Maio 2015 / Junho 2024

EXPONENCIAL DE MATRIZES

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

1. A Exponencial de uma Matriz Real

Definições e notações.

- *Seja $M_n(\mathbb{R})$ a álgebra das matrizes quadradas $n \times n$ e com coeficientes reais.*
- *Seja $|\,.\,|$ a norma euclidiana (usual) em $\mathbb{R}^m$, para um arbitrário $m \in \{1,2,\ldots\}$.*
- *Identifiquemos $M_n(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}^{n^2}$. Logo, se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ então*

$$|A| \text{ é a norma de } A \text{ como vetor em } \mathbb{R}^{n^2}.$$

- *Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ a base usual de $\mathbb{R}^n$. Dado $v = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n$, escrevemos*

$$v = (v_1,\ldots,v_n).$$

Lema 1. *Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Então,*

$$|AB| \leq |A||B|.$$

Prova.

Seja A^i a i-ésima linha de $A = (a_{ij})$ e B_j a j-ésima coluna de $B = (b_{ij})$, onde $1 \leq i,j \leq n$. Indiquemos o produto interno em $\mathbb{R}^n$ por $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Temos,

$$AB = \begin{bmatrix} \langle A^1, B_1\rangle & \cdots & \langle A^1, B_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle A^n, B_1\rangle & \cdots & \langle A^n, B_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz segue

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \sum_{i,j} |\left\langle A^i, B_j \right\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{i,j} |A^i|^2 |B_j|^2 = \left(\sum_i |A^i|^2\right)\left(\sum_j |B_j|^2\right) = |A|^2|B|^2 \clubsuit \end{aligned}$$

Definição. Seja J um conjunto arbitrário de índices. [Para mais detalhes, vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]

- Dada uma família $(p_j)_J$ de números positivos ou nulos, definimos

$$\sum_J p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j : \ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \in [0,+\infty].$$

  Se tal sup é finito, a família $(p_j)_J$ é dita somável e a soma da família $(p_j)_J$ é

$$\sum_J p_j.$$

- Seja x em $\mathbb{R}$. A parte positiva de x e a parte negativa de x são, respectivamente, os números p e q (ambos positivos ou nulos) dados por

$$p = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \qquad q = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

  Valem as relações

$$x = p - q, \qquad |x| = p + q,$$

$$p = \frac{|x| + x}{2} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{|x| - x}{2}.$$

- Uma família $(x_j)_J$ de números reais é somável se as famílias $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$, respectivamente das partes positivas e negativas de (x_j), são ambas somáveis. Neste caso, a soma da família (x_j) é

$$\sum_J x_j = \sum_J p_j - \sum_J q_j.$$

- Uma família $(v^j)_{j\in J}$ de vetores em $\mathbb{R}^m$ é somável se as m famílias de números reais $(v_1^j)_J, \ldots, (v_m^j)_J$ são somáveis. Neste caso, a soma da família $(v^j)_J$ é

$$\sum_J v^j = \left(\sum_J v_1^j, \ldots, \sum_J v_m^j\right).$$

Observação. Seja $(x_j)_J$ uma família em $\mathbb{R}$. Devido às relações

$$0 \leq p_j \leq |x_j|, \quad 0 \leq q_j \leq |x_j| \ \text{ e } \ |x_j| = p_j + q_j,$$

temos que a família real $(x_j)_J$ é somável se e somente se

$$\sum_J |x_j| < \infty.$$

Proposição 2. *A família vetorial $(v^j)_J$, contida em $\mathbb{R}^m$, é somável se e só se*

$$\sum |v^j| < \infty.$$

Prova.

Por definição, a família vetorial $(v^j)_J$ é somável se e somente se cada família real $(v_i^j)_J$ é somável, onde $i = 1, \ldots, m$. Como já vimos, $(v_i^j)_J$ é somável se e somente se $(|v_i^j|)_J$ é somável. Por outro lado, valem as desigualdades

$$|v_i^j| \leq |v^j| \leq |v_1^j| + \cdots + |v_m^j|, \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, m.$$

Donde segue trivialmente a tese♣

Corolário 3. *Vale a lei associativa para a família vetorial e somável $(v^j)_J \subset \mathbb{R}^m$. Isto é, se $J = \dot\bigcup_{k\in K} J_k$ é uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos, então*

$$\sum_{j\in J} v^j = \sum_{k\in K} \sum_{j\in J_k} v^j.$$

Prova.

Segue da associatividade para famílias somáveis em $\mathbb{R}$, em cada coordenada [vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]♣

Corolário 4. *É contínua a função produto matricial*

$$(A, B) \mapsto AB \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \ \textit{onde } A \in M_{m\times k}(\mathbb{R}) \ \textit{e } B \in M_{k\times n}(\mathbb{R}).$$

Prova.

