MAT 130 - EDO - IMEUSP

1º semestre de 2024

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Problema 14. A equação

$$e^x \sec y - \tan y + y' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(x,y) = e^{ax}\cos y.$$

Determine a e resolva a equação.

- **Primeira Solução, direta e sem fator integrante.**

  Multiplicando a equação dada por $\cos y$ encontramos

  $$e^x - \operatorname{sen} y + y'\cos y = 0.$$

  Com a substituição

  $$\mathbf{v} = \operatorname{sen} \mathbf{y}$$

  chegamos a

  $$e^x - v + v' = 0.$$

  Logo,

  $$v' - v = -e^x.$$

  Está é linear e trivial. Multiplicando por e^{-x} obtemos

  $$v'e^{-x} - ve^{-x} = -1.$$

  Donde,

  $$(ve^{-x})' = -1.$$

  A seguir, integrando,

  $$v(x)e^{-x} = -x + c, \text{ com } c \text{ uma constante real.}$$

Logo,

$$v(x) = (c - x)e^x.$$

Isto é,

$$\operatorname{sen} y = (c - x)e^x.$$

Por fim,

$$y(x) = \operatorname{arcsen}\left[(c - x)e^x\right].$$

Sugestão: recorde a derivada da função

$$\varphi(t) = \operatorname{arcsen}(t)$$

e constate a validade da resposta. Isto é, faça a “prova dos nove”.

- **Segunda Solução, seguindo a sugestão dada de fator integrante.** Esta segunda solução é muito útil pois explica e se aplica a casos gerais.

  - Ideia Central. *Consideremos uma função diferenciável*

    $$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

    É bem conhecido que são equivalentes as seguintes quatro afirmações: F é constante, as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são ambas nulas no plano, o gradiente ∇F é nulo no plano, o diferencial dF é nulo no plano. Assim, temos

    $$F \text{ é constante} \iff dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \text{ em todo ponto de } \mathbb{R}^2.$$

    Retornemos então ao problema em questão, a equação

    $$e^x \sec y - \tan y + y' = 0.$$

    Multiplicando-a pela sugestão

    $$\mu(x, y) = e^{ax} \cos y$$

    encontramos

    $$e^{ax}(\cos y)e^x \sec y - e^{ax}(\cos y) \tan y + e^{ax}(\cos y)y' = 0.$$

Isto é,

$$e^{(a+1)x} - e^{ax}\operatorname{sen} y + e^{ax}(\cos y)y' = 0.$$

Reescrevendo esta equação no formato diferencial encontramos

$$(*) \qquad [e^{(a+1)x} - e^{ax}\operatorname{sen} y]dx + e^{ax}(\cos y)dy = 0.$$

Apresentemos esta equação no formato usual em livros e aulas:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Seguindo a "ideia central", procuremos por $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y).$$

Notemos que as funções $M = M(x,y)$ e $N = N(x,y)$ são ambas de classe C^1 (estas, no exercício, são de classe C^∞). Então, o resultado principal sobre equações exatas garante que uma tal função $F = F(x,y)$ existe se valer a identidade

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

[Observe que isto equivale à regra de Schwarz: $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ para funções de classe C^2.] Assim sendo, impondo a identidade

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

obtemos

$$-e^{ax}\cos y = ae^{ax}\cos y.$$

Donde evidentemente segue

$$a = -1.$$

Substituindo $a = -1$ na equação (*) encontramos

$$(1 - e^{-x}\operatorname{sen} y)dx + e^{-x}(\cos y)dy = 0.$$

Então, agora procuremos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - e^{-x}\operatorname{sen} y \\ \text{e} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = e^{-x}\cos y \end{cases}$$

