

Fundamentos de Análise Clássica.
O Supremo, Teorema do Valor Intermediário,
Teoremas de Bolzano e Weierstrass e
a Integrabilidade das Funções Contínuas

O que é uma derivada? Resposta: um limite.

O que é uma integral? Resposta: um limite.

O que é uma série infinita? Resposta: um limite.

O que é então um limite? Resposta: um número.

Muito bem! O que é então um número? ¹

Definição. *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Então,*

- *O maior elemento de X , quando existe, é o máximo de X , indicado $\max X$.*
- *O menor elemento de X , quando existe, é o mínimo de X , indicado $\min X$.*
- *$M \in \mathbb{R}$ é um majorante de X se $x \leq M, \forall x \in X$.*
- *$m \in \mathbb{R}$ é um minorante de X se $m \leq x, \forall x \in X$.*

Exemplo 1. Consideremos os seguintes subconjunto de \mathbb{R} :

$$(a) X = [0, 1] \quad (b) X = (0, 1) \quad (c) X = (-\infty, -2)$$

$$(d) X = (2, +\infty) \quad (e) X = \mathbb{Q} \cap (0, 7).$$

Analisando os casos (a), (b), (c), (d) e (e) acima, segue o que encontramos.

- (a) O mínimo de X é $\min X = 0$, o máximo de X é $\max X = 1$, o conjunto dos minorantes de X é $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes de X é $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1, +\infty)$.

¹Vide Analysis by Its History, E. Hairer and G. Wanner, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, N. Y., 2000, p. 168.

- (b) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty)$.
- (c) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto X não admite minorante e o conjunto dos majorantes é $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [-2, +\infty)$.
- (d) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 2]$ e, por último, X não admite majorante.
- (e) Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes é $[7, +\infty)$.

Definição. *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} . Então,*

- *O menor majorante de X , se existir, é o supremo de X , indicado $\sup X$. Isto é,*

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é majorante de } X\} .$$

- *O maior minorante de X , se existir, é o ínfimo de X , indicado $\inf X$. Isto é,*

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ é minorante de } X\} .$$

Exemplo 2. Consideremos os seguintes subconjunto de \mathbb{R} :

$$(a) X = [0, 1] \quad (b) X = (0, 1) \quad (c) X = (-\infty, -2)$$

$$(d) X = (2, +\infty) \quad (e) X = \mathbb{Q} \cap (0, 7).$$

Analizando cada um dos casos acima, segue o que encontramos para X .

- (a) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.
- (b) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.
- (c) Não existe $\inf X$ e $\sup X = -2$.
- (d) $\inf X = 2$ e não existe $\sup X$.
- (e) $\inf X = 0$ e $\sup X = 7$.

Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então,

- X é limitado superiormente se X admite um majorante.
- X é limitado inferiormente se X admite um minorante.

Comentário. A Propriedade do Supremo a seguir, enunciada por Bolzano² em 1817 [vide Jahnke, p.175], é uma das mais fundamentais em matemática e é em alguns textos apresentada como um axioma [vide E. L. Lima] e em outros é provado como um teorema [vide H. L. Guidorizzi, Apêndice 6]. Neste texto apresentamos apenas seu enunciado e convidamos o leitor a consultar tais obras.

(Propriedade do Supremo) *Todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado superiormente admite supremo.*

Corolário (Propriedade de Aproximação). *Seja X um subconjunto não vazio de \mathbb{R} e $s = \sup X$. Se a é real e $a < s$, então existe $x \in X$ tal que*

$$a < x \leq s .$$

Prova.

Como s é um majorante de X , temos $x \leq s$, para todo $x \in X$. Assim, supondo que não exista x em X tal que $a < x \leq s$ temos $x \leq a$, para todo $x \in X$, e portanto a é um majorante de X e $a < s$ \nexists

Analogamente à Propriedade do Supremo e seu corolário temos,

(Propriedade do Ínfimo) *Todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

Prova.

