

O HESSIANO EM DUAS E VÁRIAS VARIÁVEIS

1 - Introdução

Lema 1. *Seja $\varphi \in C^2([a, b])$ e dois pontos t_0 e t distintos e ambos em $[a, b]$. Então, existe ao menos um ponto ξ , com ξ entre t_0 e t , $\xi \neq t_0$ e $\xi \neq t$, tal que*

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(t - t_0)^2.$$

Prova. Existe, é óbvio, um único número λ , dependendo de t_0 e t . tal que

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) + \lambda(t - t_0)^2.$$

Definamos a função $F(s) = \varphi(s) - \varphi(t_0) - \varphi'(t_0)(s - t_0) - \lambda(s - t_0)^2$.

Temos $F(t_0) = 0 = F(t)$. Pelo TVM existe c entre (estritamente) t_0 e t tal que

$$0 = F'(c) = \varphi'(c) - \varphi'(t_0) - 2\lambda(c - t_0) \implies 2\lambda = \frac{\varphi'(c) - \varphi'(t_0)}{c - t_0}.$$

Pelo TVM aplicado a φ' , existe ξ , com ξ entre t_0 e c , $\xi \neq t_0$ e $\xi \neq c$, tal que

$$\frac{\varphi'(c) - \varphi'(t_0)}{c - t_0} = \varphi''(\xi) \implies \lambda = \frac{\varphi''(\xi)}{2!} \blacksquare$$

A seguir, para simplificar, obtemos fórmulas em torno da origem $O = (0, 0)$ no plano cartesiano. Sejam $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $r > 0$.

Teorema 2 (Polinômio de Taylor de Ordem 1 e com Resto de Lagrange). *Sejam $f \in C^2(B(O; r))$, $\vec{v} = (h, k)$ com $|\vec{v}| < r$ e o ponto $P = O + \vec{v}$. Definamos*

$$\varphi(t) = f(th, tk), \quad \text{para } t \text{ em um intervalo aberto contendo } [-1, 1].$$

Temos,

$$(a) \quad \varphi'(t) = f_x(th, tk)h + f_y(th, tk)k = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(th, tk).$$

$$(b) \quad \varphi''(t) = f_{xx}(th, tk)h^2 + 2f_{xy}(th, tk)hk + f_{yy}(th, tk)k^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(th, tk).$$

$$(c) \quad f(O + \vec{v}) = f(O) + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(O) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(\bar{P}), \quad \text{com } \bar{P} \text{ no segmento } \overline{OP}.$$

Prova.

- (a) Imediata, pela regra da cadeia e pela definição de $\partial f/\partial \vec{v}$.
(b) Diferenciando a fórmula obtida em (a) e utilizando que pelo Teorema de Schwarz as derivadas mistas de f comutam (i.e., $f_{xy} = f_{yx}$) temos

$$\varphi''(t) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} k \right] h + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k \right] k = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2.$$

- (c) Basta avaliar $\varphi(1)$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ e aplicar o Lema 1 e os itens (a) e (b) ■

Exercício 1. Sejam $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, um ponto P e $\vec{v} = (h, k)$. Então,

$$f(P + \vec{v}) = f(P) + \langle \nabla f(P), (h, k) \rangle + \frac{1}{2} [f_{xx}(\bar{P})h^2 + 2f_{xy}(\bar{P})hk + f_{yy}(\bar{P})k^2],$$

para algum $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ no segmento unindo P e $P + \vec{v}$.

2 - O Hessiano em Duas Variáveis

Definições. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω aberto em \mathbb{R}^2 . Classificamos um ponto P_0 em Ω , relativamente à função f , como

- (a) de máximo [mínimo] local se $f(P_0) \geq f(P)$ [$f(P_0) \leq f(P)$] para todo $P \in B(P_0; r) \subset \Omega$, para algum $r > 0$; se tal desigualdade é estrita para todo $P \in B(P_0; r) \setminus \{P_0\}$, então P_0 é ponto de máximo [mínimo] local estrito.
(b) de máximo [mínimo] global, ou absoluto, se $f(P_0) \geq f(P)$ [$f(P_0) \leq f(P)$], para todo $P \in \Omega$; se tal desigualdade é estrita para todo $P \in \Omega \setminus \{P_0\}$, dizemos que P_0 é, em adição, estrito.
(c) extremante local [absoluto] se é de máximo, ou mínimo, local [absoluto].
(d) ponto crítico, ou estacionário, de f , supondo f em $C^1(\Omega)$, se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0.$$

- (e) de sela, se é ponto crítico de f mas não de máximo ou mínimo, locais.

Atenção. Um ponto de máximo, ou mínimo, local de uma função f , com f de classe C^1 em um aberto, é sempre um ponto crítico.

Se $|\vec{v}| = 1$, então $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P)$ é chamada a derivada direcional (normalizada) de f , no ponto P e na direção \vec{v} .

Corolário 3. Seja $f \in C^2(B(P_0; r))$, com $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto crítico de f . Dado $\vec{v} = (h, k)$, com $|\vec{v}| < r$, existe um ponto (\bar{x}, \bar{y}) no segmento unindo os pontos P_0 e $P_0 + \vec{v}$ tal que

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \right].$$

Prova. Segue, trivialmente, do Exercício 1 e da definição de ponto crítico ■

Estudemos a forma quadrática $Q_P = Q_P(h, k) = f_{xx}(P)h^2 + 2f_{xy}(P)hk + f_{yy}(P)k^2$. Antes, vejamos algumas definições e notações apropriadas.

