

**MAT 5714 - FUNÇÕES ANALÍTICAS**  
**Instituto de Matemática e Estatística da USP**  
**Ano 2014**

**Professor Oswaldo R. B. de Oliveira**

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>      [oliveira@ime.usp.br](mailto:oliveira@ime.usp.br)

**Capítulo 10 - Integração Complexa**

- 10.1 Integral sobre Curvas.
- 10.2 Continuidade e Derivação sob o sinal de Integração (integrais próprias e parâmetro complexo).
- 10.3 O Teorema de Cauchy-Goursat e Primitiva Global, o Teorema de Cauchy e o Teorema de Cauchy Homotópico.
- 10.4 A Fórmula Integral do Índice e a Fórmula Integral de Cauchy.
- 10.5 O Teorema de Cauchy Homológico (Teorema Global de Cauchy).
- 10.6 O Teorema de Morera e o Princípio da Reflexão de Schwarz.
- 10.7 Continuidade e Derivação sob o sinal de Integração (integrais impróprias e parâmetro complexo).
- 10.8 Representação de  $f$  via  $\operatorname{Re}(f)$  [Fórmula de Schwarz].

# Capítulo 1

## NÚMEROS COMPLEXOS

## Capítulo 2

# TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

## Capítulo 3

# POLINÔMIOS

## Capítulo 4

# SÉRIES E SOMABILIDADE

## Capítulo 5

# SÉRIES DE POTÊNCIAS

## Capítulo 6

# FUNÇÕES ANALÍTICAS

## Capítulo 7

# EXPONENCIAL, ÍNDICE, PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

## Capítulo 8

# TEOREMA DE CAUCHY HOMOTÓPICO E LOGARITMO

## Capítulo 9

# TEOREMA DA APLICAÇÃO E ESFERA DE RIEMANN E APLICAÇÕES CONFORMES

# Capítulo 10

## INTEGRAÇÃO COMPLEXA

### 10.1 - Integral sobre curvas

Sejam  $J = [a, b]$  em  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ , com

$$f = u + iv, \text{ onde } u = \operatorname{Re}(f) \text{ e } v = \operatorname{Im}(f).$$

A integral definida de  $f$  é, se  $u$  e  $v$  são integráveis,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt, \text{ também denotada } \int_a^b f dt.$$

Uma primitiva de  $f$  é toda função  $F : J \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$F'(t) = f(t), \text{ para todo } t \in J.$$

Sejam  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\lambda$  uma constante em  $\mathbb{C}$ . Se  $f$  e  $g$  são integráveis, então é fácil ver que  $f + g$  é integrável e

$$\int_a^b (f + \lambda g)dt = \int_a^b f dt + \lambda \int_a^b g dt.$$

Como sempre,  $\Omega$  denota um aberto em  $\mathbb{C}$  em todo o capítulo. Definimos

$$C(\Omega; \mathbb{C}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Dadas  $f \in C(\Omega; \mathbb{C})$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$ , a integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$  é

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Sejam  $f \in C(\Omega; \mathbb{C})$  e  $\gamma$  uma curva  $C^1$  por partes em  $\Omega$ , dada pela justaposição  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$  com cada curva  $\gamma_j$  de classe  $C^1$ . A integral de  $f$  ao longo de  $\gamma$  é

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Considerando a curva reversa  $\gamma^-$ , vale a identidade

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**10.1 Lema.** *Seja  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  contínua. Então,*

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

**Prova.**

Existe um número real  $\theta$  tal que

$$\int_a^b \varphi(t) dt = e^{i\theta} \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|$$

e portanto

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \int_a^b e^{-i\theta} \varphi(t) dt \text{ é um número real.}$$

Logo,

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} \varphi(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re}[e^{-i\theta} \varphi(t)]| dt \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt \spadesuit$$

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$ . O comprimento ("length") de  $\gamma$  é

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Se  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$  é uma justaposição de curvas de classe  $C^1$ , definimos

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \dots + L(\gamma_n).$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**10.2 Teorema (Estimativa M-L).** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  contínua sobre  $\gamma : J \rightarrow \Omega$ , onde  $\gamma$  é  $C^1$  por partes, e  $M \geq 0$  satisfazendo*

$$|f(\gamma(t))| \leq M, \text{ para todo } t \text{ em } J.$$

Então,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma).$$

**Prova.**

Suponhamos  $\gamma$  de classe  $C^1$  [deixo caso geral ao leitor]. Mantida a notação  $J = [a, b]$ , o Lema 10.1 garante

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma) \clubsuit$$

**10.3 Proposição.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  com derivada contínua.*

(A) *Dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$ , temos*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) dt.$$

(B) *Dado um segmento linear de extremidades  $z$  e  $w$  e contido em  $\Omega$ , temos*

$$f(z) - f(w) = (z - w) \int_0^1 f'(w + t(z - w)) dt \quad [TVM \text{ (forma integral)}].$$

**Prova.**

Pela regra da cadeia [vide 9.1], a derivada de  $f \circ \gamma$  existe e é contínua.

(A) Pondo  $f = u + iv$ , segue  $f \circ \gamma = (u \circ \gamma) + i(v \circ \gamma) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e então

$$\int_a^b (f \circ \gamma)' dt = \int_a^b (u \circ \gamma)' dt + i \int_a^b (v \circ \gamma)' dt = (u \circ \gamma)|_a^b + i(v \circ \gamma)|_a^b = (f \circ \gamma)|_a^b.$$

(B) Seja  $\sigma(t) = w + t(z - w)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Por (A) e a regra da cadeia (9.1),

$$f(z) - f(w) = \int_0^1 (f \circ \sigma)'(t) dt = (z - w) \int_0^1 f'(w + t(z - w)) dt \clubsuit$$

## 10.2 - Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração (integrais próprias e parâmetro complexo)

**10.4 Teorema.** *Seja  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  contínua. Então,*

(A) *A função  $\varphi(z) = \int_0^1 f(z, t)dt$  é contínua em  $\Omega$ .*

(B) *Se a função  $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$  é contínua [em  $\Omega \times [0, 1]$ ] então  $\varphi$  é derivável e*

$$\text{(Regra de Leibnitz [em } \mathbb{C} \text{] para integral)} \quad \varphi'(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)dt.$$

**Prova.** Fixemos  $z \in \Omega$ , um  $r > 0$  tal que  $K = D(z; r) \times [0, 1] \subset \Omega \times [0, 1]$  e  $\epsilon > 0$ .

(A) Como  $f$  é uniformemente contínua no compacto  $K$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\varphi(z) - \varphi(z+h)| \leq \int_0^1 |f(z, t) - f(z+h, t)|dt \leq \epsilon, \text{ se } |h| < \delta.$$

(B) Para  $h$  em  $\mathbb{C}$ , com  $0 < |h| < r$ , temos

$$\frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)dt = \int_0^1 \left[ \frac{f(z+h, t) - f(z, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right] dt$$

[nesta passagem usamos a Proposição 10.3(B)]

$$= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t)ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)ds \right] dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z+sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right] dsdt$$

Pela continuidade uniforme de  $\partial f/\partial z$  em  $K$ , existe  $\eta > 0$  tal que o módulo do último integrando acima é menor que  $\epsilon$  para quaisquer  $0 \leq t, s \leq 1$  e  $|h| < \eta$ . Segue então, pelo Lema 10.1,

$$\left| \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)dt \right| \leq \epsilon, \text{ se } 0 < |h| < \eta.$$

Portanto  $\varphi$  é holomorfa e vale a fórmula anunciada♣

É instrutivo provar o teorema acima através da Regra de Leibnitz em  $\mathbb{R}$  [por favor, enuncie-a e prove-a] e das equações de Cauchy-Riemann. Lembre que uma função  $f = u + iv$  é derivável-complexa se e somente o campo associado  $F(u, v)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

**10.3 - O Teorema de Cauchy-Goursat e Primitiva Global,  
o Teorema de Cauchy e o Teorema de Cauchy Homotópico**

**10.5 Proposição.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  contínua,  $F$  uma primitiva de  $f$  e  $\gamma$  uma curva  $C^1$  por partes em  $\Omega$  conectando o ponto inicial  $z_0$  ao ponto final  $z_1$ . Então,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

*Em particular, se  $\gamma$  é fechada então*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Prova.**

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$  (verifique o caso em que  $\gamma$  é  $C^1$  por partes).

