

MAT 2127 - CÁLCULO II - IQUSP
2º semestre de 2013
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**TEOREMAS: DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI),
SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS,
DE ROLLE,
DO VALOR MÉDIO (TVM),
VALOR INTERMEDIÁRIO PARA DERIVADAS (DARBOUX),
DO VALOR MÉDIO GENERALIZADO (CAUCHY) E
REGRAS DE L'HOSPITAL**

Nesta seção apresentamos sete teoremas, provando os cinco relativos à **derivação** e apenas enunciando os dois imediatamente abaixo relativos a **continuidade**.

Teorema do Valor Intermediário (TVI) (Bolzano). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então a imagem de f , $Im(f) = f([a, b])$, é um intervalo. Isto é, dado um número y satisfazendo $f(x_1) < y < f(x_2)$, com x_1 e x_2 ambos em $]a, b[$, então existe x em $]a, b[$ tal que $f(x) = y$.*

Prova. Guidorizzi, L. H., “Um Curso de Cálculo”, V. 1, 5ª ed., p. 511, LTC Editora, 2001.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f assume máximo e mínimo em $[a, b]$. Isto é, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Prova. Guidorizzi, L. H., “Um Curso de Cálculo”, V. 1, 5ª ed., p. 511, LTC Editora, 2001.

A seguir, utilizando os resultados acima provamos os próximos.

Condição Necessária para Máximos e Mínimos *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Se $x_0 \in (a, b)$ é ponto de máximo ou mínimo, local, de f então $f'(x_0) = 0$.*

Prova.

Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor x_0 um ponto de mínimo local. Assim, se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in (a, b)$ temos $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ e

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \text{ se } h > 0, \text{ e } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \text{ se } h < 0.$$

Logo, como existe a derivada $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ e então $f'(x_0) = 0$ ■

Teorema de Rolle. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Prova.

Se f é constante o resultado é óbvio. Senão, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass f assume um mínimo $m = f(x_1)$ e um máximo $M = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in [a, b]$ e $m \neq M$. Logo, como $f(a) = f(b)$, temos ou $x_1 \in (a, b)$ ou $x_2 \in (a, b)$. Isto é, ou x_1 é um ponto de mínimo local e $f'(x_1) = 0$ ou x_2 é um ponto de máximo local e $f'(x_2) = 0$ ■

Teorema do Valor Médio (TVM). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Então, existe c no intervalo aberto (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prova.

Considerando a equação da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$,

$$S(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a), \quad t \in \mathbb{R},$$

definimos a função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) ,

$$\varphi(t) = f(t) - S(t), \quad t \in [a, b].$$

É claro que $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$ e então, pelo Teorema de Rolle aplicado à função φ , existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - S'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \blacksquare$$

Interpretação física do Teorema do Valor Médio. Se um objeto puntual move-se sobre uma reta e se $s(t)$, $s : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, indica a distância em metros deste objeto em relação à origem adotada na reta, no instante t medido em segundos então o Teorema do Valor Médio expressa que em algum instante $t_0 \in [t_1, t_2]$ a velocidade instantânea $v(t_0) = s'(t_0)$ é igual à velocidade média $v_{\text{média}}$ no período $[t_1, t_2]$:

$$s'(t_0) = v(t_0) = v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \blacksquare$$

Propriedade do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$. Então, a imagem de f' é um intervalo.*

Prova.

Suponhamos a situação $f'(c) < \lambda < f'(d)$, com c e d em $[a, b]$, e mostremos que existe l em (c, d) tal que $f'(l) = \lambda$. Analisemos dois casos.

- O caso $\lambda = 0$. Então temos $f'(c) < 0$ e $f'(d) > 0$. Logo, para x em um pequeno intervalo não degenerado $(c, c + \epsilon)$ temos $[f(x) - f(c)]/(x - c) < 0$ e portanto $f(x) < f(c)$. Para x em um pequeno intervalo não degenerado $(d - \epsilon, d)$ temos $[f(x) - f(d)]/(x - d) > 0$ e portanto $f(x) < f(d)$. Desta forma, o ponto de mínimo $x = l$ de $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ (garantido pelo Teorema de Weierstrass) pertence ao intervalo aberto (c, d) . Temos assim, $f'(l) = 0 = \lambda$.
- O caso geral. Basta vermos que $g(x) = f(x) - \lambda x$ satisfaz $g'(c) < 0 < g'(d)$ ■

Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a, b) , com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Prova.

Inicialmente notemos que $g(b) - g(a) \neq 0$ pois caso contrário, pelo Teorema de Rolle existiria $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$, contra a hipótese.

Consideremos a função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) ,

$$\varphi(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t), t \in [a, b].$$

Temos, é claro, $\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ e $\varphi(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$; logo, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Assim, pelo TVM existe c em (a, b) tal que

$$0 = \varphi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c),$$

donde finalmente segue $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$ ■

Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio Generalizado:

Esboçando no plano a curva $\gamma(t) = (g(t), f(t))$, $t \in [a, b]$, e a reta S pelos pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ vemos que existe uma reta T tangente à curva γ , em algum ponto $\gamma(c)$, e paralela à reta S . Isto é, se m_T e m_S são os coeficientes angulares de T e S temos,

$$m_T = m_S = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Note que geometricamente o vetor tangente à curva γ no ponto c é o vetor

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{\gamma(t) - \gamma(c)}{t - c} = \lim_{t \rightarrow c} \left(\frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \lim_{t \rightarrow c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = (f'(c), g'(c)), \end{aligned}$$

interpretado fisicamente como o vetor velocidade da curva γ no “instante c ”.

