância procurada é

$$\frac{|\mu|}{2}|(a, b, c)| = \frac{\frac{|\mu|}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

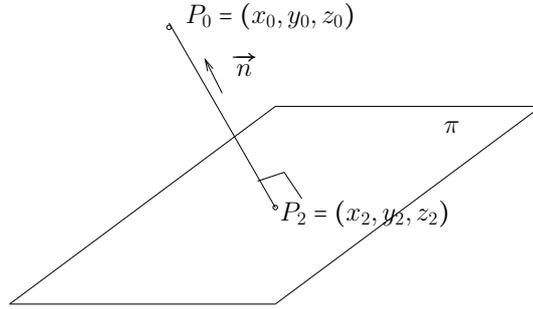


Figura 5: A distância de um ponto a um plano.

2 Solução (Geométrica, simples e sem multiplicadores de Lagrange):

Se P_2 , pertencente a π , é o pé da perpendicular por P_0 ao plano π temos que $\overrightarrow{P_0P_2}$ é paralelo ao vetor normal a π , $\vec{n}_\pi = \langle a, b, c \rangle \neq \vec{0}$. Logo, existe λ em \mathbb{R} tal que $\overrightarrow{P_0P_2} = \lambda \langle a, b, c \rangle$ e portanto a distância de P_0 a π é $|\overrightarrow{P_0P_2}|$. Porém, da identidade

$$P_2 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_2} = P_0 + \lambda \langle a, b, c \rangle ,$$

segue que

$$0 = a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0 ,$$

e assim, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$ e $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Donde,

$$|\overrightarrow{P_0P_2}| = |\lambda| |\langle a, b, c \rangle| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \blacksquare$$

Recordemos que: se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores em \mathbb{R}^3 tais que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e \vec{w} é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$ então \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

Teorema 3. Consideremos três funções f , g e h em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, com Ω um aberto em \mathbb{R}^3 , e a intersecção de duas superfícies de nível zero

$$L = \{P = (x, y, z) \text{ em } \Omega : g(P) = 0 \text{ e } h(P) = 0\} .$$

Suponhamos que $\nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$, para todo (x, y, z) em L . Suponhamos que $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é um extremante local de f sobre L . Então, existem λ_1 em \mathbb{R} e λ_2 em \mathbb{R} tais que

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g(P_0) + \lambda_2 \nabla h(P_0) .$$

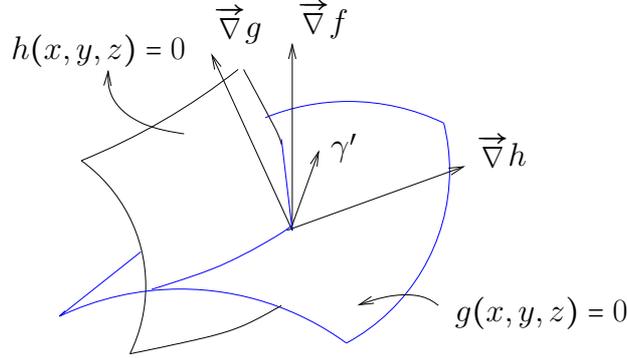


Figura 6: Ilustração ao Teorema 3.

Prova.

Pelas hipóteses (vide o Teorema 3 das Funções Implícitas) temos que localmente, em P_0 , L é uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com $\gamma(0) = P_0$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Como $\text{Im}(\gamma)$ está contida na superfície de nível zero de g , segue que o vetor $\nabla g(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$ e, analogamente, o vetor $\nabla h(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$ (vide Figura 5). Portanto, $\gamma'(0)$ é paralelo a $\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0)$.

Ainda, a função $(f \circ \gamma)(t)$ tem máximo, ou mínimo, local em $t = 0$ e $\nabla f(P_0) \perp \gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, temos $\nabla f(P_0) \perp \nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0)$. Donde segue que o vetor $\nabla f(P_0)$ é combinação linear de $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$ ■

Observação 7. É possível eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 . No Teorema 3 temos a identidade $\nabla f(P_0) = \lambda_1 \nabla g(P_0) + \lambda_2 \nabla h(P_0)$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} (P_0) = 0.$$

Observação 8. Os sistemas encontrados nos teoremas acima são redutíveis a uma única equação vetorial, eliminando equações de restrição e acrescentando variáveis. Para o Teorema 3, e analogamente para os demais, definiremos a função \mathcal{L} em cinco variáveis livres (vide Exemplo 6, a seguir), ou não condicionadas,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z).$$

As soluções do sistema mencionado são os pontos de máximo ou mínimo não-condicionados de \mathcal{L} , os quais se encontram entre seus (de \mathcal{L}) pontos críticos e satisfazem,

$$\vec{\nabla} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = \langle f_x - \lambda g_x - \mu h_x, f_y - \lambda g_y - \mu h_y, f_z - \lambda g_z - \mu h_z, -g, -h \rangle = \vec{0},$$

que é um problema sem condições de restrição e simétrico no sentido que as variáveis tem igual importância. Esta formatação do problema é elegante e trivialmente generalizável para uma função f com qualquer número de variáveis e com qualquer número de restrições.