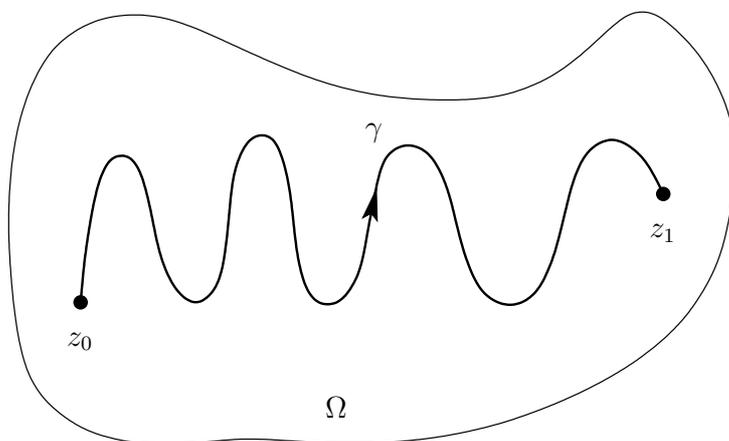


Figura 10.1: Independência do caminho

Pela hipótese, a regra da cadeia (9.1), e a Proposição 10.3(A) segue

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} F' dz = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = (F \circ \gamma)|_a^b = F(z_1) - F(z_0) \clubsuit$$

Seja  $\Omega$  conexo. Pela Proposição 10.5, se  $F \in \mathcal{H}(\Omega)$  é tal que  $F' \equiv 0$  então  $F$  é constante [cheque]. Duas primitivas de  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , se existirem, diferem por uma constante [cheque]. Vide também Proposição 8.1.

O triângulo convexo e fechado determinado por  $z_1, z_2$  e  $z_3$  (todos em  $\mathbb{C}$ ) é

$$\Delta = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 : \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\}.$$

**10.6 Teorema.** *Seja  $f : B(a; r) \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $r > 0$ , contínua e satisfazendo*

$$\int_{\partial\Delta} f(w)dw = 0$$

*para todo triângulo  $\Delta$  contido em  $B(a; r)$ . Dado  $z$  em tal bola, definamos*

$$F(z) = \int_a^z f(w)dw \quad [a \text{ integral de } f \text{ sobre } \sigma(t) = a + t(z - a), 0 \leq t \leq 1].$$

*Então,  $F$  é holomorfa e*

$$F' = f.$$

*Vale um resultado análogo para retângulos (com lados paralelos aos eixos).*

**Prova.** Em duas partes.

Podemos supor  $a = 0$  [cheque]. Sejam  $z$  e  $z + h$  distintos em  $B(0; r)$ .

◇ Seja  $\Delta$  o triângulo de vértices  $0, z + h$  e  $z$ , orientado de  $0$  a  $z + h$ , de  $z + h$  a  $z$  e de  $z$  a  $0$ .

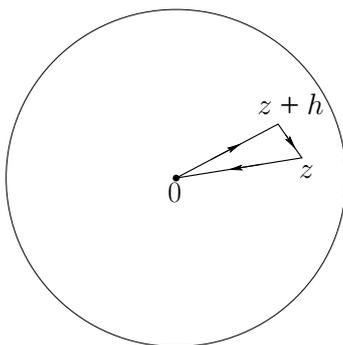


Figura 10.2: O caso “integral nula ao longo da fronteira de triângulos”

Seja  $\sigma(t) = z + th$ , onde  $t \in [0, 1]$ . Então,

$$0 = \int_{\partial\Delta} f dw = F(z + h) - \int_{\sigma} f dw - F(z).$$

Logo, devido à continuidade de  $f$ ,

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{\int_0^1 f(z + th)h dt}{h} = \int_0^1 f(z + th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z).$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

◊ Para retângulos, definimos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f dw$$

pela integração ao longo de um segmento horizontal com ponto inicial  $\alpha$  seguida da integração ao longo de um segmento vertical com ponto final  $\beta$ .

A seguir, definimos

$$F(z) = \int_0^z f(w)dw.$$

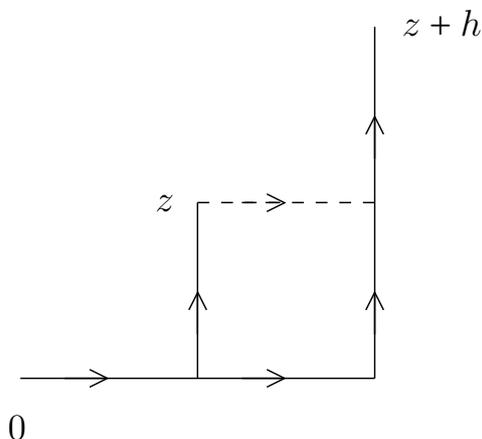


Figura 10.3: O caso “integral nula ao longo da fronteira de retângulos”

Observemos que escrevendo  $h = h_1 + ih_2$  então temos

$$\int_z^{z+h} 1dw = \int_z^{z+h_1} 1dw + \int_{z+h_1}^{z+h_1+ih_2} 1dw = h_1 + ih_2 = h.$$

Donde então segue

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(w) - f(z)]dw.$$

Para encerrar, pela estimativa M-L encontramos

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(w) - f(z)]dw \right| \leq \sup_{w \in D(z;|h|)} |f(w) - f(z)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \clubsuit$$

**10.7 Teorema (Cauchy-Goursat).** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Seja  $\Delta$  um triângulo convexo e fechado contido em  $\Omega$ . Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

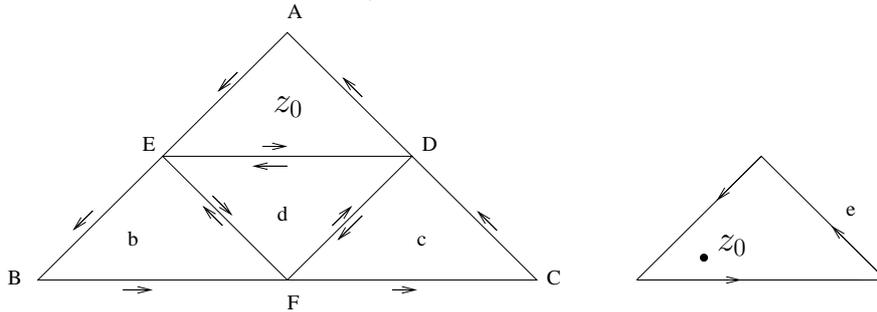


Figura 10.4: Teorema de Cauchy-Goursat

**Prova.**

Iniciemos (v. figura 10.1) orientando  $\partial\Delta$  no sentido anti-horário e descrevendo  $\partial\Delta$  pela justaposição de segmentos  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ . Destacando os pontos médios dos lados de  $\partial\Delta$  e unindo tais pontos por segmentos de reta obtemos quatro triângulos na região  $\Delta$ :  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$ . Orientamos a fronteira de cada um desses triângulos também no sentido anti-horário. Assim temos,