Sejam $H \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ e $K \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$. A afirmação segue de

$$|(A + H)(B + K) - AB| \leq (|A||K| + |H||B| + |H||K|) \xrightarrow{(H,K)\to(0,0)} 0 ♣$$

Lema 5. *Seja $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1 tal que*

$$\begin{cases} f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ em cada compacto de } \mathbb{R}^m \\ \text{e} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \text{ converge uniformemente a } g_j \text{ em cada compacto, onde } j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Então, f é de classe C^1 e

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \text{ converge uniformemente a } \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ nos compactos de } \mathbb{R}^m, \text{ onde } j = 1, \dots, m.$$

Prova.

Cada f_n e suas derivadas de ordem 1 são contínuas e a convergência é uniforme sobre os compactos. Logo, f e as funções $g_1, \dots, g_m$ são contínuas.

Basta mostrarmos que
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1.$$
Seja $(p_1, \dots, p_m)$ em $\mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}$. Pela hipótese de convergência segue

$$\int_{p_1}^{x} \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, p_2, \dots, p_m)dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \dots, p_m)dt.$$

Assim,

$$f_n(x, p_2, \dots, p_m) - f_n(p_1, p_2, \dots, p_m) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \dots, p_m)dt.$$

Por outro lado, por hipótese

$$f_n(x, p_2, \dots, p_n) - f_n(p_1, p_2, \dots, p_n) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x, p_2, \dots, p_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Donde segue,

$$f(x, p_2, \dots, p_m) - f(p_1, p_2, \dots, p_m) = \int_{p_1}^{x} g_1(t, p_2, \dots, p_m)dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $x \mapsto f(x, p_2, \dots, p_m)$ é derivável e

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1 \clubsuit$$

Teorema 6. *Sejam A, B e W matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Seja X a variável em $M_n(\mathbb{R})$.*

(a) *Está bem definida a matriz*

$$e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} \in M_n(\mathbb{R}).$$

(b) *Se A e B comutam então*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(c) *A matriz e^A é inversível. Ainda,*

$$e^0 = I \quad e \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(d) *Se W é inversível, então $e^{W^{-1}AW} = W^{-1}\, e^A\, W$.*

(e) *A série de funções vetoriais e contínuas*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{X^m}{m!}$$

converge uniformemente e absolutamente em $D(0;r) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} : |X| \leq r\}$, onde $r > 0$, à função contínua

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad onde \ \exp(X) = e^X.$$

(f) *A aplicação $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ é de classe C^∞.*

(g) *A função $f : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$, dada por $f(t) = e^{tA}$ se $t \in \mathbb{R}$, é derivável e*

$$f'(t) = Ae^{tA}.$$

(h) *Temos $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$, onde $\mathrm{tr}(X)$ é o traço da matriz X.*

(i) *Se λ é um autovalor de A, então e^λ é um autovalor de e^A.*

(j) *Se D é uma matriz diagonal, então e^D também. Ainda, se*

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

Prova.

(a) Temos

$$\sum \frac{|A^m|}{m!} \leq \sum \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|} < \infty.$$

Pela Proposição 2, segue que é somável a família vetorial

$$\left(\frac{A^m}{m!} \right)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$

Logo, está bem definido o vetor

$$e^A = \sum_m \frac{A^m}{m!} \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

(b) Temos,

$$\sum_{j,k} \left| \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \right| \leq \sum_{j,k} \frac{|A|^j}{j!} \frac{|B|^k}{k!} = \left(\sum_j \frac{|A|^j}{j!} \right) \left(\sum_k \frac{|B|^k}{k!} \right) = e^{|A|} e^{|B|} < \infty.$$

Pela Proposição 2, segue que é somável a família vetorial

$$\left(\frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \right)_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n^2}.$$

Pela propriedade associativa (Corolário 3), e já que A e B comutam, segue

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{j,k} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{j+k=m} \frac{m!}{j!k!} A^j B^k \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{(A+B)^m}{m!} = e^{A+B}. \end{aligned}$$

(c) Segue de (b).

(d) Temos, $(W^{-1}AW)(W^{-1}AW) = W^{-1}A^2W$. Logo, $(W^{-1}AW)^n = W^{-1}A^nW$. Por fim, pela continuidade do produto de matrizes segue

$$e^{W^{-1}AW} = \sum \frac{(W^{-1}AW)^m}{m!} = \sum \frac{W^{-1}A^nW}{m!} = W^{-1}e^AW.$$

(e) e (f). As entradas (coeficientes) $p_{ij}^m(X)$ da matriz

$$X^m = X \cdots X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

são polinômios nas n^2 variáveis $(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}) = X$.

