MAT2127 - Cálculo II - IQ
Prova de Recuperação
05/02/2009
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____

Boa Sorte!

1. A imagem da curva $\gamma(t)$ estão contida na intersecção das supefícies $x^2 + 2y^2 + z = 4$ e $x^2 + y + z = 3$. Suponha $\gamma(to) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

   a) Determine a reta tangente a γ no ponto $\gamma(t_0)$.

   b) Determine os planos tangentes às respectivas superfícies no ponto $\gamma(t_0)$.

   c) Determine uma curva $\gamma(t)$ nas condições acima.

   Vide 'Um Curso de Cálculo', H. L. Guidorizzi, vol 2, 5ª ed., p. 255, exemplo 3.

Resolução Se $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z$ e $g(x, y, z) = x^2 + y + z$, γ está contida na intersecção das superfícies de níveis 4 e 3 de f e g, respectivamente, com $\vec{\nabla} f$ e $\vec{\nabla} g$ ortogonais a estas. Logo, γ' é ortogonal a ambos em $P = (1, 1, 1)$ e, portanto, paralelo ao produto vetorial destes, os quais são normais aos planos procurados.

(a)

$$\gamma'(1,1,1) \ \parallel \ \vec{\nabla} f(1,1,1) \times \vec{\nabla} g(1,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle 3, 0, -6 \rangle = 3 \langle 1, 0, -2 \rangle \ .$$

A reta normal é $N : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda \langle 1, 0, -2 \rangle \ , \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Os planos tangentes são, respectivamente, $\pi_f : 2(x-1)+4(y-1)+1(z-1) = 0$ e $\pi_g : 2(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$.

Isto é, $\pi_f : 2x + 4y + z - 7 = 0$ e $\pi_g : 2x + y + z - 4 = 0$.

(c) Resolvendo

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 4 \\ x^2 + y + z = 3, \end{cases}$$

encontramos, com uma subtração, $y^2 = 1$ e ássim escolhemos $y = 1$. Substituindo tal alor na segunda equação determinamos $z = 2 - x^2$. Logo, uma tal curva é,

$$\gamma(t) = (t, 1, 2 - t^2) \, , t \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

2. Sejam $f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y)$ funções diferenciáveis tais que para todo (x, y) no domínio de g temos $f(x, y, g(x, y)) = 0$.
Suponha que $g(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$.
Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 3)$.
Vide 'Um Curso de Cálculo', H. L. Guidorizzi, vol 2, 5ª ed, p. 224, exercício 20.

Resolução Pela regra da cadeia temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\{\, f(x, y, g(x, y))\,\} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial y}\{\, f(x, y, g(x, y))\,\} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

e assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3)\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3)\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 0, \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} 2 + 10\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 0 \\ \\ 5 + 10\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 0, \end{cases}$$

donde, $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{5}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}$. Logo, o plano tangente π é dado por

$$\pi: \; z - g(1, 1) = -\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)\ ,$$

ou,

$$\pi: \; 2x + 5y + 10z - 37 = 0 \quad \blacksquare$$

3. Determine os pontos mais afastados da origem e cujas coordenadas estão sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

   Vide Prova Sub, Q4, e 'Um Curso de Cálculo', H. L. Guidorizzi, vol 2, 5ª ed, p. 330, exemplo 6.

4. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2.$$

Vide 'Um Curso de Cálculo', H. L. Guidorizzi, vol 2, 5ª ed., p.317, exc. 15 (b) e, também, lista 6, exercício 18 (b) e, ainda, lista 7, exercício 7 (a).

Resolução

Como f está definida em $\mathbb{R}^3$, seus pontos críticos são interiores e são dados por $\vec{\nabla} f = \langle 3x^2 - 3\, , 3y^2 - 3y\, , 3z^2 - 3\rangle = \vec{0}$. Isto é, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$:

$$P_1 = (1, 1, 1) \;\;,\;\; P_2 = (1, 1, -1) \;\;,\;\; P_3 = (1, -1, 1) \;\;,\;\; P_4 = (1, -1, -1) \;,$$

$$P_5 = (-1, 1, 1) \;\;,\;\; P_6 = (-1, 1, -1) \;\;,\;\; P_7 = (-1, -1, 1) \;\;,\;\; P_8 = (-1, -1, -1) \;.$$

Computando o hessiano de f encontramos,

$$\mathcal{H}f = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{vmatrix} \;=\; 216xyz \;,\quad H_1 = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} \;=\; 36xy \;.$$

Nos pontos P_i, $i = 2\, , 3\, , 4\, , 5\, , 6\, , 7$, a diagonal da matriz hessiana troca de sinal e estes são então pontos de sela.

Em P_1 temos $H_1 > 0$, $\mathcal{H} > 0$ e $f_{xx} > 0$ e então, P_1 é ponto de mínimo local.

Em P_8 temos $H_1 > 0$, $\mathcal{H} < 00$ e $f_{xx} < 0$ e então, P_8 é ponto de máximo local ■

5. Determine a solução geral das EDO's:

a) $x''' - 8x = 4 + t$.

b) $x'' - x = \cos t$.

Resolução

(a) O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 - 8$ e $\lambda = 2$ é claramente uma raíz. É fácil verificar que $\lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$ e que $\{2, -1 - \sqrt{3}i\,, -1 + \sqrt{3}i\}$ é o conjunto das ráizes, todas simples, de $p(\lambda)$.

A solução geral da equação homogênea associada é,

$$x_h \;=\; c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos\sqrt{3}\,t + c_3 e^{-t} \sin\sqrt{3}\,t \;, \quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}.$$

O problema, é óbvio, tem uma solução particular $x_p(t) \;=\; -\frac{t}{8} - \frac{1}{2}$.

A solução geral é,

$$x_g \;=\; c_1 e^{2t} \;+\; c_2 e^{-t} \cos\sqrt{3}\,t \;+\; c_3 e^{-t} \sin\sqrt{3}\,t \;-\; \frac{t}{8} \;-\; \frac{1}{2}\;, \quad c_1\,, c_2\,, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) O polinômio característico é $p(\lambda) \;=\; \lambda^2 - 1$ e a solução geral da equação homogênea associada é,

$$x_h = c_1 e^t \;+\; c_2 e^{-t}\,, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\;.$$

Como $f(t) \;=\; cost \;=\; cos1.t$ e 1 é raíz simples de $p \;=\; p(\lambda)$ temos uma solução particular da forma $x_p(t) = Acost + Bsent$, $A\,, B \in \mathbb{R}$.

Logo, $x_p' = -Asent + Bcost$, $x_p'' = -Acost - Bsent$ e, substituindo na equação,

$$x_p'' - x_p = (-Acost - Bsent) - (Acost + Bsent) = cost\;,$$

isto é,

$$-2Acost - 2Bsent = cost\;.$$

Logo, $-2A = 1$ e $-2B = 0$ e, portanto, $A = -\frac{1}{2}$ e $B = 0$.

A solução geral da equação é

$$x_g = c_1 e^t \;+\; c_2 e^{-t} \;-\; \frac{cost}{2}\;, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$