

**TEOREMAS SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES**

É intuitivo que para analisarmos uma função  $f$  numa vizinhança de um ponto  $p$  não é necessário que  $p$  pertença ao domínio de  $f$  mas sim que próximo a  $p$  existam infinitos pontos do domínio da função. Introduzimos então a definição abaixo.

**Def 1** Dado  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}$  é **ponto de acumulação de  $A$**  ( $p$  não necessariamente em  $A$ ) se todo intervalo não degenerado centrado em  $p$ ,  $I = (p - \delta, p + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , contém algum ponto de  $A$ , distinto de  $p$ . Isto é, para todo  $\delta > 0$ ,  $(I - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ .

**Def 2** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função e  $p$  é um ponto de acumulação de  $A$  então  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  se  $\forall \epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que :  $|f(x) - L| < \epsilon$  se  $0 < |x - p| < \delta$  e  $x \in A$ .

**Teorema 1 (Conservação do Sinal)** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \neq 0$ . Se  $L > 0$ , existe um intervalo  $I = (p - \delta, p + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , tal que  $\frac{3L}{2} > f(x) > \frac{L}{2} > 0$  se  $x \in (I - \{p\}) \cap A$ .

**Obs:** Temos, é claro, um resultado análogo se  $L < 0$ .

**Prova:**

Dado  $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$ , pela definição de limite existe  $\delta > 0$  tal que se  $x \in (p - \delta, p + \delta) - \{p\}$  e  $x \in A$  então,  $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{L}{2}$ . Logo, é fácil ver,  $f(x) \in (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2})$  ■

**Teorema 2 (Propriedades)** Seja  $p$  um ponto de acumulação de  $A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$  então,

$$(a) \lim_{x \rightarrow p} f(x) + g(x) = L_1 + L_2.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow p} cf(x) = cL_1, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = L_1L_2.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0$$

**Prova:**

(a) Dado  $\epsilon > 0$ , consideremos  $\frac{\epsilon}{2}$ . Existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} (0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A) \implies |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \\ (0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A) \implies |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} . \end{array} \right.$$

Logo, se  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  e  $0 < |x - p| < \delta$ , com  $x \in A$ , então, pela desigualdade triangular,  $|(f + g)(x) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

(b) O caso  $c = 0$  é óbvio. Se  $c \neq 0$ , dado  $\epsilon > 0$  consideremos  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$ . Então, existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - p| < \delta$ ,  $x \in A$ , temos  $|f(x) - L_1| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$  e, assim,  $|cf(x) - cL_1| < \epsilon$ .

(c) Como  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - p| < \delta_1$ ,  $x \in A$ , então  $|g(x) - L_2| < 1$ ; logo,  $|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|$ . Assim,

$$(1) \quad 0 < |x - p| < \delta_1 \ (x \in A) \implies |g(x)| < 1 + |L_2| .$$

Então, dado  $\epsilon > 0$ , e para a função  $g$  considerando  $\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que,

$$(2) \quad 0 < |x - p| < \delta_2 \ (x \in A) \implies |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)} .$$

Quanto à função  $f$ , para o valor de  $\epsilon$  acima seja  $\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}$ . Então, existe  $\delta_3 > 0$  tal que,

$$(3) \quad 0 < |x - p| < \delta_3 \ (x \in A) \implies |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)} .$$

Desta forma, escolhendo  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ , que é estritamente positivo, se  $0 < |x - p| < \delta$  e  $x \in A$ , (1)(2) e (3) estão satisfeitas e então,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - L_1L_2| &= |[f(x) - L_1]g(x) + [g(x) - L_2]L_1| \leq |[f(x) - L_1]g(x)| + |[g(x) - L_2]L_1| \leq \\ &\leq |f(x) - L_1||g(x)| + |g(x) - L_2||L_1| ; \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{cases} |f(x) - L_1||g(x)| < \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(1 + |L_2|) = \frac{\epsilon}{2} \\ |g(x) - L_2||L_1| \leq \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}|L_1| < \frac{\epsilon}{2} ; \end{cases}$$

donde,  $|(fg)(x) - L_1L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

(d) Escrevendo  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ , por (c) vemos que é suficiente mostrarmos  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$ .

Notemos que existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < |x - p| < \delta_1$  então  $|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$  e, portanto,  $|L_2| = |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|$  e, assim,  $|g(x)| > \frac{|L_2|}{2}$  ou, ainda,  $|\frac{1}{g(x)}| < \frac{2}{|L_2|}$ .