Se X é o conjunto em questão, basta aplicar a Propriedade do Supremo ao conjunto $-X = \{-x : x \in X\}$ \clubsuit

Seguem algumas das principais consequências da Propriedade do Supremo.

²B. Bolzano (1781-1848), padre tcheco, viveu em Praga e teve sua obra redescoberta e reconhecida postumamente em 1870.

Propriedade de Arquimedes. *Seja $x > 0$ e y um número real. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

Prova.

Suponhamos, por absurdo, que $nx \leq y$ para todo natural n . Então, o conjunto

$$X = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

é obviamente não-vazio e majorado por y e assim, pela Propriedade do Supremo, admite supremo. Seja $s = \sup X$. Notando que $x > 0$, o supremo é o menor dos majorantes e $s - x < s$, segue que $s - x$ não é um majorante de X e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$, o que implica $s < (m + 1)x$ e $(m + 1)x \in X$ \nexists

Corolário 1. *O conjunto \mathbb{N} não é limitado superiormente em \mathbb{R} .*

Prova.

Dado $x \in \mathbb{R}$, pela propriedade de Arquimedes e como $1 > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = n \cdot 1 > x$ \clubsuit

Corolário 2 (Não há infinitésimos em \mathbb{R}). *Para todo $x > 0$, existe um natural n tal que*

$$\frac{1}{n} < x.$$

Prova.

Como $x > 0$, pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > 1$ e portanto

$$\frac{1}{n} < x \clubsuit$$

Teorema do Anulamento (Bolzano-Weierstrass) (1817).³ *Se $f; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

³Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

Prova.

O conjunto

$$X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

é tal que $a \in X$ e é limitado superiormente por b . Logo, pela Propriedade do Supremo, existe $c = \sup X$ e $a \leq c \leq b$.

Mostremos, aplicando o teorema da conservação do sinal à função contínua f , que tanto $f(c) < 0$ como $f(c) > 0$ acarretam contradições.

Se $f(c) < 0$ temos $c < b$ e $f < 0$ em algum intervalo $[c, c + \delta) \subset [a, b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Logo, existe $x \in [a, b]$ tal que $x > c$ e $f(x) < 0$ \nexists

Se $f(c) > 0$ temos $a < c$ e $f > 0$ em algum intervalo $(c - \delta, c] \subset [a, b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Porém, pela propriedade de aproximação, existe $x \in (c - \delta, c]$ tal que $f(x) < 0$ \nexists

Teorema do Valor Intermediário. *Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ então, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Prova.

Se $f(a) < \gamma < f(b)$, aplicamos o teorema de Bolzano-Weierstrass à função $g(x) = f(x) - \gamma$ \clubsuit

Definições. *Uma sequência em \mathbb{R} é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, indicada $x = (x_n)$, com $x_n = x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos então, $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ e ainda, $(x_n) = (x_n)_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainda mais,*

- Se $\{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ é um subconjunto infinito de \mathbb{N} , então $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ é uma subsequência da sequência (x_n) .
- (x_n) é uma sequência crescente [decrescente] se $x_n \geq x_m$ [$x_n \leq x_m$] para todo $n \geq m$, onde n e m pertencem a \mathbb{N} .

Notemos que toda subsequência é uma sequência.

Exemplos 3. Temos, em \mathbb{R} , os exemplos abaixo de seqüências e subsequências.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (1, 2, 3, \dots)$ é a seqüência estritamente crescente dos naturais.
- Se $y_n = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (y_n) é a subsequência dos pares da seqüência dos naturais.
- Se $r \in \mathbb{R}$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então (s_n) é a seqüência das somas finitas das progressões geométricas de razão r , de 1 a r^n .
- Se $x_n = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é a seqüência dos inversos dos naturais.

- Se $x_n = \sqrt[n]{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(x_{2n+1}) = (\sqrt[2n+1]{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência da seqüência $(\sqrt[n]{n})$.