Cada um destes polinômios é (argumentando por indução em m) uma soma de n^{m-1} parcelas, com cada parcela um monômio (em várias variáveis) de grau m e de coeficiente igual a 1.

Consideremos um multi-índice $\alpha = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}) \in \mathbb{N}^{n^2}$, com $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. A multi-derivada

$$\partial^\alpha(p_{ij}^m) \qquad\qquad [\text{de ordem } |\alpha| = \alpha_{11} + \ldots + \alpha_{nn}]$$

é uma soma de n^{m-1} parcelas, com cada parcela um monômio (em várias variáveis) de grau menor ou igual a m (ou o polinômio identicamente nulo) e com o coeficiente de cada parcela majorado (em módulo) por $m^{|\alpha|}$.

Fixemos um disco $D(0;r) = \{X : |X| \leq r\}$, com $r \geq n$ (portanto, $r \geq n \geq 1$). Pelo parágrafo anterior segue

$$|\partial^\alpha(p_{ij}^m)(X)| \leq n^{m-1} m^{|\alpha|} r^m, \quad \text{para todo } X \in D(0;r).$$

Logo,

$$\frac{|\partial^\alpha(p_{ij}^m)(X)|}{m!} \leq \frac{r^{2m-1} m^{|\alpha|}}{m!}, \quad \text{para todo } X \in D(0;r).$$

Pelo teste da razão, o Teste-M de Weierstrass e o Lema 5 concluímos que a função $\exp(X)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

(g) Suponhamos $0 < |h| < 1$. A afirmação segue da identidade

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} = \left(\frac{e^{hA} - I}{h} - A \right) e^{tA} = \left[\frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{m-1}A^m}{m!} + \cdots \right] e^{tA}$$

e de

$$\left| \frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{m-1}A^m}{m!} + \cdots \right| \leq |h| \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{|h|^{m-2}|A|^m}{m!} \leq |h| e^{|A|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

(h) Seja $f(t) = \det(e^{tX})$, onde $t \in \mathbb{R}$. Então, f é de classe C^∞ e satisfaz

$$f(t+s) = \det\left(e^{tX+sX}\right) = \det\left(e^{tX}e^{sX}\right) = \det\left(e^{tX}\right)\det\left(e^{sX}\right) = f(t)f(s).$$

As funções $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente deriváveis e que satisfazem

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s), \text{ para todos } t \text{ e } s,$$

são dadas por $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Donde segue

$$f(t) = \det\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda t}, \text{ com } \lambda = f'(0).$$

Por outro lado, fixado X temos

$$e^{tX} = I + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots \; = \; I + tX + t^2F_X(t),$$

com $F_X = F : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ e de classe C^∞. Indicando as entradas das matrizes, escrevemos $F(t) = (F_{ij}(t)) = (F_{ij})$ e $X = (x_{ij})$. Então segue

$$\det(e^{tX}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + tx_{11} + t^2F_{11} & tx_{12} + t^2F_{12} & tx_{13} + t^2F_{13} & \cdots & tx_{1n} + t^2F_{1n} \\ tx_{21} + t^2F_{21} & 1 + tx_{22} + t^2F_{22} & tx_{23} + t^2F_{23} & \cdots & tx_{2n} + t^2F_{2n} \\ tx_{31} + t^2F_{31} & tx_{32} + t^2F_{32} & 1 + tx_{33} + t^2F_{33} & \cdots & tx_{3n} + t^2F_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tx_{n1} + t^2F_{n1} & tx_{n2} + t^2F_{n2} & tx_{n3} + t^2F_{n3} & \cdots & 1 + tx_{nn} + t^2F_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left[1 + tx_{jj} + t^2F_{jj}(t) \right] + t^2g(t) \qquad [g \text{ infinitamente derivável}]$$

$$= 1 + t(x_{11} + \cdots + x_{nn}) + t^2h(t) \qquad [h \text{ infinitamente derivável}].$$

Donde obtemos

$$f(t) = \det(e^{tX}) = 1 + \mathrm{tr}(X)t + t^2h(t).$$

Concluímos então que $\lambda = f'(0) = \mathrm{tr}(X)$. Logo, $\det(e^{tX}) = e^{t[\mathrm{tr}(X)]}$.

(i) Escrevemos vetores em $\mathbb{R}^n$ no formato matriz-coluna em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Isto é,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Por definição de autovalor, existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

[Dizemos que v é um autovetor de A associado ao autovalor λ.]

Portanto, $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2 v$.

Por indução segue

$$A^m(v) = \lambda^m v, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como o produto matricial é contínuo (Lema 4), temos

$$e^A v = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m(v)}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m v}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!}\right) v = e^\lambda v.$$

(j) Basta observar que

$$\frac{D^m}{m!} = \begin{bmatrix} \frac{(d_1)^m}{m!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{(d_n)^m}{m!} \end{bmatrix} \quad \text{e computar} \quad I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots \clubsuit$$

Comentários. Mantenhamos as notações dadas no Teorema 6 (acima).

