

No plano euclidiano consideremos  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos (**focos**) distintos.

### ELIPSE

- (1) Se  $2a$  é um comprimento fixo e maior que a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ , o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é  $2a$  é uma **elipse**.

A **equação padrão da elipse** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

**Solução:** Seja  $s$  a reta por  $F_1$  e  $F_2$  (desenhe) e  $C$  o ponto médio entre  $F_1$  e  $F_2$ .

Trace por  $C$  a reta  $t$ , perpendicular a  $s$  e mediatriz do segmento  $\overline{F_1F_2}$ .

Só há 2 pontos em  $t$  com soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  igual a  $2a$  (distam  $a$  de  $F_1$  e  $F_2$ ), simétricos em relação à reta  $s$ , contendo  $F_1$  e  $F_2$ .

Por semelhança de triângulos é claro que se  $P$  é um ponto da elipse,  $P'$ , o seu simétrico em relação a  $s$ , também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a  $s$ .

Para o mesmo  $P$ , o ponto  $P''$ , simétrico de  $P$  em relação a  $t$  (perpend. a  $\overline{F_1F_2}$ ), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é  $d$ . Verifique.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares ( $t$  e  $s$ ) e um centro e para desenhá-la basta fazê-lo em um quadrante e então refletir em relação às retas  $t$  e  $s$ .

Escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxy$  tal que  $Ox$ , o eixo  $x$ , corresponda à reta  $t$ ,  $Oy$  à reta  $s$  e adotemos  $O = C$ , o ponto médio entre os focos, como a origem.

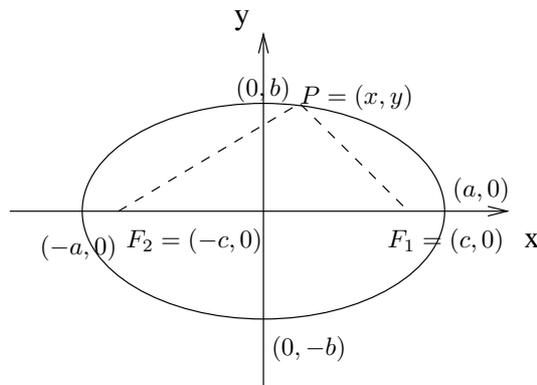


Figura 1: Focos, Vértices e Polos - Elipse

Nesse sistema temos os seguintes elementos para uma elipse (vide figura acima):

- Focos:  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ , com  $c > 0$ .
- Vértices:  $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$ .
- Polos:  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$ , com  $b > 0$ .
- Eixo maior:  $\overline{A_1A_2}$ .
- Eixo-menor:  $\overline{B_1B_2}$ .
- Semi-eixo maior é o número  $a$ .
- Semi-eixo menor é o número  $b$ .
- Distância focal é o número  $2c$ .
- Semi-distância focal é o número  $c$ .
- Excentricidade é o número  $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo maior}} < 1$ .

É claro que  $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_1F_2}| = a$  e

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 .$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a .$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF'}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois  $|\overline{PF'}| = 2a - |\overline{PF}|$ . O quadrado dessas equações é

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \mp 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando,  $(\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2$  ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Lembrando que  $a^2 = b^2 + c^2$  obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

## HIPÉRBOLE

- (2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante e igual a  $2a$ ,  $a > 0$ , é uma **hipérbole**.

A **equação padrão da hipérbole** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

### Obs 1:

Se  $P$ , no plano, não é um foco, pela desigualdade triangular temos  $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$ . Logo,  $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$  e, mutatis mutandis,  $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$ . Assim,

$$| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| | \leq |\overline{F_1F_2}|, \quad \forall P.$$

A **condição de existência** da hipérbole é então:  $2a < |\overline{F_1F_2}|$ .

**Obs 2:** Para  $P$  na hipérbole temos  $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$  ou  $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$ . Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \quad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a.$$

O **ramo direito (esquerdo) da hipérbole** é obtido atribuindo o sinal  $+$  ( $-$ ) em (H).