Integrando a primeira equação obtemos (tanto faz começar integrando a primeira equação ou a segunda equação)

$$(**) \qquad F(x,y) = x + e^{-x}\operatorname{sen} y + \Psi(y).$$

Derivando tal $F = F(x,y)$ em relação a y e comparando com a expressão já vista acima para esta mesma derivada parcial, obtemos

$$0 + e^{-x}\cos y + \psi'(y) = e^{-x}\cos y.$$

Donde então segue

$$\psi'(y) = 0.$$

Logo, temos

$$\Psi(y) = k_1, \text{ para alguma constante real } k_1.$$

Retornando à expressão (**) para a função F encontramos

$$F(x,y) = x + e^{-x}\operatorname{sen} y + k_1.$$

Lembrando da "ideia central" apresentada no início, temos

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

e portanto $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função constante. Isto significa

$$F(x,y) = k_2, \text{ para alguma constante real } k_2.$$

Por fim, eliminando k_1 e k_2, podemos escrever

$$x + e^{-x}\operatorname{sen} y = k, \text{ para alguma constante real } k.$$

Donde segue

$$\operatorname{sen} y = (k-x)e^{x}.$$

Por fim,

$$y(x) = \operatorname{arcsen}[(k-x)e^{x}] \clubsuit$$

Problema *

(b) Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(c) Mostre que duas soluções quaisquer do problema de valor inicial (PVI) do item (b) coincidem em algum intervalo aberto contendo 0.

Solução.

(c) Comecemos resolvendo o item (c).

Notemos que dado um número real qualquer r temos $\sqrt[5]{r^4} = (\sqrt[5]{r})^4$ e portanto não há dubiedade na expressão $r^{\frac{4}{5}}$.

Suponhamos que $y = y(x)$ é uma solução de (b) em uma pequena vizinhança da origem. Então, y é derivável, contínua, $y(0) = 0$ e portanto temos

$$y(x) \neq 1$$

nesta pequena vizinhança da origem, que consideremos fixa a partir daqui.

Ainda mais, como $y = y(x)$ é contínua e portanto $[y(x)-1]^{\frac{4}{5}}$ é também contínua, concluímos que $y' = y'(x) = 5[y(x)-1]^{\frac{4}{5}}$ também é contínua nesta vizinhança, além de não nula nesta pequena vizinhança da origem.

Desta forma podemos dividir por $y(x) - 1$ e temos

$$\frac{y'(x)}{[y(x)-1]^{\frac{4}{5}}} = 5.$$

Como y e y' são contínuas, podemos integrar e escrever

$$\int \frac{y'(x)}{[y(x)-1]^{\frac{4}{5}}} dx = \int 5dx.$$

Segue

$$5[y(x)-1]^{\frac{1}{5}} = 5x + c, \text{ para alguma constante real } c.$$

Donde segue

$$[y(x) - 1]^{\frac{1}{5}} = x + k, \text{ para alguma constante real } k.$$

Impondo a condição inicial $y(0) = 0$ encontramos

$$k = -1.$$

Segue então

$$[y(x) - 1]^{\frac{1}{5}} = x - 1.$$

Assim, nesta pequena vizinhança da origem temos

$$y(x) = (x - 1)^5 + 1.$$

Isto mostra que toda solução do PVI em uma pequena vizinhança da origem tem esta expressão. Logo, só existe uma solução do PVI em uma pequena vizinhança da origem.

Vale a unicidade da solução do PVI, em uma pequena vizinhança da origem. Pelo mostrado até aqui, duas soluções nesta pequena vizinhança da origem obrigatoriamente coincidem (pois são a mesma solução).

(b) **Soluções definidas em todo o $\mathbb{R}$.**

Primeira Solução Global (isto é, definida em todo o domínio). A função

$$Y_1(x) = (x - 1)^5 + 1, \text{ com } x \in (-\infty, +\infty),$$

está definidida em toda a reta e é uma solução do PVI. De fato, temos

$$\begin{cases} Y_1'(x) = 5(x-1)^4 = 5\left[(x-1)^5\right]^{\frac{4}{5}} = 5[Y_1(x) - 1]^{\frac{4}{5}} \\ Y_1(0) = 0. \end{cases}$$

Observação: Solução Estacionária Global. Notemos que a função

$$E(x) = 1, \text{ onde } x \in (-\infty, +\infty),$$

satisfaz

$$E'(x) = 5[E(x) - 1]^{\frac{4}{5}}, \text{ para todo } x \in (-\infty, +\infty).$$

Esta solução estacionária **NÃO É** solução do PVI, pois $E(0) = 1 \neq 0$.

Esta é a única solução estacionária (solução constante) de $y' = 5(y-1)^{\frac{4}{5}}$, como é evidente.