- [Vide Teorema 6(a).] Dado $m \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, escrevamos

$$A^m = (a_{jk}^m)_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le n}} = \begin{bmatrix} a_{11}^m & \cdots & a_{1n}^m \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^m & \cdots & a_{nn}^m \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 6 segue

$$e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} = \begin{bmatrix} \sum_m \frac{a_{11}^m}{m!} & \cdots & \sum_m \frac{a_{1n}^m}{m!} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_m \frac{a_{n1}^m}{m!} & \cdots & \sum_m \frac{a_{nn}^m}{m!} \end{bmatrix}.$$

O coeficiente de índice (j,k) da matriz A^m satisfaz

$$|a_{jk}^m| \leq |A|^m \leq |A|^m.$$

Donde segue

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_{jk}^m|}{m!} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|} < \infty.$$

Cada entrada de e^A é uma série absolutamente convergente (família somável).

- [Vide Teorema 6(d)]. Se A e B são matrizes de ordem n e semelhantes, por definição existe uma matriz inversível P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Pelo item (d) do teorema acima, as matrizes e^A e e^B são semelhantes e

$$e^B = P^{-1}e^A P.$$

- [Vide Teorema 6(e).] Identificamos

a matriz $X = (x_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ com o vetor $X = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn})$.

Desta forma, temos

$$X^m = \begin{bmatrix} p_{11}^m(x_{1n}, \ldots, x_{nn}) & \cdots & p_{1n}^m(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}^m(x_{11}, \ldots, x_{nn}) & \cdots & p_{nn}^m(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \end{bmatrix}$$

com cada p_{jk}^m um polinômio homogêneo de grau m e nas n^2 variáveis $x_{11}, \ldots, x_{nn}$.

- Outra demonstração do Teorema 6(f) [vide Knapp]. Fixemos um disco

$$D(0;\tau) = \{X : |X| \leq \tau\}, \text{ com } \tau > 1.$$

É claro que as derivadas de X^N são uniformemente limitadas em $D(0;\tau)$.

Para $A(t)$ e $B(t)$ funções de $\mathbb{R}$ em $M_n(\mathbb{R})$ e deriváveis, é trivial ver que

$$\frac{d}{dt}\{A(t)B(t)\} = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Seja δ_{ij} o delta de Kronecker. As n^2 matrizes

$$E_{rs} = (\delta_{ir}\delta_{sj})_{1\leq i,j\leq n}, \quad \text{onde } 1 \leq r, s \leq n,$$

formam a base canônica do espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$.

Derivando a função $X^N = X \cdots X$ na direção E_{ij} encontramos

$$\frac{\partial(X^N)}{\partial E_{ij}} = \sum_{p=0}^{N-1} X^p E_{ij} X^{N-p-1}.$$

Seja $f(X) = f_1(X)\cdots f_N(X)$ um produto matricial tal que $f_l(X)$ é X ou uma matriz constante. Sua derivada parcial na direção E_{ij} é

$$\frac{\partial f}{\partial E_{ij}}(X) = \sum_{l=1}^{l=N} f_1(X)\cdots\left(\frac{d}{dt}f_l(X+tE_{ij})|_{t=0}\right)\cdots f_N(X).$$

Então, uma derivada parcial de ordem 1 de f é soma de N parcelas de representação similar a f. Assim, uma derivada parcial de ordem 2 de f é a soma de N^2 parcelas. Uma derivada parcial de ordem k de f é a soma de N^k parcelas cujos fatores são do tipo E_{ij} ou o fator X.

Notemos que $|E_{ij}| = 1 < \tau$ e $|X| \leq \tau$.

Recordemos a notação para multi-derivada. Em $\mathbb{R}^m$, com coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_m)$, dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ escrevemos

$$\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_m}F}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \text{onde } |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Destaquemos a costumeira identificação

$$\frac{\partial F}{\partial e_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

A seguir, utilizemos a notação para multi-derivadas em $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$.