**Solução** Seja  $Oxy$  um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo  $x$  contendo  $\overline{F_1F_2}$  e por eixo  $y$  a mediatriz deste segmento. Vide figura abaixo.

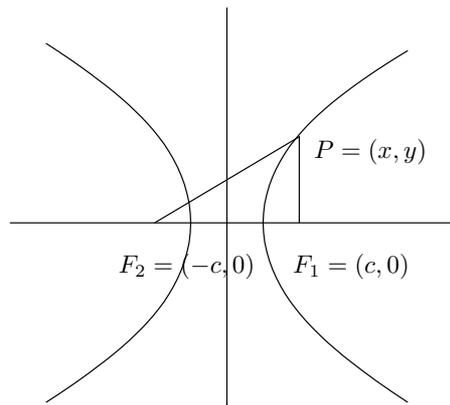


Figura 2: Hipérbole-Focos

Supondo  $|\overline{F_1F_2}| = 2c$  ( $0 < a < c$ ) temos:  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ ,  $c > 0$ .

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas cartesianas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e então elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = [\pm 2a + \overline{PF_1}]^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{PF_1} + (x-c)^2 + y^2 ,$$

donde

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\overline{PF_1}$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right) ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que  $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$ . Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da hipérbole e o negativo ao ramo esquerdo. Os quadrados destas equações fornecem:

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2 ;$$

que reduzimos a,

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2 ,$$

ou,

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 .$$

Pela condição de existência,  $0 < a < c$ , temos  $c^2 - a^2 > 0$  e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

(vide triângulo retângulo de catetos  $a$  e  $b$  e hipotenusa  $c$  na Figura 3 a seguir) e substituindo em (4):

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

### Elementos de uma hipérbole:

- Focos:  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$ , com  $c > 0$ .
- Centro: o ponto médio do segmento  $\overline{F_1F_2}$ .
- Vértices:  $A_1 = (a, 0)$  e  $A_2 = (-a, 0)$ , com  $a > 0$ .
- Eixo real: o segmento  $\overline{A_1A_2}$  e, também, o comprimento,  $2a$ , deste segmento.
- Semi-eixo real: o número  $a$ .
- Eixo principal: a reta contendo os focos e o eixo real.
- Eixo transverso ou imaginário ou conjugado: a reta mediatriz de eixo real.
- Distância focal: o número  $2c = |\overline{F_1F_2}|$ .
- Semi-distância focal: o número  $c$ .
- Semi-eixo transverso: o número  $b > 0$  definido pela relação  $b^2 = c^2 - a^2$ .
- Assíntotas: as retas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$ .
- Excentricidade: é o número  $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo real}} > 1$ .

Note também o triângulo retângulo de vértices em  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  e  $(a, b)$ .

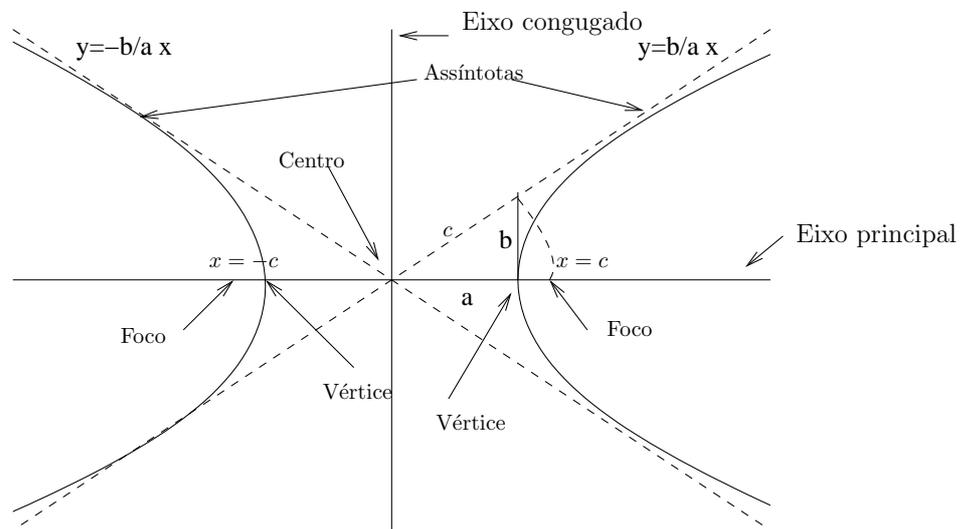


Figura 3: Hipérbole- Elementos

## PARÁBOLA

- (3) Fixados no plano euclidiano, um ponto  $F$  (foco) e uma reta  $d$  (diretriz),  $F \notin d$ , o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias a  $F$  e a  $d$  são iguais é uma **parábola**.