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, é a matriz $A^T \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, onde $A^T = (b_{rs})$ e $b_{rs} = a_{sr}$ se $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$.

Uma matriz (quadrada) é simétrica se $A^T = A$.

Fixemos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 . Seja O a origem de \mathbb{R}^2 .

Identificando $\mathbb{R}^2 \cong M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, indicamos um vetor $v = h\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$ por $v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

Assim, temos o (vetor) transposto $v^T = (h \ k)$.

Teorema 4. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, sejam $H = ac - b^2$ e a forma quadrática

$$z = Q(v) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \text{ com } v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

- (i) Se $a \neq 0$, vale a fatoração $z = Q(v) = a \left[\left(h + \frac{b}{a}k \right)^2 + \frac{H}{a^2}k^2 \right]$.
- (ii) Se $a \neq 0$, o gráfico de $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um parabolóide do tipo:
 - se $H > 0$, elíptico ou circular, eixo Oz e concavidade para cima [baixo] se $a > 0$ [$a < 0$].
 - se $H < 0$, hiperbólico com sela na origem O .
 - se $H = 0$, cilíndrico.
- (iii) Se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ (logo, $H < 0$), parabolóide hiperbólico.
- (iv) Ainda, a função $z = Q(v)$ troca de sinal se e somente se $H < 0$.

Se o gráfico de Q é um parabolóide elíptico ou circular então $0 = Q(O)$ é valor mínimo/máximo estrito e absoluto. Se o gráfico de Q é um parabolóide cilíndrico então $0 = Q(O)$ é valor mínimo/máximo não estrito mas absoluto.

Prova.

(i) Pondo $a \in \mathbb{R}$ em evidência e completando quadrados obtemos,

$$Q(v) = a \left(h^2 + \frac{2bhk}{a} + \frac{ck^2}{a} \right) = a \left[\left(h + \frac{bk}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} k^2 \right].$$

(ii) , (iii): Consequências triviais de (i).

(iv) O caso $a \neq 0$ segue por (i). Se $a = 0$, a função $Q(v) = 2bhk + ck^2$ troca sinal se e só se $b \neq 0$. Isto é, se e somente se $H = -b^2 < 0$ ■

Se M é a matriz simétrica 2×2 no Teorema 4, então Q é chamada de forma quadrática associada a M . Então, obtemos as fórmulas

$$Q(v) = v^T M v = \langle M v, v \rangle, \text{ onde } v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indicando o produto escalar em \mathbb{R}^2 .

Definições. Sejam $f \in C^2(\Omega)$ e P um ponto crítico de f . A matriz hessiana e o hessiano, ambos de f e em P , são

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(P) = \det \mathcal{H}f(P).$$

A forma quadrática associada a f , no ponto P , indicada Q_P , é a forma quadrática associada à matriz hessiana $\mathcal{H}f(P)$.

Proposição 5. Sejam $f \in C^2(\Omega)$, um ponto P em Ω e $\vec{v} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ em \mathbb{R}^2 .

Então,

$$Q_P(v) = v^T \mathcal{H}f(P) v = \langle \mathcal{H}f(P) v, v \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(P).$$

Prova. Segue da Proposição 2 ■

Teorema 6 (Teste do Hessiano). Seja $f \in C^2(\Omega)$, com ponto crítico P ,

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(P) = \det \mathcal{H}f(P).$$

(a) Se $Hf(P) > 0$ e $f_{xx}(P) > 0$ então P é ponto de mínimo local estrito.

(b) Se $Hf(P) > 0$ e $f_{xx}(P) < 0$ então P é ponto de máximo local estrito.

(c) Se $Hf(P) < 0$ então P é um ponto de sela.

(d) Se $Hf(P) = 0$ então P pode ser de qualquer um dos tipos acima.

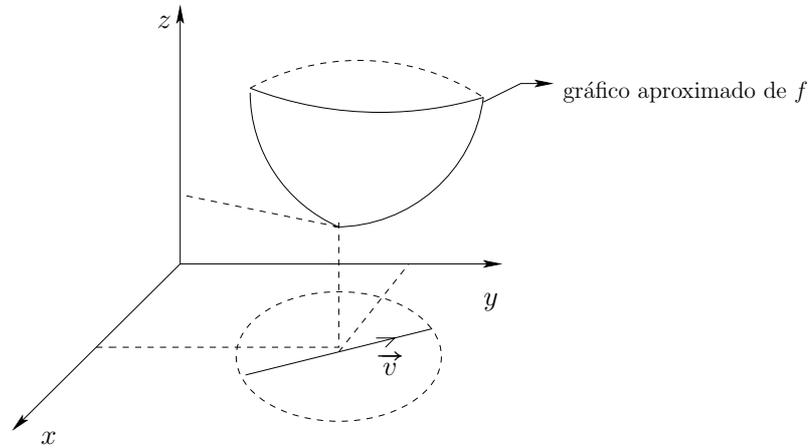


Figura 1: Caso em que $f_{xx}(P) > 0$ e $Hf(P) > 0$.

Prova.