Ainda mais, o coeficiente angular m_T da reta T , paralela ao vetor $\vec{\gamma}'(c)$, é a tangente do ângulo θ que o vetor forma com o eixo Ox (faça um esboço); logo,

$$m_T = \tan \theta = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \blacksquare$$

Regras de L'Hospital

Tais regras aplicam-se à análise das indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Mostremos que são também indeterminações

$$(i) 0 \cdot \infty, \quad (ii) \infty - \infty, \quad (iii) 0^0, \quad (iv) \infty^0 \quad \text{e} \quad (v) 1^\infty.$$

Prova. Temos,

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{13}{x}} = 13.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 15) - x = 15.$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{\ln \pi}{x})^x = e^{\ln \pi} = \pi \quad \blacksquare$$

Estas cinco indeterminações são redutíveis às indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Por exemplo temos,

$$0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{0 \cdot (-\infty)} \quad ; \quad \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty} \quad ; \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} .$$

Atenção: 0^∞ não é indeterminação pois $0^\infty = e^{\infty \ln 0} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^\infty \in \{0, +\infty\}$.

Motivação às Regras de L'Hospital. Mostremos inicialmente uma versão simples e bem útil pois que aplicável em muitos casos. Suponhamos $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis (logo, contínuas) e $p \in (a, b)$ satisfazendo $f(p) = g(p) = 0$ e $g'(p) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} .$$

Verificação: Temos,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}{\frac{g(x) - g(p)}{x - p}} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}}{\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \quad \blacksquare$$

Exemplos: Temos, aplicando o resultado acima (confira que podemos aplicá-lo),

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1 - 0}{1} = 1 .$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1 \quad \blacksquare$$

1ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis em (p, b) e $g'(x) \neq 0, \forall x$. Se

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) \quad \text{e existir} \quad \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{finito ou infinito}),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obs: Vale regra similar nas quatro condições: “ $x \rightarrow p^-$ ”, “ $x \rightarrow p$ ”, “ $x \rightarrow +\infty$ ” e “ $x \rightarrow -\infty$ ”.

Prova:

Definindo $f(p) = g(p) = 0$ obtemos f e g contínuas em $[p, b)$ e deriváveis em (p, b) . Assim, dado $x \in (p, b)$ e aplicando o TVM generalizado ao intervalo $[p, x]$, existe $x_1 \in (p, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Desta forma, como $x_1 \rightarrow p^+$ se $x \rightarrow p^+$, concluímos

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \rightarrow p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \blacksquare$$

Observação: A 1ª regra de L'Hospital sob a condição “ $x \rightarrow p^-$ ” é trivialmente equivalente à 1ª regra de L'Hospital sob a condição “ $x \rightarrow p^+$ ” pois $x \rightarrow p^+ \Leftrightarrow -x \rightarrow -p^-$.

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis em (a, p) , com $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, p)$. Se

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow p^-} g(x) \text{ e existir } \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (finito ou infinito),}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obs: Vale regra similar nas quatro condições: “ $x \rightarrow p^+$ ”, “ $x \rightarrow p$ ”, “ $x \rightarrow +\infty$ ” e “ $x \rightarrow -\infty$ ”.

Prova:

Suponhamos $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$, os casos $L = 0$ e $L = \infty$ são deixados ao leitor.

Como f e g tendem a $+\infty$ quando $x \rightarrow p^-$, podemos assumi-las estritamente positivas.

Dado então $\epsilon > 0$, consideremos $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Por hipótese existe $\bar{a} \in (a, p)$ tal que

$$(1) \quad c \in [\bar{a}, p) \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} \in \left(L - \frac{\epsilon}{2}, L + \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Também podemos assumir x suficientemente próximo de p tal que $f(x) > f(\bar{a})$ e $g(x) > g(\bar{a})$. Desta forma, aplicando o TVM Generalizado para as funções f e g no intervalo $[\bar{a}, x]$ obtemos,

$$(2) \quad 0 < \frac{f(x) - f(\bar{a})}{g(x) - g(\bar{a})} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ para algum } c \in (\bar{a}, p).$$

Mas,

$$(3) \quad \frac{f(x) - f(\bar{a})}{g(x) - g(\bar{a})} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - \frac{f(\bar{a})}{f(x)}}{1 - \frac{g(\bar{a})}{g(x)}} \right)$$

e, como $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{g(\bar{a})}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(\bar{a})}{f(x)} = 0$, existe $\bar{\bar{a}} \in (\bar{a}, p)$ tal que

$$(4) \quad x \in (\bar{\bar{a}}, p) \implies \frac{1 - \frac{g(\bar{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\bar{a})}{f(x)}} \in (1 - \delta, 1 + \delta),$$

com $\delta > 0$, pequeno, e a ser convenientemente escolhido . Utilizando (3), (1) e (4) [por (2), $L \geq 0$ e portanto $L > 0$] supomos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $L - \frac{\epsilon}{2} > 0$ e obtemos,

$$x \in (\bar{\bar{a}}, p) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{1 - \frac{g(\bar{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\bar{a})}{f(x)}} \right) \in \left((L - \frac{\epsilon}{2})(1 - \delta), (L + \frac{\epsilon}{2})(1 + \delta) \right).$$

Finalmente, escolhemos $\delta > 0$ e suficientemente pequeno tal que (notemos o caso $\delta = 0$)

$$\left((L - \frac{\epsilon}{2})(1 - \delta), (L + \frac{\epsilon}{2})(1 + \delta) \right) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon) \quad [\text{basta } 0 < \delta < \frac{\epsilon/2}{L + \epsilon/2}] \quad \blacksquare$$