Seja α um multi-índice arbitrário em $\mathbb{N}^{n^2}$. Estimando a derivada

$$\frac{\partial^k}{\partial X^\alpha}, \text{ com } |\alpha| = k,$$

da função X^N, encontramos (pelos comentários acima)

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial X^\alpha} \left(\frac{X^N}{N!} \right) \right| \le \sum_{N=0}^{\infty} N^k \frac{\tau^N}{N!}.$$

A série numérica à direita e acima é convergente (teste da razão). Então, pelo teste-M de Weierstrass segue que a série

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial X^\alpha} \left(\frac{X^N}{N!} \right)$$

converge uniformemente em $D(0;\tau)$, para todo raio $\tau > 0$. Pelo Lema 5 segue que a função $\exp(X)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

- Outra demonstração do Teorema 6(g) [vide Apostol, Calculus 2]. Temos,

$$e^{tA} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m A^m}{m!} = \begin{bmatrix} \sum\limits_m \left(\frac{a_{11}^m}{m!} \right) t^m & \cdots & \sum\limits_m \left(\frac{a_{1n}^m}{m!} \right) t^m \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_m \left(\frac{a_{n1}^m}{m!} \right) t^m & \cdots & \sum\limits_m \left(\frac{a_{nn}^m}{m!} \right) t^m \end{bmatrix}.$$

As entradas de e^{tA} são séries de potências, com coeficientes reais e na variável real t. Cada uma destas séries de potências é convergente em todo ponto da reta real (raio de convergência $\rho = +\infty$). Pelo teorema da derivação para séries de potências segue que $t \mapsto e^{tA}$ é derivável e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= \left(\sum_{m\ge 1} \frac{a_{ij}^m m t^{m-1}}{m!} \right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \\ &= \sum_{m\ge 0} \left(\frac{a_{ij}^{m+1} t^m}{m!} \right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \\ &= A + \frac{tA^2}{1!} + \cdots + \frac{t^m A^{m+1}}{m!} + \cdots \\ &= Ae^{tA}. \end{aligned}$$

2. Exemplos

Definamos
$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A aplicação $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, que a cada número complexo $z = a + ib$ (com a e b reais) associa a matriz real $Z \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, vide expressão acima para Z, satisfaz

$$\Phi(z+w) = \Phi(z) + \Phi(w), \ \Phi(zw) = \Phi(z)\Phi(w) \ \text{ e } \ \Phi(\lambda z) = \lambda\Phi(z),$$

quaisquer que sejam os complexos z e w e o real λ. Isto é, Φ é um isomorfismo de corpos e também um isomorfismo entre espaços vetoriais reais. Ainda mais, munindo $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ da norma herdada do espaço vetorial real e normado $\mathbb{R}^4$, encontramos
$$|\Phi(z)| = \sqrt{2}|z|.$$
Logo, Φ é um múltiplo de uma bijeção isométrica.

Desta forma, dada uma série de potências complexas
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$
com coeficientes reais (c_n) e convergente na bola aberta e não degenerada $B(0;\rho)$, concluímos que
$$\begin{aligned} \Phi(f(z)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \Phi(z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n, \end{aligned}$$
para todo z em $B(0;\rho)$.

Em particular, para a função
$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$
e o número $z = i\theta = 0 + i\theta$, temos
$$\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^n.$$
Logo,
$$\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \right] = \Phi(\cos\theta + i \sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observemos que através de Φ identificamos i com uma matriz J. Temos

$$i \equiv J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

a aplicação linear associada à matriz J, pelo isomorfismo fundamental entre matrizes e aplicações lineares. As coordenadas do vetor Je_1 são dadas pela primeira coluna de J e, analogamente, As coordenadas de Je_1 são dadas pela primeira coluna de J. Segue

$$Je_1 = e_2 \quad \text{e} \quad Je_2 = -e_1.$$

Isto mostra que a aplicação J é uma rotação de $\pi/2$ rad. no sentido anti-horário.

Dado $z = a + bi$, com a e b reais, e I a matriz identidade 2×2, identificamos

$$\boxed{z = a + bi \;\equiv\; Z = aI + bJ.}$$

A matriz identidade comuta com J (obviamente). Temos então

$$e^Z = e^{aI+bJ} = e^{aI} e^{bJ}.$$

Temos também

$$e^{aI} = e^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad e^{bJ} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Concluímos então que

$$e^Z = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}.$$

3. A Exponencial de uma Matriz Complexa

Definições e notações.

- *Seja $M_n = M_n(\mathbb{C})$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes complexos.*
- *Identificamos $M_n(\mathbb{C})$ ora com um vetor complexo em $\mathbb{C}^{n^2}$ ora com um vetor real em $\mathbb{R}^{2n^2}$. [Em cada situação a identificação em uso será explicitada.]*
- *Seja $|.|$ a norma usual em $\mathbb{C}^m$, para um m arbitrário,*

$$|(z_1,\ldots,z_m)| = \sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2}.$$

Escrevendo $z_j = x_j + iy_j$, para $j = 1,\ldots,m$, e utilizando a identificação $(z_1,\ldots,z_m) = (x_1,y_1,\ldots,x_m,y_m) \in \mathbb{R}^{2m}$, temos

$$|(z_1,\ldots,z_m)| = |(x_1,y_1,\ldots,x_m,y_m)|.$$

Lema 7. *Sejam $Z = (z_{ij})$ e $W = (w_{ij})$ matrizes em $M_n(\mathbb{C})$. Então,*

$$|ZW| \leq |Z||W|.$$

Prova.