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \int_{\partial\Delta_1} f dz + \int_{\partial\Delta_2} f dz + \int_{\partial\Delta_3} f dz + \int_{\partial\Delta_4} f dz.$$

Destaquemos, entre as integrais no segundo membro, a de maior módulo e  $\Delta^{(1)}$  o respectivo triângulo. Para  $\Delta^{(1)}$ , analogamente escrevemos a integral em  $\partial\Delta^{(1)}$  como soma de quatro integrais sobre a fronteira de quatro triângulos formados a partir dos pontos médios de  $\partial\Delta^{(1)}$  e com orientação anti-horária e destacamos  $\partial\Delta^{(2)}$ , cuja respectiva integral tem maior módulo. Iterando, obtemos uma sequência  $(\Delta^{(n)})_{\mathbb{N}}$  com  $\Delta^{(0)} = \Delta$ . Seja  $\delta^{(n)}$  o comprimento do maior lado de  $\Delta^{(n)}$  e  $\delta = \delta^{(0)}$ . Temos então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^{(n+1)} &\subset \Delta^{(n)}, \\ \left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz \right|, \\ L(\partial\Delta^{(n)}) &= \frac{L(\partial\Delta)}{2^n}, \\ \delta^{(n)} &= \frac{\delta}{2^n}. \end{aligned}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

A sequência dos triângulos compactos  $\Delta^{(n)}$  é decrescente (ordenada pela inclusão) e o diâmetro [i.e., o sup das distâncias entre dois pontos quaisquer de um conjunto] dessas regiões é  $\delta^{(n)}$  e

$$\delta^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donde, a intersecção desses compactos é um ponto  $z_0$  [Princípio dos Intervalos Encaixantes, cheque].

A seguir, destaquemos que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\tau > 0$  tal que

(a)  $B(z_0; \tau) \subset \Omega$

(b) Se  $0 < |z - z_0| < \tau$ , então

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon.$$

Sendo que (b) equivale a

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|, \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < \tau.$$

Se  $n$  é suficientemente grande tal que

$$\delta^{(n)} = \frac{\delta}{2^n} < \tau,$$

então  $\Delta^{(n)}$  está contido em  $B(z_0; \tau)$ . Ainda mais, notando que

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} dz = 0 = \int_{\partial\Delta^{(n)}} z dz$$

temos

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz.$$

Pela última equação, pela última inequação e pela estimativa M-L segue

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz \right| \leq \epsilon \delta^{(n)} L(\partial\Delta^{(n)}) = \frac{\epsilon \delta L(\partial\Delta)}{4^n}$$

e então

$$\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f dz \right| \leq \epsilon \delta L(\partial\Delta) \clubsuit$$

O Teorema de Cauchy, a seguir, estabelece que sob certas condições temos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Este é um dos resultados centrais da análise complexa. Existe uma variedade de condições para provar tal resultado mas em todos é assumido que  $f$  é holomorfa ou analítica em um aberto  $\Omega$ . As demais condições são topológicas (geométricas) e estão relacionadas com o aberto  $\Omega$  (e.g., conjuntos simples tais como bolas abertas, triângulos abertos, retângulos abertos, etc. ou abertos menos simples) e com a curva  $\gamma$  (ou ciclo, como no enunciado do Teorema de Cauchy Homológico).

As versões simples do Teorema de Cauchy já são suficientes para demonstrar a fórmula integral de Cauchy e então que toda função holomorfa é analítica. Entretanto, como já estudamos um pouco conjuntos simplesmente conexos (o suficiente para provar o Teorema da Aplicação Riemann), podemos imediatamente apresentar uma versão do Teorema de Cauchy (independente do teorema da aplicação de Riemann) que é razoavelmente abrangente do ponto de vista da teoria da homotopia. O resultado a seguir (Teorema 10.8) tem importância por si só e será utilizado na demonstração do Teorema de Cauchy Homotópico.

Notemos que se  $f$  é holomorfa num aberto  $\Omega$  e tem primitiva local e  $\gamma$  é uma curva em  $\Omega$  e de classe  $C^1$  por partes, então com a notação da Definição 8.2 temos

$$(10.8.1) \quad \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^n [g_k(\gamma(a_k)) - g_k(\gamma(a_{k-1}))] = \sum(f; \gamma).$$

**10.8 Teorema.** *Seja  $\Omega$  um aberto simplesmente conexo e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa.*

• *Fixemos  $\alpha$  em  $\Omega$ . Dado um ponto  $z$  em  $\Omega$ , seja  $\gamma$  uma curva arbitrária em  $\Omega$  e de classe  $C^1$ , de início  $\alpha$  e ponto final  $z$ . Então, a integral*

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw$$

*independe de  $\gamma$ . Ainda,  $F$  é uma primitiva (global) de  $f$ .*

• *Se  $\eta$  é uma curva em  $\Omega$ , fechada e  $C^1$  por partes, então*

$$(Teorema de Cauchy) \quad \int_{\eta} f(w)dw = 0.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Prova.**

- ◇ Pelo Teorema de Cauchy-Goursat e o Teorema 10.6 segue que  $f$  tem uma primitiva local. Pelo Teorema 8.7 [existência de primitiva global se existe primitiva local, em abertos simplesmente conexos] temos que

$$F(z) = \sum(f; \gamma)$$

independe de  $\gamma$  e é primitiva global de  $f$ . Pela identidade (10.8.1) segue

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw.$$

- ◇ Pela Proposição 10.5 obtemos

$$\int_{\eta} f dw = 0 \clubsuit$$

Apresentemos o clássico Teorema de Cauchy Homotópico, enunciado para funções holomorfas e curvas  $C^1$  por partes.

**10.9 Teorema de Cauchy Homotópico.** *Sejam*

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad e \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$$

*duas curvas de classe  $C^1$  por partes e homotópicas em  $\Omega$ , com mesmo ponto inicial e mesmo ponto final ou, caso contrário, ambas fechadas. Seja*

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ holomorfa em } \Omega.$$

*Então temos*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

*Em particular, se  $\gamma_0$  é homotópica a um ponto,*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0.$$

**Prova.**

Pelo teorema de Cauchy- Goursat e o teorema 10.6, a função  $f$  tem primitiva local. A conclusão é trivial e segue do Teorema 8.6 [o teorema de Cauchy homotópico para funções com primitiva local] e da identidade (10.8.1)♣

## 10.4 - A Fórmula Integral do Índice e a Fórmula Integral de Cauchy

**10.10 Teorema.** *Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  fechada e  $C^1$  por partes e  $a \notin \text{Imagem}(\gamma)$ . Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \text{Ind}_{\gamma}(a).$$

**Prova.**

Pelo Corolário 7.12 existem duas funções, ambas de classe  $C^1$  por partes,  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $r : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  satisfazendo

$$\gamma(t) - a = r(t)e^{i\theta(t)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} &= \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt \\ &= \int_0^1 \frac{r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{r'(t)}{r(t)} dt + i \int_0^1 \theta'(t) dt \\ &= \ln r(t) \Big|_0^1 + i[\theta(1) - \theta(0)]. \\ &= 0 + 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(a) \spadesuit \end{aligned}$$

**10.11 Teorema (Fórmula Integral de Cauchy).** *Sejam  $\Omega$  um aberto convexo,  $f$  holomorfa em  $\Omega$  e uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  fechada e  $C^1$  por partes. Se  $a \in \Omega \setminus \text{Imagem}(\gamma)$  então*

$$f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**Prova.**

Seja  $r > 0$  tal que  $D(a; r) \subset \Omega \setminus \text{Imagem}(\gamma)$ . Definamos