Lema. *Toda seqüência (x_n) admite ou uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente.*

Prova.

Chamemos n de um “ponto de pico” da seqüência (x_n) se ocorre $x_m < x_n$ para todo $m > n$.

- ◊ Se (x_n) tem uma quantidade infinita de pontos de pico, $\{n_1 < n_2 < \dots\}$, então a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente pois temos

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \dots$$

- ◊ Se (x_n) tem uma quantidade finita de pontos de pico, seja n_1 um natural estritamente maior que todos os pontos de pico de (x_n) . Como n_1 não é um ponto de pico então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, como n_2 também não é ponto de pico segue que existe $n_3 > n_2$, $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Iterando, obtemos uma subsequência crescente da seqüência (x_n) ♣

Definições. Seja (x_n) uma sequência em \mathbb{R} . Dizemos que a sequência (x_n)

- converge a $L \in \mathbb{R}$ se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n - L| < \epsilon$ se $n \geq n_0$.

Temos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L.$$

- diverge a $+\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ se $n \geq n_0$.

Utilizamos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

- diverge a $-\infty$ se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M$ se $n \geq n_0$.

Utilizamos então a notação

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

- diverge se não existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$.

Exemplos 4. Seguem exemplos de sequências convergentes e divergentes.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

- Se $|r| < 1$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{1-r}.$$

- Se $x_n = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Se

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

então segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lema. Se (x_n) é crescente [decrecente] e limitada então (x_n) é convergente.

Prova.

Como $(-x_n)$ é crescente se (x_n) é decrescente, basta supormos (x_n) crescente. Então, pela propriedade do supremo segue que existe

$$\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq \alpha$. Então, como (x_n) é crescente, para todo $n \geq n_0$ temos $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha$, o que implica $|x_n - \alpha| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ ♣

Teorema. Toda seqüência limitada admite ao menos uma subsequência convergente.

Prova.

Segue dos dois lemas anteriores ♣

Proposição. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma seqüência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a seqüência $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ se $n \geq n_0$ e então obtemos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ ♣

Teorema da Limitação. Se f é contínua em $[a, b]$ então f é limitada.

Prova. Por contradição.

Bisectando⁴ $I_1 = [a, b]$, seja I_2 um dos subintervalos

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ e } \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

⁴Raciocícios por biseção foram muito utilizados por Bolzano e também se encontram em Elementos, Euclides, Livro X.

em que f não é limitada (existe ao menos um). Repetindo o argumento, bisectamos I_2 e selecionamos I_3 um subintervalo desta biseção, no qual f não é limitada. Iterando tal processo obtemos uma sequência de intervalos encaixantes $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da forma $I_n = [x_n, y_n]$, com $I_{n+1} \subset I_n$, satisfazendo

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

A sequência (x_n) é crescente e a sequência (y_n) é decrescente, ambas contidas em $[a, b]$. Temos $x_n \leq y_m$ quaisquer que sejam n e m em \mathbb{N} [se $m \leq n$ temos $x_n \leq y_n \leq y_m$ e, se $m \geq n$, $x_n \leq x_m \leq y_m$]. Pelas propriedades do supremo e do ínfimo, segue que (x_n) converge a $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e (y_n) converge a $y = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, ainda, $x_n \leq x \leq y \leq y_n$ [pois temos $x_n \leq y_m$, quaisquer que sejam n e m em \mathbb{N} , e fixando um arbitrário $m \in \mathbb{N}$ da definição de supremo segue $x \leq y_m$, para m arbitrário, e da definição de ínfimo segue $x \leq y \leq y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$]. Desta forma temos

$$0 \leq y - x \leq \frac{b-a}{2^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e portanto, como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

pelo teorema do confronto segue $y - x = 0$ e $x = y$.