Consideremos a matrizes reais $\mathcal{Z} = (|z_{ij}|)$ e $\mathcal{W} = (|w_{ij})|$ e a matriz complexa

$$ZW = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}.$$

É claro que $|Z| = |\mathcal{Z}|$ e $|W| = |\mathcal{W}|$ e, ainda, $|ZW| = |(|\zeta_{ij}|)|$. Temos

$$|\zeta_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_{ik}w_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_{ik}||w_{kj}|.$$

Logo, $|(|\zeta_{ij}|)| \leq |\mathcal{Z}\mathcal{W}|$. Pelo caso real, temos $|\mathcal{Z}\mathcal{W}| \leq |\mathcal{Z}||\mathcal{W}|$. Donde então concluímos que $|ZW| \leq |Z||W|$♣

Definição. Seja J um conjunto arbitrário de índices. [Para mais detalhes, vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]

- Uma família $(z_j)_J$ de números complexos é somável se as famílias $(\operatorname{Re} z_j)_J$ e $(\operatorname{Im} z_j)_J$, respectivamente das partes reais e imaginárias de (z_j) são ambas somáveis. Neste caso, a soma da família $(z_j)_J$ é

$$\sum_J z_j = \sum_J \operatorname{Re}(z_j) + i \sum_J \operatorname{Im}(z_j).$$

- Uma família $(v^j)_{j\in J}$ de vetores em $\mathbb{C}^m$, com $v^j = (v_1^j, \ldots, v_m^j)$ para cada índice j, é somável se as m famílias de números complexos $(v_1^j)_J, \ldots, (v_m^j)_J$ são somáveis. Neste caso, a soma da família $(v^j)J$ é

$$\sum_J v^j = \left(\sum_J v_1^j, \ldots, \sum_J v_m^j \right).$$

Observações.

- Já vimos que uma família real $(x_j)_J$ é somável se e somente se

$$\sum_J |x_j| < \infty.$$

- Seja $(z_j)_J$ uma família em $\mathbb{C}$. Devido às desigualdades

$$\max(|\operatorname{Re}(z_j)|, |\operatorname{Im}(z_j)|) \le |z_j| \le |\operatorname{Re}(z_j)| + |\operatorname{Im}(z_j)|,$$

segue que a família complexa $(z_j)_J$ é somável se e somente se

$$\sum_J |z_j| < \infty.$$

- A definição de família vetorial complexa somável pode também ser obtida, trivialmente, da definição de família vetorial real somável, via a identificação

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}.$$

Proposição 8. *A família vetorial $(v^j)_J$, contida em $\mathbb{C}^m$, é somável se e só se*

$$\sum |v^j| < \infty.$$

Prova. Duas provas.

1ª. Segue da identificação $\mathbb{C}^m \equiv \mathbb{R}^{2m}$ e da Proposição 2.

2ª. Por definição, a família vetorial $(v^j)_J$ é somável se e somente se as m famílias complexas $(v_1^j)_J, \ldots, (v_m^j)_J$ são somáveis. Dado k, com $k = 1, \ldots, m$, já observamos que a família complexa $(v_k^j)_J$ é somável se e somente se $(|v_k^j|)_J$ é somável. Por outro lado, valem as desigualdades

$$|v_k^j| \leq |v^j| \leq |v_1^j| + \cdots + |v_m^j|, \quad \text{para cada } k = 1, \ldots, m.$$

Donde então segue trivialmente a tese♣

Corolário 9. *Vale a lei associativa para a família vetorial e somável $(v^j)_J \subset \mathbb{C}^m$. Isto é, se $J = \dot{\bigcup}_{k \in K} J_k$ é uma reunião de conjuntos dois a dois disjuntos, então*

$$\sum_{j \in J} v^j = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_k} v^j.$$

Prova. Vejamos duas provas.

1ª. Segue da identificação $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ e do Corolário 3.

2ª. Segue da associatividade para famílias somáveis em $\mathbb{C}$, em cada coordenada [vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SOMA-SERIE-POT.pdf`.]♣

Teorema 10. *Sejam A, B e W matrizes em $M_n(\mathbb{C})$ e Z a variável em $M_n(\mathbb{C})$.*

(a) Está bem definida a matriz

$$e^A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m}{m!} \in M_n(\mathbb{C}).$$

(b) Se A e B comutam então

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(c) A matriz e^A é inversível. Ainda,

$$e^0 = I \quad e \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(d) Se W é inversível, então $e^{W^{-1}AW} = W^{-1}\, e^A\, W$.