A **equação padrão da parábola** é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 = 4py, \quad p > 0.$$

**Obs** A parábola é simétrica em relação à reta por  $F$  perpendicular a  $d$ , dita **eixo de simetria da parábola**. O ponto médio entre  $F$  e a projeção de  $F$  sobre  $d$  (equidistante entre  $F$  e  $d$ ) é o ponto da parábola mais próximo de  $d$  e dito **vértice da parábola**.

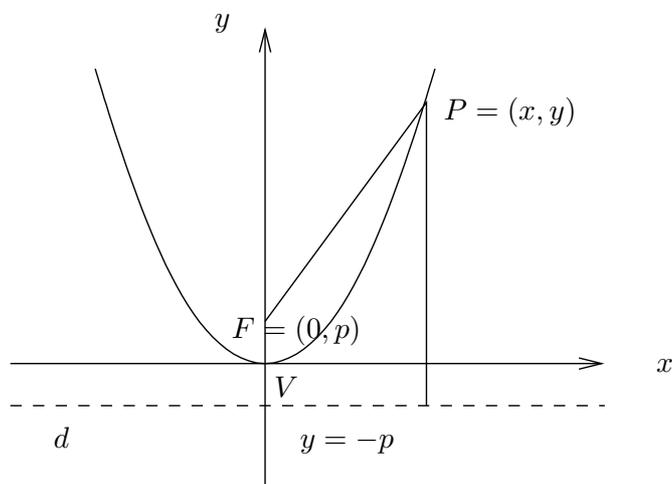


Figura 4: Parábola

### Resolução

Seja  $Oxy$  um sistema cartesiano de coordenadas tal que: (i) o eixo  $y$  corresponde ao eixo de simetria (ii) a origem ao vértice, (iii) o eixo  $x$  à reta pela origem, paralela a  $d$  e, (iv) orientemos o eixo  $y$  tal que  $F = (0, p)$ ,  $p > 0$ . Assim,  $d$  tem por equação  $y = -p$ .

Seja  $P = (x, y)$  um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py.$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

**Obs** A constante  $p > 0$  é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

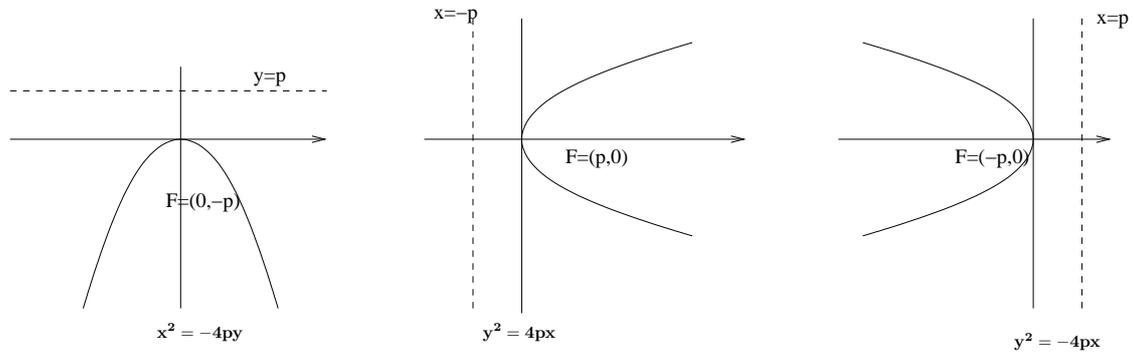


Figura 5: posições e equações- parábolas