Utilizemos a solução $Y_1(x)$ e a solução estacionária $E(x)$ para formar uma outra solução do PVI.

Detectemos onde os gráficos de $Y_1 = Y_1(x)$ e de $E = E(x)$ se encontram. Temos então

$$(x-1)^5 + 1 = 1.$$

[Visualize o gráfico de Y_1. Imagine o gráfico de $f(x) = x^5$ (é parecido com o de x^3 e com uma inflexão em $x = 0$), translade-o uma unidade para a direita e, por fim, suba-o uma unidade ... voilá!).]

Segue

$$x = 1.$$

Fixemos então o ponto na reta real

$$p = 1.$$

Observe que

$$Y_1'(1) = 0 \;\text{ e }\; E'(1) = 0.$$

Segunda Solução Global do PVI. Definamos

$$Y_2(x) = \begin{cases} Y_1(x), \;\text{se } x \in (-\infty, 1] \\ \\ E(x), \;\text{se } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

É fácil ver que Y_2 é uma solução (global) do PVI.

Infinitas Soluções Globais do PVI. Fixemos uma real arbitrário $p > 1$. Definamos

$$\rho(x) = 1 + (x-p)^5.$$

Tal função satisfaz a edo dada pois

$$\rho' = 5(\rho - 1)^{\frac{4}{5}}.$$

O gráfico de ρ cruza o gráfico da função estacionária se $x = p$. Isto é, se dá no ponto $(p, 1)$.

Ainda mais, temos

$$\rho'(p) = 0 \text{ e } \; E'(p) = 0.$$

Fixado um real arbitrário $p > 1$, definamos a função

$$P(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^5, & \text{se } x \in (-\infty, 1] \\ 1, & \text{se } x \in [1, p] \\ 1 + (x-p)^5, & \text{se } x \in [p, +\infty). \end{cases}$$

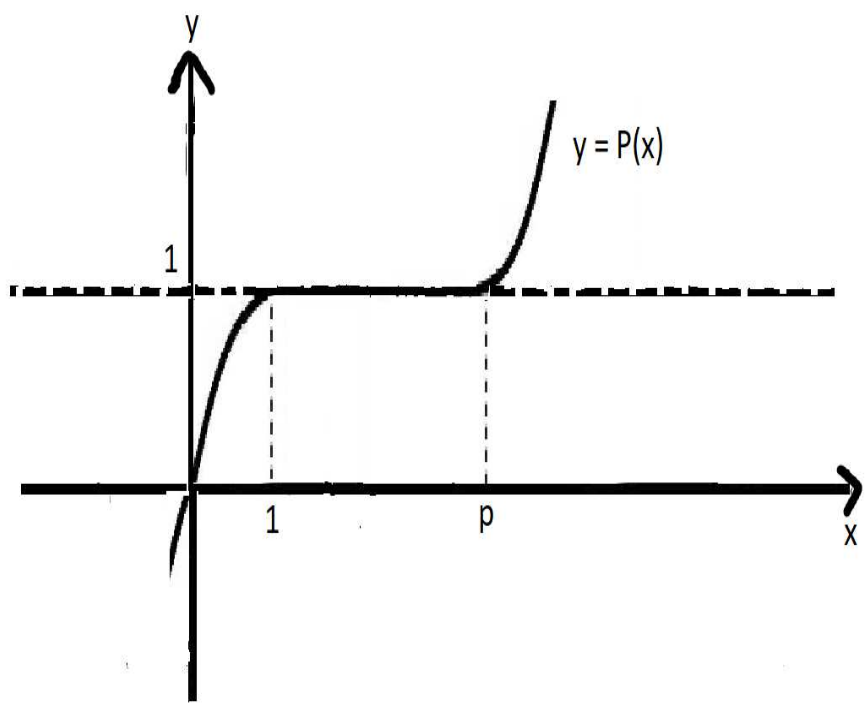

Figura 1: Gráfico de $P = P(x)$.

Verifique que $P(0) = 0$.

Verifique que P é continua.

Verifique que P é derivável nos pontos $x = 1$ e $x = p$.

Verifique que P é derivável.

Verifique que

$$P' = 5(P-1)^{\frac{4}{5}}, \text{ para todo } x \in (-\infty, +\infty).$$

Fim ♣