Definição. A variável λ (ou μ) é um multiplicador de Lagrange.

Em Economia, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, etc. o multiplicador λ é convenientemente interpretado e tem importância por si só.

Exemplo 5. Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Solução.

Determinemos os pontos que maximizam a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, com $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$. Tais pontos pertencem à intersecção do elipsóide $g = 0$ com o plano $h = 0$, a qual é um compacto K de \mathbb{R}^3 . Como D é contínua, D assume máximo e mínimo em K . Pela Observação 7 ao Teorema 3, se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é extremante local de D sobre $K = \{(x, y, z) : g = 0 \text{ e } h = 0\}$ temos

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_0 & 8y_0 & 2z_0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x_0 & 4y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $0 = x_0(z_0 - 4y_0) - y_0(z_0 - x_0) + z_0(4y_0 - x_0) = 3y_0(z_0 - x_0)$ e temos $y_0 = 0$ ou $z_0 = x_0$. Se $y_0 = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Assim, $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são candidatos a extremantes. Se $z_0 = x_0$ temos,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}.$$

Neste caso os candidatos são $P_3 = (0, 1, 0)$ e $P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Comparando os valores $D(P_1) = D(P_2) = 4$, $D(P_3) = 1$ e $D(P_4) = \frac{177}{81}$ constatamos que P_1 e P_2 são os pontos desejados ■

Exemplo 6. Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo à origem.

Solução.

Minimizemos $x^2 + y^2 + z^2$ com as restrições $x + 2y + z - 1 = 0$ e $-3x - y + 2z - 4 = 0$. Definindo

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(-3x - y + 2z - 4),$$

resolvamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda + 3\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z - \lambda - 2\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + 2y + z - 1) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = (-3x - y + 2z + 4) = 0. \end{cases}$$

Das três primeiras equações temos,

$$x = \frac{\lambda - 3\mu}{2}, \quad y = \frac{2\lambda - \mu}{2}, \quad z = \frac{\lambda + 2\mu}{2},$$

que substituídas na quarta e na quinta equações e então simplificando fornecem

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = 2 \\ 3\lambda - 14\mu = -8 \end{cases},$$

e $\lambda = \frac{52}{75}$ e $\mu = \frac{54}{75}$. Donde concluímos, $x = -\frac{11}{15}$, $y = \frac{5}{15}$ e $z = \frac{16}{15}$ ■

No espaço \mathbb{R}^n , chamamos um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ de hiperplano (se $n=3$, um hiperplano é um plano passando pela origem).

Exemplo 7. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e tal que a restrição de f a um hiperplano π tem um máximo em um ponto P no hiperplano. Verifique que dado um vetor arbitrário \vec{v} unitário e paralelo a π então temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{v} = 0.$$

Isto é, $\nabla f(P)$ é ortogonal a π . Supondo \vec{n} o vetor normal ao hiperplano π conclua que existe λ em \mathbb{R} tal que

$$\nabla f(P) = \lambda \vec{n}.$$

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^n , n fixo em \mathbb{N} . Como consequência do Teorema da Função Implícita para uma função g em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, mostremos que vale um resultado análogo aos teoremas 1 e 3, no espaço n -dimensional.

Teorema 4. *Sejam f e g , ambas em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, e $S = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$, a superfície de nível zero de g , com $\vec{\nabla} g(x) \neq \vec{0}$ para todo x em S . Seja P , em S , um extremante local de f restrita a S . Então, existe λ em \mathbb{R} tal que*

$$\vec{\nabla} f(P) = \lambda \vec{\nabla} g(P).$$

Interpretação. A superfície solução S da equação $g(x) = 0$ possui hiperplano tangente π e para toda curva γ em S , $\gamma(0) = P$, a composta $f \circ \gamma$ tem um extremante em P . Onde, $\nabla f(P)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(0)$ em π . Assim, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ são ortogonais a π . A conclusão é então trivial.