Como f é contínua, existe um intervalo $(x - \delta, x + \delta)$, $\delta > 0$, em que f é limitada. Porém, tal intervalo contém algum intervalo I_n no qual f é não limitada \nexists

Teorema de Weierstrass. *Se f é contínua em $[a, b]$ então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

Prova.

Como $X = \{f(x); x \in [a, b]\} = f([a, b])$ é limitado, pelas propriedades do supremo e do ínfimo existem $M = \sup X$ e $m = \inf X$. Mostremos que $M \in f([a, b])$ (a prova para m é análoga).

Se $f(x) < M$, para todo $x \in [a, b]$, então temos

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \text{ para todo } x \in [a, b],$$

e g é contínua. Pelo teorema da limitação segue que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta.$$

Donde segue

$$M - f(x) > \frac{1}{\beta},$$

o que implica

$$f(x) < M - \frac{1}{\beta} \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Sendo assim, M não é supremo de $X \not\downarrow$

Integração de Funções Contínuas.

Para provarmos que funções contínuas em $[a, b]$ são integráveis, recordemos a definição de integral.

Definição. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma partição

$$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\} \text{ de } [a, b]$$

e uma escolha

$$\mathcal{E} = \{c_i : c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

subordinada à partição P , a soma de Riemann de f em relação à partição P e à escolha \mathcal{E} é

$$S(f; P; \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \text{ com } \Delta x_i = (x_i - x_{i-1}).$$

A norma de P é

$$|P| = \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$$

e $[x_{i-1}, x_i]$, onde $1 \leq i \leq n$, é um subintervalo determinado por P .

Definição. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é Riemann-integrável, ou simplesmente integrável, se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo: para toda partição P de $[a, b]$ com norma $|P| < \delta$, para qualquer que seja a escolha \mathcal{E} subordinada à partição P temos

$$|S(f; P; \mathcal{E}) - L| < \epsilon .$$

Notações. Escrevemos então,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \quad \text{e}$$

$$L = \int_a^b f(x) dx .$$

O número $\int_a^b f(x) dx$ é chamado de integral de f em $[a, b]$.

No que segue mantemos a notação acima. Se f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass f é limitada em $[a, b]$ e podemos introduzir os conceitos a seguir.

Definição. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$, a soma inferior e a soma superior⁵ de f em relação à partição P são, respectivamente,

$$\underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e}$$

$$\overline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

A seguir, utilizando uma idéia que remonta a Arquimedes, mostraremos que o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que f é integrável.

Notação. Dado $A \subset [a, b]$, definimos

$$\min_A f = \min\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad \max_A f = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

⁵Estes conceitos foram introduzidos pelo matemático francês G. Darboux (1842-1917)

Observação 1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se I e J são subintervalos de $[a, b]$ e $I \subset J$, então

$$\min_J f \leq \min_I f \leq \max_I f \leq \max_J f.$$

(b) Se P_1 e P_2 são partições de $[a, b]$ então, ordenando $P_1 \cup P_2$ temos que $P_1 \cup P_2$ é também uma partição de $[a, b]$.

(c) Se P_1 e P_2 são partições de $[a, b]$ então

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_2).$$

(d) Se P é uma partição de $[a, b]$ e \mathcal{E} é uma escolha qualquer subordinada à partição P então,

$$\underline{S}(f; P) \leq S(f; P; \mathcal{E}) \leq \overline{S}(f; P).$$

Prova.

(a) Trivial.

(b) Óbvio.

(c) Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, é um subintervalo determinado pela partição P_1 então I_i é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, para $j = 1, \dots, N$ e $N \geq n$, determinados pela partição $P_1 \cup P_2$ que estão contidos em I_i . Desta forma, pelo item (a) temos,

$$\left(\min_{I_i} f \right) \Delta x_i = \left(\min_{I_i} f \right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j \leq \sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\min_{J_j} f \right) \Delta y_j \text{ e}$$

e

$$\sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\max_{J_j} f \right) \Delta y_j \leq \left(\max_{I_i} f \right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\max_{I_i} f \right) \Delta x_i.$$

Então, destacando o primeiro e o terceiro termos das equações acima e somando para $i = 1, \dots, n$ obtemos

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \text{ e } \overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1)$$

e, por analogia, $\overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_2)$.