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_r(t) = a + r \frac{\gamma(t)-a}{|\gamma(t)-a|}, & \text{para } 0 \leq t \leq 1, \\ H(t, s) = s\sigma(t) + (1-s)\gamma(t) \in \Omega \setminus D\left(a; \frac{r}{2}\right), & \text{para } 0 \leq s, t \leq 1. \end{cases}$$

[Mostre que  $H$  está bem definida.] Então,  $H$  é uma homotopia entre as curvas fechadas  $\gamma$  e  $\sigma$  com a homotopia realizada no aberto  $\Omega \setminus D(a; r/2)$ . Ainda,

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-a} \text{ e } z \mapsto \frac{1}{z-a} \text{ são holomorfas em } \Omega \setminus D\left(a; \frac{r}{2}\right).$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

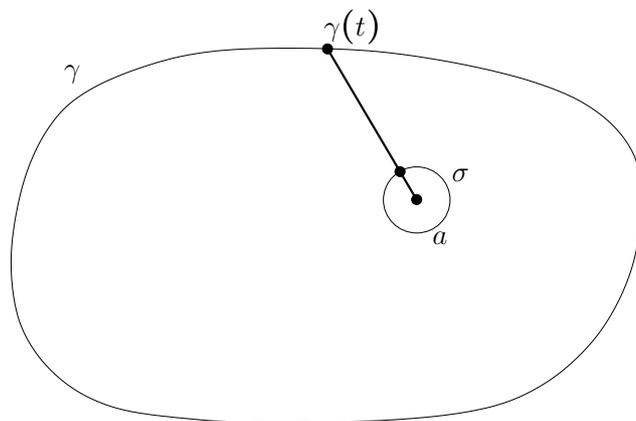


Figura 10.5: Fórmula Integral de Cauchy

Pelo teorema de Cauchy homotópico (10.9) segue

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_{\sigma} \frac{f(z)dz}{z-a} \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\sigma} \frac{dz}{z-a}.$$

Por tais identidades e a forma integral do índice segue

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz + f(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) 2\pi i.$$

Seja  $L$  o comprimento da curva

$$t \mapsto \frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|}.$$

O comprimento de  $\sigma$  é  $rL$ . Pela estimativa M-L, com  $r$  pequeno o suficiente,

$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq (|f'(a)| + 1)rL \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0 \clubsuit$$

No que segue usaremos o trivial resultado abaixo.

**10.12 Lema.** *Seja  $\gamma$  uma curva  $C^1$  por partes e  $f_n : \text{Imagem}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma seqüência de funções contínuas convergindo uniformemente a  $f : \text{Imagem}(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ . Então,*

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**Prova.**

Segue de  $|f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|M$ , para todos  $n \geq 1$  e  $t$  no domínio de  $\gamma$ , onde  $M = \max\{|\gamma'(t)| : t \in \text{domínio}(\gamma)\} \clubsuit$

**10.13 Teorema.** *Sejam  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , um ponto  $a$  em  $\Omega$  e  $d = d(a; \mathbb{C} \setminus \Omega)$ .*

(a) *Para todo  $z \in B(a; d)$  temos*

$$f(z) = \sum c_n (z - a)^n, \text{ com } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ para todo } n \geq 0.$$

(b) *Seja  $r$  tal que  $0 < r < d$ . Vale a F3rmula Integral de Cauchy para as Derivadas,*

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \text{ para todo } n \geq 0.$$

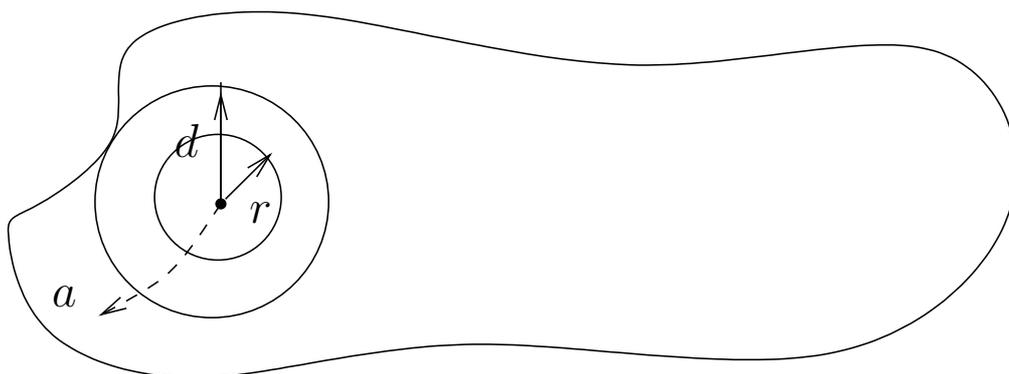


Figura 10.6: Ilustra33o ao Teorema 10.13

**Prova.**

3c3 claro que  $d > 0$ , pois  $a$  n3o pertence ao fechado  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

(a) e (b). Fixemos  $r$  tal que  $0 < r < d$  e  $z$  tal que  $|z - a| < r$ . Definindo a curva

$$\gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta}, \text{ onde } \theta \in [0, 2\pi] \text{ (vide figura),}$$

pela f3rmula de Cauchy segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Temos

$$\frac{|z - a|}{|w - a|} < 1 \text{ para todo } w \text{ em Imagem}(\gamma_r) = S_r(a).$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Pelo Teste-M [com a série de majorantes dada pela série geométrica de razão  $(|z - a|/r) < 1$  e convergente], a série de funções na variável  $w$  obtidas de

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \frac{(w - a)^{-1}}{1 - \frac{z - a}{w - a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}},$$

converge uniformemente sobre a circunferência  $S_r(a)$ .

Como  $f$  é contínua e limitada na circunferência  $S_r(a)$  obtemos

$$\frac{f(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}},$$

com convergência uniforme na variável  $w$  e sobre a circunferência  $S_r(a)$ .

Pelo já mostrado acima e pelo Lema 10.12 segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right) (z - a)^n.$$

Isto é, expandimos  $f$  em uma série de potências centrada em  $a$  e convergente em  $B(a; r)$ , para todo  $0 < r < d$ . Como sabemos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos também a fórmula integral de Cauchy para as derivadas♣

**10.14 Corolário.**  $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ .

**Prova.** Trivial, pois já vimos que  $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$ ♣

**10.15 Fórmula para o Valor Médio (Gauss).** *Seja  $f \in \mathcal{H}(B(a; R))$ . Então,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \text{ para todo } 0 < r < R.$$

**Prova.**

Basta desenvolver

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a} dz, \text{ onde } \gamma_r(\theta) = a + re^{i\theta} \text{ e } \theta \in [0, 2\pi] \clubsuit$$

## 10.5 - O Teorema de Cauchy Homológico (Teorema Global de Cauchy)

Dado um aberto, para quais curvas o teorema de Cauchy é válido? O teorema de Cauchy homotópico responde parcialmente tal questão. Para avançar na resposta generalizamos a noção de integral de linha. Por exemplo, dada

$$\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$$

de classe  $C^1$  por partes, com cada  $\gamma_j$  de classe  $C^1$ , temos

$$(10.5.1) \quad \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Assim (e informalmente), é natural considerar a soma formal finita

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

Tais somas formais (finitas) são chamadas **cadeias**.