- (a) Como $f \in C^2$, temos $Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ e $f_{xx} > 0$ numa bola $B(P; r)$, se $r > 0$ é pequeno o suficiente. Pelo Corolário 3, dado $\vec{v} = h\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, com $0 < |\vec{v}| < r$, existe \bar{P} no segmento unindo P e $P + \vec{v}$ tal que

$$\begin{aligned} f(P + \vec{v}) - f(P) &= \frac{1}{2} \left[f_{xx}(\bar{P})h^2 + 2f_{xy}(\bar{P})hk + f_{yy}(\bar{P})k^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[f_{xx}(\bar{P}) \left(h + \frac{f_{xy}(\bar{P})}{f_{xx}(\bar{P})}k \right)^2 + \frac{Hf(\bar{P})}{f_{xx}(\bar{P})}k^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

- (b) Basta aplicar o item (a) à função $-f$.
- (c) Pelo Teorema 4(iv) segue que [v. Proposição 5] $Q_P(\vec{v}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(P)$ troca de sinal segundo \vec{v} . Logo, P não é extremante local. É ponto de sela.
- (d) Vide exemplos 1, 2 e 3 abaixo ■

Exemplo 1. A função $f(x, y) = x^4 + y^4$ é tal que $(0, 0)$ é ponto de mínimo absoluto estrito, e o valor mínimo é 0. É, ainda, o único ponto crítico e f e suas derivadas parciais se anulam nele.

Exemplo 2. A função $f(x, y) = x^3 + y^3$ é tal que f e suas derivadas parciais se anulam em $(0, 0)$, que é o único ponto crítico. Porém, é fácil ver, $(0, 0)$ não é extremante local e é um ponto de sela.

Exemplo 3. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, com a, b, c, d e l em \mathbb{R} , e $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Se P_0 é extremante local então P_0 é extremante global (absoluto).

Prova. Seja $\vec{v} = (h, k) \in \mathbb{R}^2$. O ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é crítico e

$$\vec{0} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \langle 2ax_0 + cy_0 + d, 2by_0 + cx_0 + e \rangle.$$

Computando f em $(x_0 + h, y_0 + k)$ obtemos

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= a(x_0 + h)^2 + b(y_0 + k)^2 + c(x_0 + h)(y_0 + k) + d(x_0 + h) + e(y_0 + k) + l \\ &= (ah^2 + chh + bk^2) + (2ax_0 + cy_0 + d)h + (2by_0 + cx_0 + e)k + \\ &\quad + (ax_0^2 + by_0^2 + cx_0y_0 + dx_0 + ey_0 + l) = \\ &= (ah^2 + chh + bk^2) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Donde, $(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + chh + bk^2$.

Para completar a solução: aplique o Teste do Hessiano■

Exemplo 4. Uma $f \in C^2$ com um só ponto crítico, mínimo local mas não global:

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2.$$

Solução. Temos $\vec{\nabla} f(x, y) = (2x - 3(1 - x)^2 y^2, 2(1 - x)^3 y)$ e $f(0, 0) = 0$.

Logo, $\vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0)$ implica $(1 - x)^3 y = 0$ e assim, ou $y = 0$ [e $x = 0$], ou $x = 1$ [mas, $2x + 3(1 - x)^3 y^2 = 0$ não tem solução]. Logo, só $(0, 0)$ é ponto crítico.

Ainda, $f_{xx} = 2 + 6(1 - x)^2 y^2$, $f_{xy} = -6(1 - x)^2 y$, $f_{yy} = 2(1 - x)^3$ e então

$$\mathcal{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e $(0, 0)$ é mínimo local. Porém $f(2, 3) = -5 < 0$ e $(0, 0)$ não é mínimo global■

Exemplo 5. Estude os pontos críticos de $f(x, y) = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$.
Impondo

$$\vec{\nabla} f = (5x^4 - 5, 4y^3 - 32) = (0, 0),$$

obtemos os pontos críticos $(1, 2)$ e $(-1, 2)$. Ainda,

$$\mathcal{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(x, y) = 240x^3 y^2.$$

Logo, $(1, 2)$ é ponto de mínimo local e $(-1, 2)$ é ponto de sela■

Exemplo 6. Determine a distância entre as retas

$$r : x = 1 + \lambda, \quad y = 1 + 6\lambda, \quad z = 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : x = 1 + 2\mu, \quad y = 5 + 15\mu, \quad z = -2 + 6\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Solução (há soluções via geometria vetorial ou multiplicadores de Lagrange).

Consideremos os pontos arbitrários P e Q sobre r e s , respectivamente:

$$\begin{cases} P = (1 + \lambda, 1 + 6\lambda, 2\lambda), & \lambda \in \mathbb{R} \\ Q = (1 + 2\mu, 5 + 15\mu, -2 + 6\mu), & \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O quadrado da distância entre P e Q , $|\overrightarrow{PQ}|^2$, é dado pela expressão,

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mu) &= (\lambda - 2\mu)^2 + (-4 + 6\lambda - 15\mu)^2 + (2\lambda + 2 - 6\mu)^2 = \\ &= 41\lambda^2 + 265\mu^2 - 208\lambda\mu - 40\lambda + 96\mu + 20. \end{aligned}$$

Com $\vec{\nabla} D = (82\lambda - 208\mu - 40, 530\mu - 208\lambda + 96)$ e os pontos críticos de D :

$$\begin{cases} 41\lambda - 104\mu - 20 = 0 \\ -104\lambda + 265\mu + 48 = 0 \end{cases} \implies (\lambda, \mu) = \left(\frac{44}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

A matriz hessiana de D no ponto $P_0 = \left(\frac{44}{7}, \frac{16}{7}\right)$ é,

$$\mathcal{H}(D)(P_0) = \begin{pmatrix} 82 & -208 \\ -208 & 530 \end{pmatrix},$$

com $\frac{\partial^2 D}{\partial \lambda^2}(P_0) = 82 > 0$ e hessiano $H(D)(P_0) = 82 \times 530 - (208)^2 = 196 > 0$.