Como temos $\underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1 \cup P_2)$, provamos (c).

(d) Evidente♣

Proposição. Se f é contínua em $[a, b]$ então existem

$$\begin{cases} \alpha = \sup \{ \underline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \\ e \\ \beta = \inf \{ \overline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \end{cases}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova.

Sejam P_1 e P_2 duas partições arbitrárias de $[a, b]$. Pela Observação 1(c) segue

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \overline{S}(f; P_2).$$

Assim, fixo P_2 o conjunto

$$\{ \underline{S}(f; P_1) : P_1 \text{ é partição de } [a, b] \}$$

é não vazio e majorado por $\overline{S}(f; P_2)$. Logo, temos $\alpha \leq \overline{S}(f; P_2)$ e, como esta desigualdade é válida para toda partição P_2 de $[a, b]$ segue que α é um minorante do conjunto

$$\{ \overline{S}(f; P_2) : P_2 \text{ é partição de } [a, b] \}$$

e portanto concluímos $\alpha \leq \beta$ ♣

Proposição. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma sequência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos $|x_n - x_0| < \delta$ se $n \geq n_0$. Sendo assim, temos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ ♣

Definição. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x, y \in X \text{ então: } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Teorema (Heine, 1872).⁶ Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é uniformemente contínua.

Prova. Por contradição.

Suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, existem x_n e y_n em $[a, b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Sendo limitada, (x_n) admite subsequência convergente (x_{n_k}) e reenumerando esta se necessário supomos, sem perda de generalidade, (x_n) convergente a x . Notemos que como temos $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então segue $x \in [a, b]$. Ainda mais, como

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que a sequência (y_n) também converge a x . Concluimos então que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \not\checkmark$$

Teorema. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Seja $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ com norma

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta.$$

⁶Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.

Sejam

$$m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Temos

$$0 \leq \overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon.$$

Como

$$\underline{S}(f; P) \leq \alpha \leq \beta \leq \overline{S}(f; P),$$

onde α é o supremo do conjunto das somas inferiores de f e β é o ínfimo do conjunto das somas superiores de f , ambas relativas às partições de $[a, b]$, temos

$$0 \leq \beta - \alpha \leq \overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) < \epsilon$$

e, como ϵ é arbitrário, $\alpha = \beta$. Seja $L = \alpha$. Se \mathcal{E} é uma escolha qualquer relativa a P , pela Observação 1(d) temos

$$S(f; P; \mathcal{E}) \leq \overline{S}(f; P) = \underline{S}(f; P) + [\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P)] < \alpha + \epsilon = L + \epsilon \quad \text{e}$$

$$L - \epsilon = \beta - \epsilon < \overline{S}(f; P) - [\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P)] = \underline{S}(f; P) \leq S(f; P; \mathcal{E}).$$

Donde segue

$$L - \epsilon < S(f; P; \mathcal{E}) < L + \epsilon,$$

para toda partição P tal que $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha \mathcal{E} relativa à partição P . Logo, f é integrável e a integral de f é $L = \alpha = \beta$.

Isto é, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sup \{ \underline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \\ &= \inf \{ \overline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b] \} \clubsuit \end{aligned}$$

Referências.

1. Fitzpatrick, P. M., *Advanced Calculus, Pure and Applied Undergrad. Texts*, 2nd. ed., AMS, 2009.
2. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo, Vol 1*, 5 edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.
3. Hairer, E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, UTM, Springer, New York, 1996.
4. Jahnle, H. N., editor, *A History of Analysis*, American Mathematical Society, 2003.
5. Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
6. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, Inc., Houston, 2008.