Dado então  $\epsilon > 0$  consideremos  $\frac{\epsilon|L_2|^2}{2}$ . Como  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $0 < |x - p| < \delta_2$ ,  $x \in A$ , então  $|g(x) - L_2| < \frac{\epsilon|L_2|^2}{2}$  e, conseqüentemente, para  $0 < |x - p| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ,  $x \in A$ , temos,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)||L_2|} = |g(x) - L_2| \frac{1}{|g(x)|} \frac{1}{|L_2|} < \frac{\epsilon|L_2|^2}{2} \frac{2}{|L_2|} \frac{1}{|L_2|} = \epsilon \quad \blacksquare$$

**Corolário 1** Para todo polinômio  $p = p(x)$  e para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$  temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$ .

**Prova:**

Basta notarmos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  e que um polinômio é uma soma de parcelas da forma  $a_i x^i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , e  $x^i = x \dots x$  é o produto do monômio  $x$   $i$ -vezes e que, pelas propriedades acima,  $\lim_{x \rightarrow x_0} a_i x^i = a_i x_0^i$  e então, se  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0) \blacksquare$$

**Corolário 2** Para toda função racional  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ,  $p$  e  $q$  polinômios, se  $x_0$  não é raiz de  $q = q(x)$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ .

**Prova:**

Segue do corolário 1 e do teorema 2(d)  $\blacksquare$

**Teorema 3 (Do Confronto)** Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  três funções, a valores reais, definidas em  $A \subset \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $p$  é um ponto de acumulação de  $A$  e que exista  $\delta > 0$  tal que,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{se } x \in (p - \delta, p + \delta) - \{p\} \text{ e, } x \in A.$$

Então, se  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$ , segue que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ .

**Prova:**

Dado  $\epsilon > 0$  existem, respectivamente, para  $g$  e  $h$ ,  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que,

$$\begin{cases} (0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A) \implies |g(x) - L| < \epsilon \\ (0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A) \implies |h(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Logo, se  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$  e  $0 < |x - p| < \delta$  e, ainda,  $x \in A$ , temos que  $g(x)$  e  $h(x)$  pertencem ao intervalo  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$  e, portanto, como  $f(x)$  está entre  $g(x)$  e  $h(x)$ ,  $f(x)$  também pertence ao mesmo intervalo  $\blacksquare$

**Teorema 4 (Limite da Função Composta)** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  tais que,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L, \\ \text{existe } r > 0 \text{ tal que } f(x) \neq y_0 \text{ se } x \in (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}. \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L.$$

**Prova:**

Como  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que:

$$(1) \quad 0 < |y - y_0| < \delta_1 \text{ e } y \in Y \implies |g(y) - L| < \epsilon .$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , para o  $\delta_1$  acima existe  $\delta_2 > 0$  tal que,

$$(2) \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ e } x \in X \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Tomando-se  $\delta = \min(\delta_2, r)$ , por (2) e pela terceira condição nas hipóteses segue que

$$(3) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \implies 0 < |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Combinando (3) e (1), nesta ordem, temos então,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \implies |g(f(x)) - L| < \epsilon .$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$  ■

**Def**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é **contínua em**  $x_0 \in X$ ,  $x_0$  um ponto de acumulação de  $X$ , se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

**Obs** Se  $x_0 \in X$  não é ponto de acumulação de  $X$ ,  $x_0$  é dito um **ponto isolado de  $X$** . Toda função é declarada contínua em seus pontos isolados.

**Proposição 1** Os polinômios e as funções racionais são funções contínuas em seu domínio.

**Prova:**

Segue da definição de continuidade e dos corolários 1 e 2 ■

**Teorema 5** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  tais que,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  e  $g$  é contínua em  $x_0$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) .$$

**Prova:**

Como  $g$  é contínua em  $x_0$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que,

$$|y - y_0| < \delta_1 \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon .$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , para o  $\delta_1$  acima existe  $\delta > 0$  tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Combinando as duas afirmações acima temos,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \quad \blacksquare$$

**Corolário 3** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f$  é contínua em  $x_0$  e  $g$  é contínua em  $y_0 = f(x_0)$ . Então,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  é contínua em  $x_0$ .

**Prova**

Segue imediatamente do teorema 5 ■

**Corolário 4** Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas em  $p \in X$  então,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  e  $cf$  ( $c \in \mathbb{R}$ ), são contínuas em  $p$ . Ainda mais, se  $g(p) \neq 0$  então  $\frac{f}{g}$ , definida no conjunto em que  $g$  não se anula, também é contínua em  $p$ .

Verificação: Consequência imediata das propriedades dos limites ■

## APLICAÇÕES

1. (**1º Limite Fundamental**)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$ .

Verificação: Feita em aula.

2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

Verificação: Feita em aula.