Prova. Vide a prova para Multiplicadores de Lagrange em várias variáveis.

Teorema 5. *Sejam f em $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ e $g = (g_1, \dots, g_m)$ em $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, com $m < n$. Suponhamos que f tem um extremante local no ponto P em $S = g^{-1}(0, \dots, 0)$. Suponhamos também que o conjunto $\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n em todo ponto. Então, existem m números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que*

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(P).$$

Interpretação. Consideremos, para cada $j = 1, \dots, m$, o hiperplano em \mathbb{R}^n tangente à superfície $g_j^{-1}(0)$ no ponto P . A intersecção destes hiperplanos é o espaço vetorial V tangente a S e de dimensão $n - m$. O espaço vetorial V^\perp ortogonal a V , tem dimensão m . O conjunto $\{\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)\}$ é ortogonal a V e portanto uma base de V^\perp . Ainda, dada uma curva arbitrária γ em S , com $\gamma(0) = P$, temos que a função $f \circ \gamma$ tem um extremante em $t = 0$ e assim, $\nabla f(P)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$. Logo, o vetor $\nabla f(P)$ é ortogonal a V e uma combinação linear de $\nabla g_1(P), \dots, \nabla g_m(P)$.

**Máximos e mínimos, locais e absolutos,
de uma função f em $C^1(K; \mathbb{R})$, K um compacto.**

Definições topológicas. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n .

O ponto P de A , é um **ponto interior** de A se existe uma bola aberta, não vazia, centrada em P e contida em A . Isto é, se existe $r > 0$ tal que $B(P; r)$ está contida em A .

O ponto P de \mathbb{R}^n é um **ponto de fronteira** de A se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e também $\mathbb{R}^n \setminus A = A^C$, o complementar de A . Isto é, se para todo $r > 0$, temos

$$B(P; r) \cap A \neq \emptyset \text{ e também } B(P; r) \cap A^C \neq \emptyset.$$

O interior de A , $\text{int}(A)$, é o conjunto dos pontos interiores de A .

A fronteira de A , ∂A , é o conjunto dos pontos de fronteira de A .

Dado P em A , temos uma só das possibilidades: ou $P \in \text{int}(A)$, ou $P \in \partial A$.

Notemos que:

- (A) Pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo, absolutos.
- (B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos de f . Isto é, em tais pontos o gradiente se anula. Assim, adotamos o procedimento abaixo.
 - (1) Restringindo f a $\text{int}(K)$ determinamos os pontos críticos, candidatos a extremantes.
 - (2) Encontramos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre a fronteira, ∂K , ou elementarmente ou por multiplicadores de Lagrange.
 - (3) Os extremantes absolutos estão entre os valores de f nos pontos acima obtidos.

Exemplo 8. Dada $f(x, y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes e os máximos e mínimos locais e absolutos de f no quadrado

$$K = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}.$$

Solução. Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\vec{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 9x + 4y - 5 = 0$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo ou mínimo local em $\text{int}(D)$.

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K ,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1, 1] \cup \{1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{-1\} \cup [-1, 1] \times \{1\}.$$

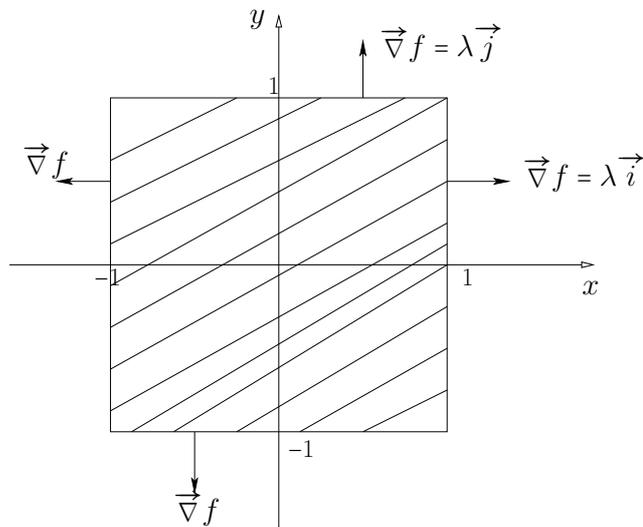


Figura 7: Ilustração ao Exemplo 7

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K .

Os extremantes locais na fronteira de K , mas não um vértice, satisfazem (v. Teorema 2):

Em $\{-1\} \times]-1, 1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.