Logo, P_0 é ponto de mínimo local de D e, como é o único ponto crítico de D , mede a distância (ao quadrado) entre dois pontos arbitrários das retas r e s , segue que estas não são paralelas e portanto ou são concorrentes ou são reversas. Ainda mais, geometricamente deduzimos que P_0 é ponto de mínimo global.

Substituindo os valores encontrados para λ e μ obtemos,

$$P = (1 + \lambda, 1 + 6\lambda, 2\lambda) = \left(\frac{51}{7}, \frac{271}{7}, \frac{88}{7}\right) \text{ e}$$

$$Q = (1 + 2\mu, 5 + 15\mu, -2 + 6\mu) = \left(\frac{39}{7}, \frac{275}{7}, \frac{82}{7}\right).$$

Então, a distância entre r e s é:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{144}{49} + \frac{16}{49} + \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{196}{49}} = \frac{14}{7} = 2.$$

2 Resolução (via geometria vetorial).

As retas r e s não são paralelas e então, ou são concorrentes ou são reversas.

Um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao plano π que contém a reta r e é paralelo à reta s se e somente se [note que $(1, 1, 0)$ pertence a r]:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 6(x-1) - 2(y-1) + 3z = 6x - 2y + 3z - 4.$$

A distância procurada é então a distância de qualquer ponto de s ao plano π . Escolhendo $(1, 5, -2)$ em s obtemos (utilizando a fórmula para a distância):

$$d = \frac{|6 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{14}{7} = 2 \blacksquare$$

Exemplo 7. Seja $z = f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verifique:

- (a) $O = (0, 0)$ é o único ponto crítico.
- (b) O teste do hessiano é inconclusivo para classificar tal ponto crítico.
- (c) f restrita a qualquer reta $y = mx$ por O tem em O um mínimo local.
- (d) f não conserva sinal em nenhuma vizinhança de O , que é de sela.

Solução.

- (a) É claro que $\vec{\nabla} f = (2x(4x^2 - 3y), -3x^2 + 2y) = O$ se e só se $(x, y) = O$.
- (b) Temos $f_{xx} = 24x^2 - 6y$, $f_{xy} = f_{yx} = -6x$ e $f_{yy} = 2$. Logo, o determinante hessiano em $(0, 0)$ é $Hf(0, 0) = 0$.
- (c) Seja $\varphi(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 2x^2) = 2x^4 - 3mx^3 + m^2x^2$, com m uma constante real. Valem as fórmulas, $\varphi'(x) = 8x^3 - 9mx^2 + 2m^2x$, $\varphi''(x) = 24x^2 - 18mx + 2m^2$, $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = m^2 > 0$, se $m \neq 0$. Logo, o ponto $x = 0$ é ponto de mínimo local de φ , se $m \neq 0$. Se $m = 0$ temos $f(x, 0) = 2x^4$ e é claro que $x = 0$ é então ponto de mínimo de φ .
- (d) Nas regiões $\{(x, y) : y > 2x^2\}$, $\{(x, y) : x^2 < y < 2x^2\}$ e $\{(x, y) : y < x^2\}$ temos $f > 0$, $f < 0$ e $f > 0$, respectivamente. Notemos que para $x \approx 0$, com $x \neq 0$, os pontos (x, mx) da reta pertencem à região em que $f > 0$ ■

No exemplo abaixo, identificamos vetores (e pontos) em \mathbb{R}^2 com matrizes-colunas em $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$ e fixamos a base usual de \mathbb{R}^2 , $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 8. Seja $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, no aberto Ω de \mathbb{R}^2 , com ponto crítico O . Sejam $Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ e $\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$, avaliadas em P arbitrário.

(a) Suponhamos $f_{xx}(P) \neq 0$ e as matrizes abaixo avaliadas em P . Verifique: definindo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{f_{xy}}{f_{xx}} & 1 \end{pmatrix}$ e $N^T = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{f_{xy}}{f_{xx}} & 1 \end{pmatrix}$ obtemos

$$M\mathcal{H}fM^T = \begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & \frac{Hf}{f_{xx}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}f = N^T \begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & \frac{Hf}{f_{xx}} \end{pmatrix} N.$$

(b) Utilizando a representação diagonal para $\mathcal{H}f$ e o Corolário 4 mostre:

- O é ponto de mínimo local estrito, se $f_{xx}(O) > 0$ e $\frac{Hf}{f_{xx}}(O) > 0$.
- O é ponto de máximo local estrito, se $f_{xx}(O) < 0$ e $\frac{Hf}{f_{xx}}(O) < 0$.

(c) O é ponto de sela, se $Hf(O) < 0$.

Dicas em (c). Sejam $a = f_{xx}(O)$, $b = f_{xy}(O)$, $c = f_{yy}(O)$ e $N = N(O)$.

- No caso $a \neq 0$, considere os vetores u e v , ambos em \mathbb{R}^2 , definidos por $Nu = e_1$ e $Nv = e_2$, e mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(O) = a$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(O) = \frac{Hf(O)}{a}$.
- O caso $b \neq 0$ segue do caso acima, considerando $g(x, y) = f(y, x)$.
- Se $a = c = 0$, para $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, avalie $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(O)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(O)$.