Informalmente, a soma de duas cadeias  $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$  e  $\eta_1 + \cdots + \eta_m$  é feita naturalmente, simplesmente somando livremente. Isto é,

$$(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n) + (\eta_1 + \cdots + \eta_m) = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n + \eta_1 + \cdots + \eta_m.$$

A propriedade aditiva (10.5.1) para curvas também vale para uma cadeia.

Curvas idênticas são naturalmente adicionadas, e denotamos a soma por um múltiplo.

O oposto (reverso) de uma curva  $\gamma$  é indicado por  $-\gamma$ . Isto é, indicamos a curva reversa  $\gamma^-$  por

$$(-1)\gamma = -\gamma.$$

Assim, dado  $m \in \{1, \dots\}$  temos

$$m(-\gamma) = -m\gamma.$$

Com tal notação toda cadeia  $\Gamma$  pode ser escrita na forma

$$\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n, \text{ com cada } m_j \in \mathbb{Z}.$$

Parcelas com coeficiente zero podem ser introduzidas à vontade. Isto permite descrever duas cadeias em termos das mesmas curvas e somar as cadeias via coeficientes. A cadeia nula tem todos os coeficientes nulos.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É bastante útil interpretar uma curva  $\gamma$  e uma cadeia  $\Gamma = m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$ , onde todas estas curvas são de classe  $C^1$  por partes e com imagens em um aberto  $\Omega$  e os números  $m, m_1, \dots, m_n$  são inteiros, como funcionais lineares definidos sobre o espaço vetorial

$$C(\Omega; \mathbb{C}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ onde } f \text{ é contínua}\}.$$

Definimos então o funcional linear  $T_\gamma$  por

$$T_\gamma(f) = \int_\gamma f(z)dz, \text{ para cada } f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ contínua.}$$

Evidentemente, desejamos a propriedade aditiva

$$T_\Gamma(f) = \int_\Gamma f dz = \int_{m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n} f dz = m_1 \int_{\gamma_1} f dz + \dots + m_n \int_{\gamma_n} f dz.$$

Sendo assim, definimos a operação

$$T_\Gamma = m_1 T_{\gamma_1} + \dots + m_n T_{\gamma_n}.$$

Observemos que, para uma arbitrária  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  contínua,

$$T_{0\gamma}(f) = 0 \int_\gamma f dz = 0 \text{ e}$$

$$T_{-\gamma}(f) = \int_{-\gamma} f dz = \int_{\gamma^-} f dz = - \int_\gamma f dz = -T_\gamma(f).$$

**ATENÇÃO.** Devemos evitar confundir cadeia com curva. Notemos que dada uma curva  $\gamma$  arbitrária, de forma geral o funcional linear

$$T_\gamma + T_\gamma \text{ associado à cadeia } 2\gamma = \gamma + \gamma$$

é diferente do funcional linear

$$T_\sigma \text{ associado à curva } \sigma(t) = 2\gamma(t).$$

Resumindo, se  $\gamma$  não é nula então

$$\text{cadeia } 2\gamma \neq \text{curva } 2\gamma.$$

O conceito adequado para justificar tais interpretações e operações é o de grupo abeliano (comutativo) livre. A seguir, definimos cadeia e ciclo.

**10.16 Definição.** *Uma cadeia é um elemento do grupo abeliano livre gerado pelo conjunto  $\mathcal{C}^1$  das curvas de classe  $C^1$  por partes definidas em intervalos compactos não triviais. Indicamos tal grupo por  $\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}^1)}$ . Precisamente, temos*

$$\mathbb{Z}^{(\mathcal{C}^1)} = \{\Gamma : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathbb{Z} \text{ tais que } \Gamma \text{ é nula, exceto numa quantidade finita de curvas}\}$$

*munido da usual operação adição de funções efetuada ponto a ponto. Por último, um ciclo é uma cadeia em que cada curva é fechada.*

Usualmente, uma cadeia é identificada com uma soma formal  $\Gamma = \sum_J m_j \gamma_j$ , com  $J$  um conjunto de índices, coeficientes  $m_j \in \mathbb{Z}$  para cada  $j$  em  $J$ , curvas  $\gamma_j \in \mathcal{C}^1$  para cada  $j$ , sob a condição  $m_j = 0$  exceto para uma quantidade finita de índices.

Facilitando a notação, uma cadeia é dada por uma soma finita

$$\Gamma = m_1 \gamma_1 + \cdots + m_n \gamma_n$$

com  $m_1, \dots, m_n$  números inteiros e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  curvas no conjunto  $\mathcal{C}^1$ .

A imagem da cadeia  $\Gamma = m_1 \gamma_1 + \cdots + m_n \gamma_n$  é

$$\text{Imagem}(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^n \text{Imagem}(\gamma_j).$$

Se  $\text{Imagem}(\Gamma) \subset \Omega$ , dizemos que  $\Gamma$  é uma cadeia em  $\Omega$ .

Se  $f : \text{Imagem}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função contínua, definimos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n m_j \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

A cadeia oposta de  $\Gamma$  é

$$-\Gamma = \sum_{j=1}^n (-m_j) \gamma_j.$$

[Observemos que introduzindo o conceito de cadeia reversa

$$\Gamma^- = \sum_{j=1}^n m_j \gamma_j^-,$$

então obtemos

$$\Gamma^- = -\Gamma.]$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Se  $\alpha$  não pertence a Imagem( $\Gamma$ ), o índice de  $\alpha$  em relação a  $\Gamma$  é

$$\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - \alpha} dz.$$

Intuitivamente, uma curva fechada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é homóloga a 0 em  $\Omega$  se  $\gamma$  não contorna pontos no complementar de  $\Omega$ . Formalmente,  $\gamma$  é homóloga a 0 em  $\Omega$  se

$$\text{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha \text{ no complementar de } \Omega.$$

**Notação.** Se  $\gamma$  é homóloga a 0 em  $\Omega$ , escrevemos

$$\gamma \sim 0 \text{ (em } \Omega \text{)}.$$

Analogamente, um ciclo  $\Gamma$  é  $\Omega$ -homólogo a 0 se  $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha$  em  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .

**Notação:**  $\Gamma \sim 0$  (em  $\Omega$ ).

Dois ciclos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são homólogos em  $\Omega$  se

$$\text{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \text{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha), \text{ para todo } \alpha \text{ no complementar de } \Omega.$$

**Notação.** Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são homólogos em  $\Omega$ , escrevemos

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \text{ (em } \Omega \text{)}.$$

Destaquemos que temos

$$\Gamma_1 \sim \Gamma_2, \text{ em } \Omega, \text{ se e somente se temos } \Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0 \text{ em } \Omega.$$

Dados dois ciclos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  em  $\Omega$ , é trivial e importante a propriedade

$$\text{Ind}_{\Gamma_1 + \Gamma_2}(\alpha) = \text{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) + \text{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha), \text{ se } \alpha \notin \text{Imagem}(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

A versão mais geral do Teorema de Cauchy vale para um aberto  $\Omega$  qualquer e mostra uma iteração entre  $\Omega$  e o ciclo  $\Gamma$ . Veremos que o par  $(\Omega, \Gamma)$  satisfaz

$$\int_{\Gamma} f dz = 0, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

se e somente temos

$$\text{Ind}_{\Gamma} \equiv 0 \text{ no complementar de } \Omega.$$

**10.17 Teorema de Cauchy Homológico.** *Seja  $\Omega$  um aberto arbitrário e  $\Gamma$  um ciclo homólogo a 0 em  $\Omega$ . Seja  $f$  holomorfa em  $\Omega$  e  $\alpha$  um ponto em  $\Omega$  mas não em  $\text{Imagem}(\Gamma)$ . Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = f(\alpha) \text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) \quad e \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Ainda, se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são ciclos homólogos em  $\Omega$ , então

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

**Prova.** [Baseada em Dixon (1971), mas evitando teoremas de Morera e Fubini.]

Dividamos a prova em partes. Consideremos

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } z \neq w, \\ f'(w) & \text{se } z = w. \end{cases}$$

- ◇ O complementar da diagonal de  $\Omega \times \Omega$  é um aberto. É trivial ver que neste aberto  $g$  é contínua e que  $\frac{\partial g}{\partial z}$  existe e é contínua.
- ◇ Seja  $(a, a)$  na diagonal de  $\Omega \times \Omega$  e  $B(a; r)$ , com  $r > 0$ , contida em  $\Omega$ .