(e) A série de funções vetoriais e contínuas

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{Z^m}{m!}$$

converge uniformemente e absolutamente em $D(0;r) = \{Z \in \mathbb{C}^{n^2} : |Z| \leq r\}$, onde $r > 0$, à função contínua

$$\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad onde \ \exp(Z) = e^Z.$$

(f) Identifiquemos $M_n(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$. A aplicação $\exp$ é de classe C^∞.

(g) A função $f : \mathbb{C} \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $f(t) = e^{tA}$, se $t \in \mathbb{R}$, é derivável e

$$f'(t) = Ae^{tA}.$$

(h) Temos $\det(e^Z) = e^{tr(Z)}$, onde $tr(Z)$ é o traço da matriz Z.

(i) Se λ é um autovalor de A, então e^λ é um auto valor de e^A.

(j) Se D é uma matriz diagonal, então e^D também. Ainda, se

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

Prova.

(a) Pelo Lema 7, temos

$$\sum \frac{|A^m|}{m!} \leq \sum \frac{|A|^m}{m!} = e^{|A|} < \infty.$$

Pela Proposição 8 segue que é somável a família vetorial complexa

$$\left(\frac{A^j}{j!}\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{n^2}.$$

Logo, está bem definido o vetor

$$e^A = \sum_j \frac{A^j}{j!} \in \mathbb{C}^{n^2} \equiv M_n(\mathbb{C}).$$

(b) Temos,

$$\sum_{n,m} \left|\frac{A^n}{n!}\frac{B^m}{m!}\right| \leq \sum_{n,m} \frac{|A|^n}{n!}\frac{|B|^m}{m!} = \left(\sum_n \frac{|A|^n}{n!}\right)\left(\sum_m \frac{|B|^m}{m!}\right) = e^{|A|}e^{|B|} < \infty.$$

Pela Proposição 8, segue que é somável a família vetorial complexa

$$\left(\frac{A^n}{n!}\frac{B^m}{m!}\right)_{n,m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{n^2}.$$

Pela propriedade associativa (Corolário 9), e já que A e B comutam, segue

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{n,m} \frac{A^n}{n!}\frac{B^m}{m!} \\ &= \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \sum_{n+m=p} \frac{p!}{n!m!} A^n B^m \\ &= \sum_{p\geq 0} \frac{(A+B)^p}{p!} = e^{A+B}. \end{aligned}$$

(c) Segue de (b).

(d) Temos, $(W^{-1}AW)(W^{-1}AW) = W^{-1}A^2W$. Por indução, $(W^{-1}AW)^n = W^{-1}A^nW$. Logo, pela continuidade do produto de matrizes,

$$e^{W^{-1}AW} = \sum \frac{(W^{-1}AW)^n}{n!} = \sum \frac{W^{-1}A^nW}{n!} = W^{-1}e^AW.$$

(e) Identifiquemos $M_n(\mathbb{C})$ com $\mathbb{R}^{2n^2}$. Suponhamos que $|Z| \leq r$. As entradas [os coeficientes reais] $p_k^m(Z)$, onde $k = 1, \ldots, 2n^2$, da matriz

$$\frac{Z^m}{m!}$$

são polinômios (de grau menor ou igual a m) em $2n^2$ variáveis e satisfazem

$$|p_k^m(Z)| \leq \frac{|Z^m|}{m!} \leq \frac{|Z|^m}{m!} \leq \frac{r^m}{m!} \quad \text{e} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{r^m}{m!} < \infty.$$

Pelo Teste-M de Weierstrass segue que a série de funções a valores reais

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p_k^m(Z)$$

converge uniformemente e absolutamente no disco $D(0;r) = \{Z : |Z| \leq r\}$. Logo, a série vetorial de funções contínuas

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{Z^m}{m!}$$

converge uniformemente e absolutamente no disco $D(0;r) = \{Z : |Z| \leq r\}$ a uma função contínua. Isto é, à função $\exp(Z)$.

(f) Fixemos um disco $D(0;r) = \{Z : |Z| \leq R\}$, com $R > 1$.