Outra sugestão para (c). Compute $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(O) = v^T \mathcal{H}f(O)v$ nos casos:

- Se $a \neq 0$, para $v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Se $c \neq 0$, para $v = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}$.
- Se $a = c = 0$, para $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e para $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3 - O Hessiano em Três Variáveis

É fácil generalizar esta seção para matrizes simétricas de ordem $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 7. *Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

com menores principais de ordens 1, 2 e 3,

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad e \quad \Delta_3 = \det A,$$

não nulos. Então, existe $M \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\det M = 1$ e

$$M^T A M = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \end{pmatrix} = D.$$

Prova.

Obteremos D a partir de A pelo método da eliminação (Gauss) e de operações elementares realizadas pela multiplicação por matrizes (elementares) com determinante 1. Lembremos que multiplicar uma linha ou coluna por um número e então adicioná-la a uma outra linha ou coluna, respectivamente, é uma operação elementar que não altera o determinante da matriz.

Na **etapa 1** inicialmente multiplicamos a 1 linha de A por $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ e somamos à 2 linha e, ainda, multiplicamos a 1 linha por $-\frac{a_{13}}{a_{11}}$ e somamos à 3 linha. Efetuamos tais operações, que comutam, multiplicando a matriz A à esquerda, respectivamente, pelas matrizes

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{13}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A seguir, na matriz obtida efetuamos operações nas colunas correspondendo as feitas nas linhas: multiplicamos a 1 coluna por $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ e somamos na 2 coluna e multiplicamos a 1 coluna por $-\frac{a_{13}}{a_{11}}$ e somamos na 3 coluna. Efetuamos tais operações multiplicando a matriz à direita por M_1^T e M_2^T .

Resumindo as quatro operações obtemos,

$$M_2 M_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} M_1^T M_2^T = D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix},$$

onde $a_{22}^{(1)}$, $a_{23}^{(1)}$ e $a_{33}^{(1)}$ são os coeficientes que surgem ao final da etapa 1.

Devido às operações realizadas os respectivos menores principais das matrizes simétricas A e D_1 são iguais. Consequentemente temos,

$$a_{11} a_{22}^{(1)} = \Delta_2 \implies a_{22}^{(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}.$$

Na etapa 2 multiplicamos a segunda linha de D_1 por $-\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ e somamos à terceira linha, representando tal operação pela matriz M_3 , e completamos efetuando a operação correspondente nas colunas de D_1 , representada (a operação) pela matriz M_3^T . Obtemos então,

$$\begin{aligned} M_3 D_1 M_3^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = D_2. \end{aligned}$$

Analogamente à etapa 1, devido às operações efetuadas, os três menores principais de D_2 são iguais a seus respectivos em A e D_1 . Isto é,

$$\begin{aligned} a_{11} = \Delta_1, \quad a_{11} a_{22}^{(2)} = \Delta_2, \quad a_{11} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(2)} = \Delta_3, \\ a_{22}^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \quad \text{e} \quad a_{33}^{(2)} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}. \end{aligned}$$

Por fim, notemos que $M^T A M = D_2$ com $M^T = M_3 M_2 M_1$ e $\det M = 1$ ■

Corolário 8. Definindo $N^T = M^{-1}$, temos

$$A = N^T D N, \quad \text{com} \quad \det N = 1.$$

Prova. Trivial ■

Lembrete. Duas matrizes quadradas A e B , ambas em $M_n(\mathbb{R})$, são congruentes se existe M inversível em $M_n(\mathbb{R})$ tal que $M^T A M = B$.

Notação. Fixemos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, a base canônica do espaço vetorial tridimensional \mathbb{R}^3 . Seja O a origem no espaço cartesiano tri-dimensional \mathbb{R}^3 .

Identificamos vetores (e pontos) em \mathbb{R}^3 com matrizes-colunas em $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v.$$

Observemos que $v^T = (v_1, v_2, v_3)$.

Com tal identificação, dada $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ definimos a aplicação linear

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

por

$$T(\vec{v}) = Av, \text{ para } \vec{v} \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Identificando $T \equiv A$, escrevemos

$$A(\vec{v}) = Av.$$

Dada um função $f = f(x, y, z)$ de classe C^2 , sua matriz hessiana é

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Sejam x e y números reais.

- O sinal de x é $+1$ se $x > 0$, -1 se $x < 0$ e 0 se $x = 0$.
- Se $x > 0$ e $y < 0$, então x e y tem sinais opostos.
- Se $x \geq 0$, então x é positivo.
- Se $x \leq 0$, então x é negativo.
- Se $x > 0$, então x é estritamente positivo.
- Se $x < 0$, então x é estritamente negativo.

Teorema 9. Seja $f \in C^2(\Omega)$, com Ω aberto e ponto crítico O . Sejam

$$f_{xx}(O), \quad H_1 f(O) = H_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} (O) \quad \text{e} \quad H f(O) = H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} (O).$$

(a) Supondo estes três números não nulos, valem as propriedades a seguir.

(i) O é ponto de mínimo local estrito, se os três são maiores que zero.

(ii) O é ponto de máximo local estrito, se $f_{xx} < 0$, $H_1 > 0$ e $H < 0$.

(iii) O é ponto de sela, se (a)(i) e (a)(ii) não ocorrem.

(b) O é um ponto de sela, se ocorre qualquer das condições abaixo em O .

(i) Existem números na diagonal principal de $\mathcal{H}f$ com sinais opostos.