Em $\{1\} \times]-1, 1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1, -1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Em $] -1, 1[\times \{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que também descartamos.

Em $] -1, 1[\times \{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1, 1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre os vértices. Temos, $f(1, 1) = 17$, $f(-1, -1) = 49$, $f(1, -1) = +1$, e $f(-1, +1) = -7$.

Resposta: Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. Ainda, $f(-1, +1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1, -1) = 49$ é o máximo absoluto ■

Exemplo 9. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 1\}$.

Solução. Pelo Teorema de Weierstrass a função f admite pontos de máximo e mínimo absolutos em M . Se tais pontos estiverem no interior de M então eles são pontos críticos. Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x + 1, 2y + 1, 2z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

e portanto o único ponto crítico $(-1/2, -1/2, 0)$ não pertence ao interior de M e assim os extremantes de f pertencem à fronteira de M , ∂M . Então, um extremante P_0 arbitrário pertence a

$$M_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z > 1\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 < 3\} \quad \text{ou} \\ M_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z = 1\}.$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ estiver em M_1 , por Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle = \lambda \langle 2x_0, 2y_0, 2z_0 \rangle$$

e portanto $2z_0 = \lambda 2z_0$ e então : ou temos $\lambda = 1$ ou temos $z_0 = 0$. Se $z_0 = 0$, então P_0 não pertence a M_1 e descartamos tal possibilidade. Se $\lambda = 1$ então temos $2x_0 + 1 = 2x_0$, uma contradição!

Se P_0 pertence a M_2 (onde temos $z_0 = 1$) então segue

$$\langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle = \lambda \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Logo, encontramos o candidato $P_1 = (-1/2, -1/2, 1)$.

Se P_0 pertence a M_3 então P_0 é extremante condicionado de

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + x + y + z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange obtemos

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle + \lambda_2 \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 2x_0 + 1 & 2y_0 + 1 & 2 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde segue $2y_0(2x_0 + 1) - 2x_0(2y_0 + 1) = 0$ e $y_0 = x_0$. Substituindo na equação da esfera segue $2x_0^2 = 3$ e $x_0 = \pm\sqrt{6}/2$. Desta forma, encontramos os candidatos $P_2 = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ e $P_3 = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$.

Como $f(P_1) = \frac{1}{2}$, $f(P_2) = 4 + \sqrt{6}$ e $f(P_3) = 4 - \sqrt{6}$, concluímos que P_1 é ponto de mínimo absoluto e P_2 é ponto de máximo absoluto ■

Exemplo 10 (Um Argumento Importante).

Argumento: Seja $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$ a superfície de nível 0 de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω um aberto de \mathbb{R}^3 , com f de classe C^1 e

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \neq \vec{0}, \text{ para todo } (x, y, z) \text{ em } S.$$

Seja $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ em \mathbb{R}^3 tal que P_1 não pertence a S . Suponhamos que P_0 é o ponto em S que realiza a distância do ponto P_1 à superfície S [isto é, vale a desigualdade $|P_1 - P_0| \leq |P_1 - P|$, para todo P em S]. Então temos,

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donde segue, $\overrightarrow{P_0P_1} \perp S$. Consequentemente obtemos: $\overrightarrow{P_0P_1} \perp \gamma'(t_0)$, se γ é uma curva arbitrária de classe C^1 , em S , tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Prova. Seja $D(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ definida em \mathbb{R}^3 . Considerando um disco fechado $\overline{D}(P_1; R)$ centrado em P_1 e com raio $R > 0$ suficientemente grande tal que $K = \overline{D}(P_1; R) \cap S \neq \emptyset$, temos que K é compacto (pois fechado e limitado). Pelo Teorema de Weierstrass a função D restrita a K assume um valor mínimo em algum ponto $P \in S$. É claro que P é o ponto P_0 procurado, que realiza a distância de P_1 à superfície S . Então, como D restrita a S assume valor mínimo em $P_0 \in S$, pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange é válida a equação:

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Computemos o gradiente de $D(x, y, z)$. É fácil ver que

$$\vec{\nabla}(D) = \langle 2(x - x_1), 2(y - y_1), 2(z - z_1) \rangle ,$$

e portanto,

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = 2\langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle = -2\overrightarrow{P_0P_1} ,$$

e assim temos (notemos, abaixo, que a constante -2 é absorvível por λ)

$$-2\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC, 2002.
3. Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 2., IMPA, 2009.
4. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, McGraw-Hill, 1988.

*Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo
São Paulo, SP - Brasil
oliveira@ime.usp.br*