Para $A(t)$ e $B(t)$ funções de $\mathbb{R}$ em $M_n(\mathbb{C})$ e deriváveis, é trivial ver que

$$\frac{d}{dt}\{A(t)B(t)\} = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Seja $\{E_{jk} : 1 \leq j, k \leq n\}$ a base canônica de $M_n(\mathbb{R})$ e i a unidade imaginária. Então, $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}, iE_{11}, \ldots, iE_{nn}\}$ é uma base de $M_n(\mathbb{C})$. Escrevamos, e ordenemos, esta base na forma

$$\{E_1, \ldots, E_{2n^2}\}.$$

Consideremos a função $Z \mapsto Z$, definida em $M_n(\mathbb{C})$. É claro que

$$\frac{\partial Z}{\partial E_j} = E_j, \text{ para todo } j = 1, \ldots, 2n^2.$$

Também temos
$$\frac{\partial(Z^N)}{\partial E_j} = \sum_{p=0}^{p=N-1} Z^p E_j Z^{N-p-1}.$$
Então, uma derivada parcial de ordem 1 da função Z^N é uma soma de N parcelas, com cada parcela um produto de N matrizes de norma menor ou igual a R. É então trivial ver que uma derivada parcial de ordem 2 de Z^N é a soma de N^2 parcelas, com cada parcela um produto de N matrizes de norma menor ou igual a R. Por indução, para uma derivada parcial ∂^α de ordem k [isto é, considerando um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n^2}) \in \mathbb{N}^{2n^2}$ de comprimento $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n^2} = k$] encontramos
$$\left|\partial^\alpha\left(\frac{Z^N}{N!}\right)\right| \leq N^k\frac{R^N}{N!}$$
e então
$$\sum_{N=0}^{+\infty}\left|\partial^\alpha\left(\frac{Z^N}{N!}\right)\right| \leq \sum_{N=0}^{+\infty} N^k\frac{M^N}{N!}.$$
A série numérica acima é convergente (teste da razão). Então, pelo teste-M de Weierstrass segue que a série
$$\sum_{N=0}^{+\infty}\partial^\alpha\left(\frac{Z^N}{N!}\right)$$
converge uniformemente e absolutamente sobre os compactos, para todo multi-índice α. Logo, a função exponencial é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{2n^2}$.

(g) Dado $h \neq 0$, segue
$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = e^{tA}\left(\frac{e^{hA} - I}{h}\right) = e^{tA}\left[A + \frac{hA^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{N-1}A^N}{N!} + \cdots\right].$$
Analogamente ao caso real, a série entre colchetes converge a A, para $h \to 0$.

(h) Definindo para $t \in \mathbb{R}$, a função $f(t) = \det(e^{tZ})$ temos
$$f(t+s) = \det\left(e^{tZ+sZ}\right) = \det\left(e^{tZ}e^{sZ}\right) = \det\left(e^{tZ}\right)\det\left(e^{sZ}\right) = f(t)f(s).$$
É trivial ver que $f = f(t)$ é uma função de classe C^∞.

As funções $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente deriváveis e que satisfazem

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s), \text{ para todos } t \text{ e } s,$$

são dadas por $\varphi(t) = e^{\lambda t}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Donde segue

$$f(t) = \det\left(e^{tX}\right) = e^{\lambda t}, \text{ com } \lambda = f'(0).$$

Por outro lado, temos

$$e^{tZ} = I + tZ + \frac{t^2Z^2}{2!} + \cdots = I + tZ + t^2F_Z(t),$$

com $F_Z : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ e de classe C^∞. Indicando as entradas das matrizes, escrevemos $F_Z(t) = (F_{ij}(t)) = (F_{ij})$ e $Z = (z_{ij})$. Então segue

$$\det(e^{tZ}) = \begin{vmatrix} 1+tz_{11}+t^2F_{11} & tz_{12}+t^2F_{12} & tz_{13}+t^2F_{13} & \dots \\ tz_{21}+t^2F_{21} & 1+tz_{22}+t^2F_{22} & tz_{23}+t^2F_{23} & \dots \\ tz_{31}+t^2F_{31} & tz_{32}+t^2F_{32} & 1+tz_{33}+t^2F_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left[1+tz_{jj}+t^2F_{jj}(t)\right]+t^2g(t) \qquad \text{[com } g \text{ um polinômio]}$$

$$= 1+t(z_{11}+\cdots+z_{nn})+t^2h(t) \qquad \text{[com } h \text{ um polinômio].}$$

Donde obtemos

$$f(t) = \det(e^{tZ}) = 1 + \mathrm{tr}(Z)t + t^2h(t).$$

Concluímos então que $\lambda = f'(0) = \mathrm{tr}(Z)$. Logo, $\det(e^{tZ}) = e^{t[\mathrm{tr}(Z)]}$.

(i) e (j). Seguem analogamente ao caso real.

Agradecimentos. Agradeço a Carlos Alexandre Gomes pelo interesse e estímulo quanto a este tópico e pela troca de idéias.

REFERÊNCIAS

1. Apostol, T., Cálculo vol 2., editora Reverté, 1999.

2. de Oliveira, Oswaldo R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv (2012), available at `http://arxiv.org/abs/1207.1472v2`.

3. Knapp, A. W., Basic Real Analysis, Birkhäuser, 2005.