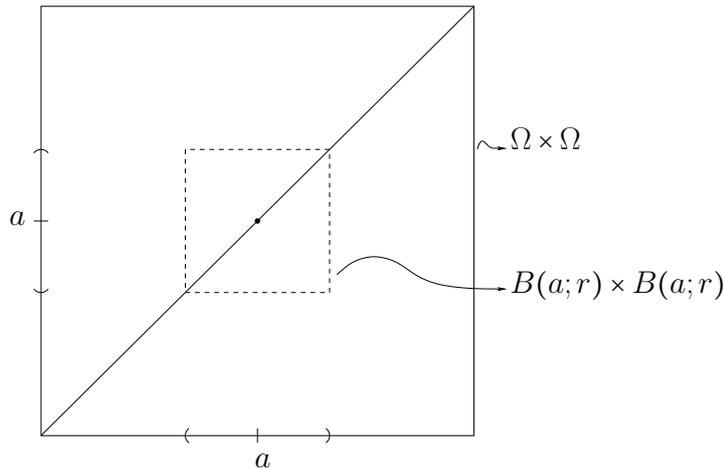


Figura 10.7: Prova de Dixon

Para  $(z, w)$  arbitrário em  $B(a; r) \times B(a; r)$  temos [Proposição 10.3(B)]

$$f(z) - f(w) = (z - w) \int_0^1 f'(w + t(z - w)) dt.$$

Donde segue

$$g(z, w) = \int_0^1 f'(w + t(z - w)) dt, \quad \text{para todo } (z, w) \in B(a; r) \times B(a; r).$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Definindo

$$\varphi(z, w, t) = f'(w + t(z - w)) \text{ para } (z, w, t) \in B(a; r) \times B(a; r) \times [0, 1],$$

temos que  $\varphi$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  são contínuas em  $B(a; r) \times B(a; r) \times [0, 1]$ . Pela regra de Leibnitz complexa, as funções  $g$  e  $\frac{\partial g}{\partial z}$  são contínuas em  $B(a; r) \times B(a; r)$ .

Em suma,  $g$  e  $\frac{\partial g}{\partial z}$  são contínuas em  $\Omega \times \Omega$ .

Consideremos o aberto [verifique]

$$V = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ não está em Imagem}(\Gamma) \text{ e } \text{Ind}(\Gamma; z) = 0\}.$$

Devido às hipóteses,  $V$  contém  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ . Logo,  $\mathbb{C} = \Omega \cup V$ . Definamos então

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, w) dw & \text{se } z \in \Omega, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw & \text{se } z \in V. \end{cases}$$

Dado  $z$  na intersecção  $\Omega \cap V$  temos

$$\int_{\Gamma} \frac{dw}{z-w} = 0$$

e então o valor das integrais na definição de  $h(z)$  coincidem e  $h$  é bem posta.

- ◊ A função  $h$  é inteira. Pela regra de Leibnitz complexa [já vimos que  $g$  e  $\partial g/\partial z$  são contínuas em  $\Omega \times \Omega$ ] segue que  $h$  é derivável em  $\Omega$  e em  $V$  também.
- ◊  $h$  é nula. Por propriedade do índice,  $V$  contém o complementar de um disco compacto contendo Imagem( $\Gamma$ ). Para  $z^*$  neste complementar temos

$$h(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z^*} dw.$$

Seja  $\gamma : [c, d] \rightarrow \Omega$  uma curva do ciclo  $\Gamma$ . Então,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z^*} dw \right| \leq \frac{1}{d[z^*; \text{Imagem}(\gamma)]} \int_c^d |f(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \xrightarrow{|z^*| \rightarrow \infty} 0.$$

Logo,  $h(z^*) \xrightarrow{|z^*| \rightarrow \infty} 0$  e  $h$  é limitada. Pelo teorema de Liouville segue  $h \equiv 0$ .

◊ Verificação das fórmulas anunciadas. Dado  $\alpha \in \Omega \setminus \text{Imagem}(\Gamma)$  temos

$$0 = h(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - f(\alpha) \text{Ind}_{\Gamma}(\alpha).$$

Está então provada a primeira fórmula para toda função holomorfa em  $\Omega$ .

Para a segunda fórmula, utilizando a primeira fórmula obtemos

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_{\Gamma} \frac{(z - \alpha)f(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i(\alpha - \alpha)f(\alpha) \text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) = 0.$$

Para a terceira fórmula basta aplicar a segunda ao ciclo  $\Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$  em  $\Omega_{\clubsuit}$ .

O corolário a seguir é equivalente ao teorema acima e é também chamado Teorema de Cauchy Homológico.

**10.18 Corolário (Teorema de Cauchy Homológico).** *Seja  $\Omega$  um aberto e  $\Gamma$  um ciclo em  $\Omega$ . Então, temos*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff \Gamma \sim 0 \text{ em } \Omega.$$

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Dado  $\alpha$  no complementar  $\Omega$ , seja

$$f(z) = \frac{1}{z - \alpha} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Por hipótese,

$$0 = \int_{\Gamma} f dz = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = \text{Ind}(\Gamma; \alpha).$$

( $\Leftarrow$ ) Segue do Teorema 10.17 (também Cauchy homológico)  $\clubsuit$ .

Assim, mostramos que o Teorema 10.17 implica o Corolário 10.18. Inversamente, supondo válido o Corolário 1.18, sejam

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , um ciclo  $\Gamma \sim 0$  em  $\Omega$  e um ponto  $\alpha \in \Omega \setminus \text{Imagem}(\Gamma)$ .

Expandindo  $f$  em séries de potências em torno de  $\alpha$  concluímos que a função

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

é analítica em  $\Omega$  e assim, o Corolário 10.18 garante

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = 0.$$

Isto prova que o Corolário 10.18 implica o Teorema 10.17.

Interpretação para o Corolário 10.18. Temos

$$\int_{\Gamma} f dz = 0, \text{ para toda } f \in \mathcal{H}(\Omega),$$

se e só se o interior do ciclo  $\Gamma$  está contido em  $\Omega$ . Recordemos que, algebricamente, o interior de  $\Gamma$  é o conjunto dos pontos  $\alpha$  tais que  $\text{Ind}_{\Gamma}(\alpha) \neq 0$ .

