

MAT 211 - Cálculo III - IMEUSP
1^o semestre de 2012
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

3^a LISTA DE EXERCÍCIOS

1. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
(b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
(c) Utilizando o teorema enunciado em (a) prove o teorema enunciado em (b).
2. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
(b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
(c) Utilizando o teorema enunciado em (a), prove o teorema enunciado em (b).
3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por,

$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^4y + x, x + y^3).$$

- (a) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(1, 1)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(1, 1)$] e que sua função inversa G é de classe C^1 em uma vizinhança do ponto $F(1, 1) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0) .
 - (b) Determine $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$.
4. Suponha que as três equações: $F(u, v) = 0$, $u = xy$, e $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ definem uma superfície no espaço tri-dimensional $Oxyz$. Determine o vetor normal a esta superfície no ponto $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}$, sabendo que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 2) = 1$ e $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 2) = 2$.

5. As três equações

$$\begin{cases} x^2 - y \cos(uv) + z^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = 2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z & = 0, \end{cases}$$

definem x , y e z , como funções de u e v . Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial x}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial x}{\partial v}$$

no ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$.

6. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.
- (a) $f(x, y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4\}$
 - (b) $f(x, y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - (c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ sobre $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
 - (d) $f(x, y) = x + 5y$ em $K = \{(x, y) : 5x + 6y \leq 30, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.
 - (e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $K = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.
 - (f) $f(x, y) = xy, A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$.
7. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.
8. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:
- a) $f(x, y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leq 1$
 - b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$
 - c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$
 - d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$
 - e) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1, x > 0$ e $y > 0$.
9. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x, y, z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.
10. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.
11. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.
12. Determine o ponto da reta r abaixo que está mais próximo da origem:
- $$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$
13. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.
14. Maximize $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

15. Ache um ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e um ponto Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

16. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x, y) = y^2 - x^2$ restrita ao disco compacto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

17. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 .$$

18. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ e as restrições

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$

(a) Existem o máximo e o mínimo de f sujeita tais restrições? Justifique.

(b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo e seus valores.

19. **Desigualdade das Médias aritméticas e geométricas.** Utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange mostre que dados $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ então,

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

20. Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 .$$

21. Dada $f(x, y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1, +1] \times [-1, +1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\}.$$