(ii) Ou $H_1 < 0$ ou (por analogias) $f_{xx}f_{zz} - f_{xz}^2 < 0$ ou $f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2 < 0$.

Prova.

(a) Por continuidade, f_{xx} , $H_1 f$ e $H f$ não se anulam em alguma $B(O; r)$, $r > 0$. Supondo $0 < |\vec{v}| < r$, como no plano, existe $\bar{P} \in B(O; r)$ tal que

$$f(O + \vec{v}) = f(O) + \frac{v^T \mathcal{H}f(\bar{P})v}{2}.$$

Pela Proposição 7 temos $\mathcal{H}f(\bar{P}) = N^T D N$, onde $N = N(\bar{P})$ e $D = D(\bar{P})$, sendo que N é uma matriz inversível e $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz diagonal com $d_{11} = f_{xx}$, $d_{22} = \frac{H_1}{f_{xx}}$ e $d_{33} = \frac{H}{H_1}$. Logo,

$$f(O + \vec{v}) = f(O) + \frac{(Nv)^T D (Nv)}{2}.$$

(i) Segue da identidade imediatamente acima.

(ii) Segue do item (a)(i) aplicado à função $-f$.

(iii) Sejam $D = D(O)$ e $N = N(O)$. A diagonal de D tem elementos com sinais opostos e $\mathcal{H}f(O) = N^T D N$. Como N é inversível, para cada $i = 1, 2, 3$ existe um vetor ϵ_i tal que $N\epsilon_i = e_i$. Assim,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\epsilon}_i^2}(O) = \epsilon_i^T \mathcal{H}f(O) \epsilon_i = (N\epsilon_i)^T D (N\epsilon_i) = e_i^T D e_i = d_{ii}.$$

Logo, O não é ponto de máximo nem mínimo local. É de sela.

- (b) (i) Trivial, pois f_{xx} , f_{yy} e f_{zz} tem a forma $\partial f / \partial v^2$ para $v = e_1, e_2, e_3$.
(ii) Definindo $F(x, y) = f(x, y, 0)$, temos $\nabla F(0, 0) = 0$ com hessiano $HF(0, 0) = H_1 f(0, 0, 0) < 0$. Pelo caso bi-dimensional, $(0, 0)$ é ponto de sela de F . Donde, $O = (0, 0, 0)$ é ponto de sela de f ■

Exemplo 9. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2 .$$

Solução. Temos, $\nabla f = (3(x^2 - 1), 3(y^2 - 1), 3(z^2 - 1))$ e e 8 pontos críticos:

$$P = (\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Como as derivadas parciais em uma variável são funções independentes das demais variáveis, as derivadas mistas f_{xy} , f_{xz} e f_{yz} são nulas. Donde,

$$Hf(P) = \begin{vmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{vmatrix} , \quad H_1(P) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} .$$

Pelo Teste do Hessiano, são de sela os pontos (a diagonal muda de sinal):

$$(1, -1, -1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1).$$

O ponto $(1, 1, 1)$, com $H_1 f > 0$, $Hf > 0$ e $f_{xx} > 0$, é de mínimo local. O ponto $(-1, -1, -1)$, com $H_1 f > 0$, $Hf < 0$ e $f_{xx} < 0$, é de máximo local ■

Exemplo 10. Estude com relação a extremantes locais e pontos de sela,

$$f(x, y, z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2 .$$

Solução. Temos $\vec{\nabla} f = (x^4 - x^2, 4y^3 - 4y, 4z^3)$. Os pontos criticos saem de

$$x^2(x^2 - 1) = 0, 4y(y^2 - 1) = 0, z = 0.$$

$$\text{Isto é, } \begin{cases} P_1 = (0, 0, 0) , & P_2 = (0, -1, 0) , & P_3 = (0, 1, 0), \\ P_4 = (1, 0, 0) , & P_5 = (1, -1, 0) , & P_6 = (1, 1, 0), \\ P_7 = (-1, 0, 0) , & P_8 = (-1, -1, 0) , & P_9 = (-1, 1, 0). \end{cases}$$

Temos, $f_{xx} = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$, $f_{yy} = 12y^2 - 4 = 4(3y^2 - 1)$, $f_{zz} = 12z^2$ e derivadas mistas nulas. Vejamos as matrizes em P_i (temos $z = 0$), $1 \leq i \leq 9$,

$$\mathcal{H}(f)(P_i) = \begin{pmatrix} 2x(2x^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(3y^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & f_{zz} = 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_1(f)(P_i) = \begin{pmatrix} 2x(2x^2 - 1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Como o (determinante) hessiano é zero, vejamos os sinais na diagonal de $\mathcal{H}f$. Os pontos críticos em que a diagonal de $\mathcal{H}f$ troca de sinal são de sela. Em P_4 temos $f_{xx} = 2$ e $f_{yy} = -4$; em P_8 e P_9 temos, $f_{xx} = -2$ e $f_{yy} = 8$.

Os pontos P_i , $i = 1, 2, 3$, tem a forma $P_i = (0, y_i, 0)$ com $y_i = 0, -1$ ou 1 , respectivamente, e são de sela: $x = 0$ não é máximo ou mínimo local da restrição $\varphi_i(x) = f(x, y_i, 0) = x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) + (y_i^4 - 2y_i^2)$ pois $(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) \approx -\frac{1}{3} < 0$ se $x \approx 0$ e x^3 é positivo à direita de zero e negativo à esquerda. Isto é,

$$f(x, y_i, 0) - f(0, y_i, 0) = x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3})$$

é > 0 ou < 0 conforme x se aproxima de 0 pela direita ou pela esquerda.