**Exemplo para o Teorema de Cauchy homológico.** Consideremos um aberto  $\Omega$  conexo e limitado tal que seu complementar tem uma componente conexa ilimitada e três pontos como os hachurados em preto na figura abaixo (isto é, tais três pontos não pertencem a  $\Omega$ ). Pela figura, a curva  $\gamma$  dá uma volta em torno de cada um dos três pontos. As pequenas curvas circulares  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  dão uma volta, cada uma, em torno de seus respectivos centros. É fácil ver que

$$\gamma \sim \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \text{ em } \Omega.$$

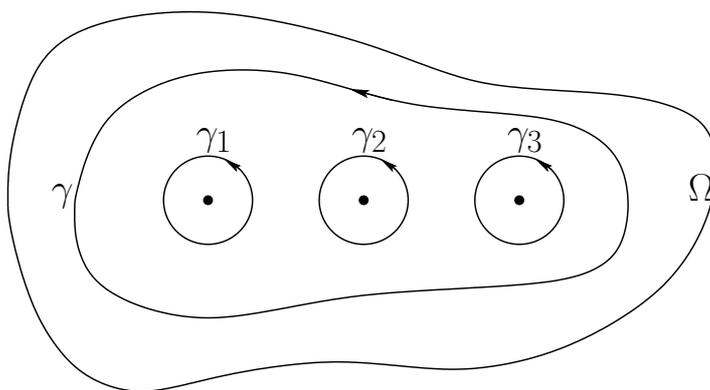


Figura 10.8: Ilustração ao Teorema 10.17

Então, dada  $f$  holomorfa em  $\Omega$ , pelo teorema de Cauchy homológico temos

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_3} f dz \clubsuit$$

## 10.6 - O Teorema de Morera e o Princípio da Reflexão de Schwarz

**10.19 Teorema (Morera).** *Seja  $f : B(a;r) \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $r > 0$ , contínua e tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

*para todos os triângulos  $\Delta$ , convexos e fechados, contidos em  $B(a;r)$ . Então,  $f$  é holomorfa.*

*Vale um resultado análogo para retângulos (convexos, fechados e com lados paralelos aos eixos) contidos em  $B(a;r)$ .*

**Prova.**

Pelo Teorema 10.6, existe  $F$  com  $F' = f$ . Pelo Corolário 10.14,  $f$  é holomorfa♣

Dado um conjunto  $X \subset \mathbb{C}$ , definimos

$$C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

Suponhamos  $\Omega$  simétrico em relação ao eixo real e  $I = \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Definimos

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega^- = \{z \in \Omega : \text{Im}(z) < 0\}.$$

Assim,

$$\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-.$$

**10.20 Teorema.** *Seja  $f \in C(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ . Então,  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ .*

**Prova.**

Seja  $R$  um retângulo fechado convexo, de lados paralelos aos eixos e em  $\Omega$ .

Analisemos três casos.

- ◇ Se  $R \subset \Omega^+$  ou  $R \subset \Omega^-$ , pelo teorema de Cauchy-Goursat (10.7) ou o de Cauchy (10.8) ou o de Cauchy homotópico (10.9) obtemos

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

- ◇ Se  $R = \{x + iy : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq c\}$ , seja  $R_\epsilon = \{x + iy : a \leq x \leq b \text{ e } \epsilon \leq y \leq c\}$ ,  $\epsilon > 0$ .

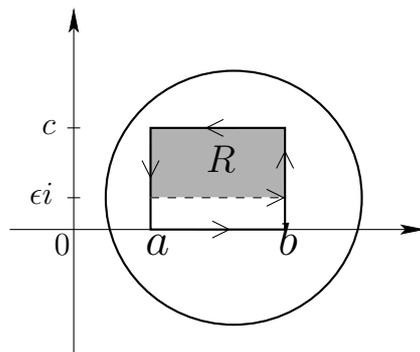


Figura 10.9: Ilustração ao segundo caso

Então,  $f$  é uniformemente contínua em  $R \supset R_\epsilon$  e para  $\epsilon \rightarrow 0^+$  temos

$$\int_\epsilon^c f(a + iy) dy \rightarrow \int_0^c f(a + iy) dy, \quad \int_\epsilon^c f(b + iy) dy \rightarrow \int_0^c f(b + iy) dy,$$

$$\int_a^b f(x + i\epsilon) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad 0 = \int_{\partial R_\epsilon} f \rightarrow \int_{\partial R} f.$$

- ◇ Se  $R$  intersecta  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ , então  $R$  é a união de dois retângulos fechados  $R^+$  e  $R^-$ , respectivamente contidos (exceto por um segmento comum a ambos e no eixo real) em  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ .

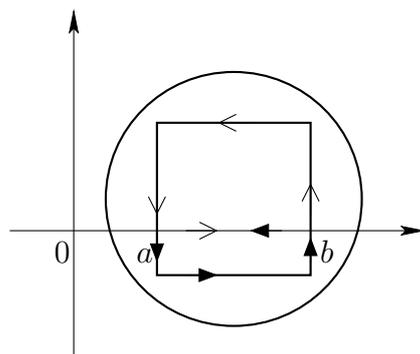


Figura 10.10: Ilustração ao terceiro caso

Analogamente ao segundo caso, encontramos

$$\int_{\partial R^-} f = 0 = \int_{\partial R^+} f.$$

Portanto,

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R^+} f + \int_{\partial R^-} f = 0.$$

Pelo Teorema de Morera segue que  $f$  é holomorfa♣

**10.21 Corolário (Princípio da Reflexão de Schwarz).** *Seja  $f$  uma função contínua em  $\Omega^+ \cup I$ , holomorfa em  $\Omega^+$  e assumindo valores reais em  $I$ . Então,*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{se } z \in \Omega^+ \cup I \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{se } z \in \Omega^- \cup I, \end{cases}$$

*é uma extensão holomorfa de  $f$  ao aberto  $\Omega$ . Se  $\Omega$  é conexo, tal extensão é única.*

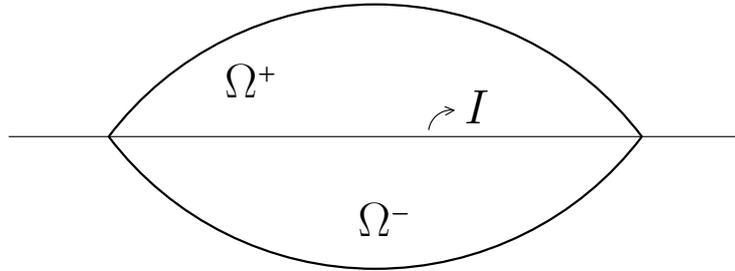


Figura 10.11: Princípio da Reflexão de Schwarz

**Prova.**

Como  $f(x)$  é real, para todo  $x \in I$ , concluímos que  $F$  está bem definida. Pela definição,  $F$  é contínua em  $\Omega^+ \cup I$  e holomorfa em  $\Omega^+$ .

Ainda, dado  $w$  em  $\Omega^-$ , temos  $f(\zeta) = \sum a_n(\zeta - \bar{w})$  em alguma bola  $B(\bar{w}; r)$  não degenerada. Donde segue

$$F(z) = \overline{\sum a_n(\bar{z} - \bar{w})} = \sum \bar{a}_n(z - w) \text{ em } B(w; r).$$

Portanto,  $F$  é holomorfa em  $\Omega^-$ .

É claro que  $F$  é contínua em  $\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$ . Então, pelo Teorema 10.20 segue que  $F$  é holomorfa em  $\Omega$ .