3. (**2º Limite fundamental**)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

Verificação: Mudando à variável  $h = e^x - 1$ ,  $h \rightarrow 0$ , obtemos  $e^x = h + 1$ ,  $x = \ln(h + 1)$  e,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{h}{\ln(h + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{h} \ln(h + 1)} = \frac{1}{\ln(h + 1)^{\frac{1}{h}}}.$$

Para  $y = \frac{1}{h}$  temos,  $y \rightarrow \pm\infty$  segundo  $h$  tende a zero pela direita ou esquerda e,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{y})^y};$$

mas, por 2, acima,  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$  e, **assumindo** que a função exponencial é contínua (e portanto, sua inversa, a função logaritmo também),

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \ln(1 + \frac{1}{y})^y = \ln e = 1,$$

e assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \ln(1 + \frac{1}{y})^y = 1.$$

4.  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é contínua.

Verificação: Pelas fórmulas de prostaferese,  $\text{sen } x - \text{sen } p = 2 \text{sen } \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2}$ . Assim, como  $|\cos(x)| \leq 1$ ,  $\forall x$ , e, como já vimos na demonstração do 1º limite fundamental,  $|\text{sen } x| \leq |x|$ ,  $\forall x$ , segue que,

$$0 \leq |\text{sen } x - \text{sen } p| = 2 |\text{sen } \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2}| \leq 2 |\frac{x-p}{2}| = |x-p|.$$

Logo, pelo teorema do confronto,  $\lim_{x \rightarrow p} |\text{sen } x - \text{sen } p| = 0$  e, portanto,  $\lim_{x \rightarrow p} \text{sen } x = \text{sen } p$ .

5.  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  é contínua.

Verificação: Pelas fórmulas de prostaferese,  $\cos x - \cos p = -2\text{sen}(\frac{x+p}{2})\text{sen}(\frac{x-p}{2})$ . Assim, como  $|\text{sen } x| \leq 1$ ,  $\forall x$ , e ainda,  $|\text{sen } x| \leq |x|$ ,  $\forall x$ , segue que,

$$0 \leq |\cos x - \cos p| \leq 2|\text{sen}\frac{x+p}{2}\text{sen}\frac{x-p}{2}| \leq 2\frac{|x-p|}{2} = |x-p|.$$

Logo, analogamente ao exemplo 4,  $\lim_{x \rightarrow p} \cos x = \cos p$ .

6. Se  $a > 0$ ,  $f(x) = a^x$  é contínua.

Verificação: Temos,  $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = (g \circ h)(x)$ , como  $h(x) = x \ln a$  e  $g(y) = e^y$ . Portanto, como  $g$  e  $h$  são funções contínuas, pelo corolário 3,  $f = g \circ h$  é também contínua.

7.  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $x \geq 0$  é contínua.

Verificação: Mostremos que  $\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$ . Suponhamos, inicialmente,  $p > 0$ .

Como  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \dots + a^{n-1-i}b^i + \dots + b^{n-1})$ , se  $a = \sqrt[n]{x}$  e  $b = \sqrt[n]{p}$ , temos,

$$x - p = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p})[\sqrt[n]{x^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{x^{n-1-i}}\sqrt[n]{p^i} + \dots + \sqrt[n]{p^{n-1}}].$$

Assim, se  $0 < \delta_1 < \frac{p}{2}$  e  $|x-p| < \delta_1 = \frac{p}{2}$  então, é fácil ver,  $x > \frac{p}{2}$  e

$$[\sqrt[n]{x^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{x^{n-1-i}}\sqrt[n]{p^i} + \dots + \sqrt[n]{p^{n-1}}] > (\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}} + \dots + (\frac{p}{2})^{\frac{n-1-i}{n} + \frac{i}{n}} + \dots + (\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}} = n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}},$$

$$|x-p| > |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}},$$

e, portanto,  $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} |x-p|$ .

Consequentemente, dado  $\epsilon > 0$ , considerando  $\delta = \min\left(\delta_1, \epsilon n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}\right)$  temos,

$$|x-p| < \delta \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} |x-p| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} \delta \leq \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} \epsilon n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}} = \epsilon.$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$ ,  $\text{sep } > 0$ .

Se  $p = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  seja  $\delta = \epsilon^n$ . Se  $0 \leq x < \delta$  temos  $0 \leq \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\delta} = \epsilon$  e, assim,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$ .

8.  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , é contínua em  $(0, +\infty)$ .

Verificação: Temos  $f(x) = (g \circ h)(x)$ , com  $h(x) = \sqrt[q]{x}$  e  $g(y) = y^p$ , que são contínuas em  $(0, +\infty)$ , pelo exemplo 7 e pela proposição 1, respectivamente. Logo, como composição de funções contínuas é também uma função contínua,  $f$  é contínua.

9. As funções trigonométricas  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\text{cosec} x$  são contínuas em seus domínios.

Verificação: Consequência imediata dos exemplos 4 e 5 e do corolário 4.