O ponto $P_7 = (-1, 0, 0)$ é de sela pois $\varphi(z) = f(-1, 0, z) = z^4 + \frac{2}{15}$ têm mínimo local estrito em $z = 0$ e $\psi(y) = f(-1, y, 0) = \frac{2}{15} + y^4 - 2y^2$, $\psi'' = 12y^2 - 4$ têm máximo local estrito em $y = 0$.

Os pontos $P_5 = (1, -1, 0)$ e $P_6 = (1, 1, 0)$ são de mínimo local pois as três funções de uma variável, $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$, $y^4 - 2y^2$ e z^4 têm mínimo local em $x = 1$, $y = \pm 1$ e $z = 0$, respectivamente, e considerando-as funções de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, as três têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$ e, a soma das três, que é f , têm mínimo local em $(1, \pm 1, 0)$.

Resposta. Pontos de mínimo local: P_5 e P_6 . Pontos de sela: os demais ■

4 - O Hessiano em Várias Variáveis

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^n tal que Ω contém a origem O .

Teorema 10. *Sejam $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, com ponto crítico O , e a matriz hessiana*

$$\mathcal{H}f = \mathcal{H}f(O) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_n} \end{pmatrix} (O).$$

Seja Δ_k , $1 \leq k \leq n$, o menor principal de ordem k dado pelo determinante da matriz $k \times k$ formada pelas primeiras k linhas e k colunas de $\mathcal{H}f(O)$.

- (a) *Supondo tais menores não nulos, classificamos O como ponto de*
- (i) *Mínimo local estrito, se tais menores são (estritamente) positivos.*
 - (ii) *Máximo local estrito, se $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0$, etc.*
 - (iii) *Ponto de sela, nas demais possibilidades para tais menores.*
- (b) *O é um ponto de sela, se ocorre qualquer das condições abaixo em O .*
- (i) *Existem números na diagonal principal de $\mathcal{H}f$ com sinais opostos.*
 - (ii) *$f_{x_i x_i} f_{x_j x_j} - f_{x_i x_j}^2 < 0$ para algum par de índices distintos i e j . [Em particular, se na diagonal temos $f_{x_i x_i} = 0$ e $f_{x_j x_j} = 0$ mas $f_{x_i x_j} \neq 0$.]*

Prova.

Analogamente ao Teorema 9, encontramos uma matriz $N \in M_n(\mathbb{R})$, com N um produto finito de matrizes que realizam a operação de multiplicar uma linha por um número e então somá-la em uma outra linha, tal que $\mathcal{H}f(P_0) = N^T D N$, $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz diagonal. Como os menores principais não mudam com cada operação temos $d_{11} = f_{xx} = \Delta_1$, $d_{11} d_{22} = \Delta_2$ e $d_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, \dots , $d_{jj} = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$. O restante da prova é análogo ao Teorema 9 ■

5 - Uma Aplicação em Álgebra Linear¹

No que segue aplicamos a fórmula de Taylor de ordem 2 e Multiplicadores de Lagrange para expressar o Teste da Derivada Segunda segundo o conceito de auto-valor de uma matriz.

Notação. Identificamos vetores em \mathbb{R}^n com matrizes-colunas em $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$:

$$X = (x_1, \dots, x_n) \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A aplicação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associada à matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é

$$T(X) = AX, \text{ onde } X \in \mathbb{R}^n$$

Um número real λ é um **auto-valor** de A se existe X em \mathbb{R}^n tal que $AX = \lambda X$.

Se a matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é simétrica, a forma quadrática associada a A é

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } Q(X) = X^T A X = \langle AX, X \rangle.$$

Lema 11. Se Q é a forma quadrática associada à matriz simétrica A então

$$\vec{\nabla} Q(X) = 2AX.$$

Prova.

Se $A = (a_{ij})$ então $AX = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$ e então, como $a_{ij} = a_{ji}$,

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2.$$

Logo,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 2 \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j + 2a_{kk}x_k = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \implies \vec{\nabla} Q(X) = 2AX \blacksquare$$

¹É bastante fácil provar via Álgebra Linear (mais o Teorema Fundamental da Álgebra e o conceito de produto interno complexo) que, dada A simétrica e real de ordem n , existe em \mathbb{R}^n uma base ortonormal de auto-vetores de A . Os respectivos auto-valores são as raízes, com suas multiplicidades, do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, com I a matriz identidade de $M_n(\mathbb{R})$. Mas, não utilizaremos tal fato. Vide Apostol [1], pp. 136-137.

Corolário 12. *Sejam M , o máximo, e m , o mínimo, da forma quadrática Q sobre a esfera unitária $\{X \in \mathbb{R}^n : |X| = 1\}$.*

- (a) M e m são, na ordem, o maior e o menor auto-valores (reais) de A .
- (b) $m|X|^2 \leq Q(X) \leq M|X|^2$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$.
- (c) Q é definida positiva se e só se todo auto-valor de A é maior que 0.
- (d) Q é definida negativa se e só se todo auto-valor de A é menor que 0.

Prova .

- (a) Por ser contínua Q assume máximo e mínimo sobre o compacto $S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n : |X| = 1\}$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, para cada ponto de máximo e de mínimo X na esfera unitária $S^{n-1} = g^{-1}(0)$, com $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla Q(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n),$$

e então, para tais pontos e pelo Lema 11 temos

$$2AX = \lambda 2X \Rightarrow AX = \lambda X ,$$

e assim, se X_M , com $|X_M| = 1$, é tal que $Q(X_M) = M$ e λ_M em \mathbb{R} é tal que $AX_M = \lambda_M X_M$, temos

$$M = Q(X_M) = \langle AX_M, X_M \rangle = \lambda_M |X_M|^2 = \lambda_M,$$

e, também, $AX_m = \lambda_m X_m$, $|X_m| = 1$ e $m = Q(X_m) = \langle AX_m, X_m \rangle = \lambda_m$. Ainda, se o número real λ é auto-valor de A , é claro que existe \vec{v} unitário tal que $A(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$. Neste caso temos $m \leq Q(\vec{v}) \leq M$ e, ainda, $Q(\vec{v}) = \langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda |\vec{v}|^2 = \lambda$. Donde $m \leq \lambda \leq M$.

- (b) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ então,

$$m \leq Q\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) \leq M \implies m \leq \left\langle A\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right), \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right\rangle \leq M \implies m \leq \frac{Q(\vec{v})}{|\vec{v}|^2} \leq M .$$

- (c) e (d) Seguem trivialmente de (b) ■

Lema 13. Seja $f \in C^2(B(a; r))$, com $B(a; r) \subset \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, onde a é um ponto crítico de f e $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\vec{v}| < r$. Então,

$$f(a + \vec{v}) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j + |\vec{v}|^2 E(a; \vec{v}), \quad \text{com } \lim_{\vec{v} \rightarrow 0} E(a; \vec{v}) = 0.$$

Prova.

Seja $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Aplicando à função $\varphi(t) = f(a + t\vec{\omega})$, t variando em $(-r, r)$, a Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal temos

$$(13.1) \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + t^2 E(0; t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} E(0; t) = 0,$$

com, analogamente ao mostrado no plano,

$$\varphi(0) = f(a), \quad \varphi'(0) = \langle \nabla f(a), \vec{\omega} \rangle = \frac{\partial f}{\partial \vec{\omega}}(a) = 0 \quad \text{e}$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \vec{\omega}}(a) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \omega_i \omega_j.$$

Substituindo tais expressões em (13.1) obtemos

$$f(a + t\vec{\omega}) = f(a) + \frac{t^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \omega_i \omega_j + t^2 E(0; t) \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow 0} E(0; t) = 0.$$

Por fim, basta substituir $t = |\vec{v}|$, $\omega = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e notar a identidade $|\vec{v}|^2 \omega_i \omega_j = v_i v_j$ ■

Teorema 14. Sejam $f \in C^2(B(a; r))$, com $B(a; r) \subset \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a um ponto estacionário de f e

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j, \quad \text{com } v = (v_1, \dots, v_n) \text{ um vetor em } \mathbb{R}^n.$$

São válidas as seguintes afirmações sobre os auto-valores de $\mathcal{H}f(a)$.

- (a) Se todos são maiores que 0, então f tem um mínimo local em a .
- (b) Se todos são menores que 0, então f tem um máximo local em a .
- (c) Se houver auto-valores com sinais opostos, então a é um ponto de sela.

Prova.

- (a) Se $m > 0$ é o menor auto-valor de $\mathcal{H}f(a)$, pelo Corolário 12(b) temos $Q(v) \geq m|v|^2$, para todo v em \mathbb{R}^n . Ainda, pelo Lema 13 e sua notação, vemos que existe $\delta > 0$ tal que $|E(a; v)| < \frac{m}{4}$ se $0 < |v| < \delta$ e então,

$$f(a + \vec{v}) - f(a) = \frac{1}{2}Q(v) + |v|^2 E(a; v) \geq \frac{m}{2}|v|^2 - \frac{m}{4}|v|^2 = \frac{m}{4}|v|^2 > 0.$$

- (b) Segue de (a), trocando f por $-f$.

- (c) Se λ é auto-valor de $\mathcal{H}f(a)$ e v é vetor unitário e $\mathcal{H}f(a)v = \lambda v$ então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}^2}(a) = Q(v) = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda |v|^2 = \lambda.$$

Logo, $\partial^2 f / \partial \vec{v}^2(a)$ troca de sinal e então a é um ponto de sela ■

Corolário 15. Se A é simétrica e $Q(X) = \langle AX, X \rangle > 0$, $\forall X \neq 0$, então os menores principais $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, de A , são estritamente positivos.

Prova. Por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial.

Suponhamos a afirmação válida para n . Consideremos o caso $n + 1$. Então, $Q(e_1) = \Delta_1 > 0$. Analogamente à Proposição 7, existe N inversível tal que

$$A = N^T B N, \quad \text{sendo } B = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right)$$

simétrica [logo, A_1 é matriz simétrica de ordem n] e com mesmos menores principais que A . É fácil ver que Q_{A_1} é definida positiva (pois N é inversível). Por hipótese de indução, os menores principais de A_1 são maiores que 0. Logo, como $\Delta_1 > 0$, os menores principais de B (e de A) também ■

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1960.
2. Apostol, T. M., *Cálculo*, Vol 2., Editora Reverté, 1999.
3. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol 1 e 2, 5 ed., Ed. LTC.
4. Lima, E., *Curso de Análise*, Vol 2., IMPA, 2009.
5. Simmons, G. F., *Cálculo com Geometria Analítica*, 2, McGraw-Hill.
6. Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer-Verlag.

Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo,

e-mail: oliveira@ime.usp.br