Se  $\Omega$  é conexo e  $G$  é uma extensão holomorfa de  $f$  a  $\Omega$ , então temos  $G = F$  em  $I$  e então, pelo princípio de identidade (6.5), deduzimos que  $G = F$  em  $\Omega$ . ♣

### 10.7 - Continuidade e Derivação sob o Sinal de Integração (integrais impróprias e parâmetro complexo)

**10.22 Teorema.** *Sejam  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  contínua. Suponha que para cada  $z_0$  em  $\Omega$ , existem um disco  $D(z_0; r)$ , não degenerado e contido em  $\Omega$ , e uma função  $M : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  satisfazendo*

$$|f(z, t)| \leq M(t), \text{ para todos } z \in D(z_0; r) \text{ e } t \text{ grande o suficiente, e } \int_0^\infty M(t) dt < \infty.$$

Então,

(a) *Está bem definida a função  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty f(z, t) dt, \text{ onde } z \in \Omega.$$

(b) *A função  $\varphi$  é contínua.*

(c) *Suponha que  $\frac{\partial f}{\partial z}(z, t)$  existe e é contínua em  $\Omega \times [0, +\infty)$ . Suponha que para cada  $z_0$  em  $\Omega$ , existem uma vizinhança compacta  $K$  de  $z_0$ , contida em  $\Omega$ , e uma função  $N : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  satisfazendo*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq N(t), \text{ se } t \text{ é grande o suficiente e } z \in K, \text{ e } \int_0^\infty N(t) dt < \infty.$$

Então,  $\varphi$  é holomorfa e

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

**Prova.**

(a) Fixemos  $z \in \Omega$ . Devido às hipóteses, temos

$$0 \leq |f(z, t)| + \operatorname{Re}(f)(z, t) \leq 2M(t),$$

para alguma função não negativa  $M = M(t)$  tal que

$$\int_0^\infty M(t) dt < \infty.$$

Logo, as integrais de Riemann (com integrando maior ou igual a zero)

$$\int_0^r [ |f(z, t)| + \operatorname{Re}(f)(z, t) ] dt, \text{ com } 0 \leq r < +\infty,$$

são limitadas e convergem (e crescendo, se  $r \rightarrow +\infty$ , à integral imprópria

$$\int_0^\infty [|f(z, t)| + \operatorname{Re}(f)(z, t)] dt \leq 2 \int_0^\infty M(t) dt < \infty.$$

Logo, está bem definida a integral imprópria

$$\int_0^\infty \operatorname{Re}(f)(z, t) dt.$$

Analogamente para  $\operatorname{Im}(f)(z, t)$  [basta trocar  $f$  por  $if$ ]. Segue então que

$$\int_0^\infty f(z, t) dt \text{ converge.}$$

Observemos que [verifique]

$$\left| \int_0^\infty f(z, t) dt \right| \leq \int_0^\infty |f(z, t)| dt \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

- (b) Fixemos um ponto  $z_0$  em  $\Omega$ , um disco  $D(z_0; r)$  e uma função  $M = M(t)$  como no enunciado. Dado  $\epsilon > 0$ , é simples ver que existe  $m > 0$  tal que

$$\int_m^\infty M(t) dt < \epsilon \text{ [verifique].}$$

Seja  $h \in \mathbb{C}$  com  $|h| < r$ . Temos então

$$\begin{aligned} |\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)| &= \left| \int_0^\infty [f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)] dt \right| \\ &\leq \int_0^m |f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)| dt + \int_m^\infty |f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)| dt. \end{aligned}$$

A última integral acima é (pela desigualdade triangular) menor ou igual a

$$2 \int_m^\infty M(t) dt < 2\epsilon.$$

Quanto a penúltima integral, pela continuidade uniforme de  $f(z, t)$  no compacto  $D(z_0; r) \times [0, m]$  segue que existe um  $\delta$ , com  $0 < \delta < r$ , tal que

$$\text{para tod } |h| < \delta \text{ temos } |f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)| \leq \frac{\epsilon}{m} \text{ para todo } t \in [0, m].$$

Concluimos então que

$$\text{para todo } |h| < \delta \text{ temos } |\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)| < 3\epsilon.$$

Logo,  $\varphi$  é contínua em  $z_0$ . Portanto,  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

(c) Pelos itens (a) e (b), está bem definida e é contínua a função

$$\Omega \ni z \mapsto \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

A seguir, sejam  $z_0$  em  $\Omega$ , uma vizinhança compacta  $K$  e um função  $N(t)$  como enunciados em (c). Podemos supor  $K = D(z_0; r)$ .

Escrevamos então, para  $0 < |h| < r$ ,

$$\begin{aligned} D(h) &= \frac{\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)}{h} - \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right] ds dt. \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , devido às hipóteses, existe  $m > 0$  grande o suficiente tal que

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \right| \leq N(t), \text{ para todos } t > m \text{ e } z \in D(z_0; r), \\ \text{e} \\ \int_m^\infty N(t) dt < \epsilon. \end{cases}$$

Temos então, para  $0 < |h| < r$ ,

$$|D(h)| \leq \int_0^m \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, t) \right| ds dt + 2\epsilon.$$

Como  $D(z_0; r) \times [0, m]$  é compacto, por continuidade uniforme segue que existe um  $\delta$ , com  $0 < \delta < r$ , tal que para todo  $0 < |h| < \delta$  temos que a integral iterada imediatamente acima é tal que obtemos

$$|D(h)| < 3\epsilon.$$

Concluimos então que

$$D(h) \rightarrow 0 \text{ se } h \rightarrow 0 \clubsuit$$

**Comentário.** Uma prova mais breve do Teorema 10.22, itens (b) e (c), pode ser dada utilizando o Teorema da convergência de Weierstrass (Corolário 6.21). [Notemos que este é um alto preço a pagar, sem cerimônia “chamar um santo” ou citar o nome de uma autoridade, quando é recomendável conquistar desenvoltura.] Com tal alerta, mostremos esta prova bela e “curta”.

Mantenhamos a prova do teorema 10.22 (a) e provemos os itens (b) e (c). Dado  $n = 1, 2, 3, \dots$ , pelo item (a) está bem definida a sequência de funções complexas

$$\varphi_n(z) = \int_0^n f(z, t), \text{ onde } z \in \Omega, \text{ e}$$

$$\varphi_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(z), \text{ para cada ponto } z \in \Omega.$$

Fixado  $z_0 \in \Omega$ , seja  $D(z_0; r)$  e  $M = M(t)$  como no enunciado do teorema 10.22. Supondo  $m \geq n \geq 1$ , temos

$$|\varphi_m(z) - \varphi_n(z)| = \left| \int_n^m f(z, t) dt \right| \leq \int_n^m M(t) dt, \text{ para todo } z \in D(z_0; r).$$

Por hipótese,

$$\int_0^n M(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty M(t) dt.$$

Logo, a sequência real

$$\left( \int_0^n M(t) dt \right)_{\mathbb{N}}$$

é de Cauchy. Então, pela última desigualdade segue que

$$(\varphi_n)_{\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente em } D(z_0; r).$$

Logo,  $(\varphi_n)$  converge compactamente a  $\varphi$  [em  $\Omega$ ] e  $\varphi$  é contínua. Isto prova (b).

A hipótese em Teorema 10.22 (c) permite usar a regra de Leibnitz em integrais próprias de parâmetro complexo, Teorema 10.4 (B). Segue que  $\varphi_n$  é derivável e

$$\varphi'_n(z) = \int_0^n \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

Pelo teorema da convergência de Weierstrass (vide Corolário 6.21) e o forte Corolário 10.14 [isto é,  $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ ] segue que

$$\varphi = \lim \varphi_n \text{ é holomorfa e } \varphi'_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi'(z) \text{ para todo ponto } z \in \Omega.$$

Visto que já provamos os itens (a) e (b) em Teorema 10.22, a hipótese em Teorema 10.22 (c) sobre a derivada  $\partial f / \partial z$  nos garante que

$$\text{existe } \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt, \text{ para cada } z \in \Omega, \text{ e } \int_0^n \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt.$$

Logo,

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) dt \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Comentário.** Derivação sob o sinal de integração para funções dependente de um parâmetro complexo é uma importante ferramenta. É então útil apresentá-la com uma formatação semelhante à técnica utilizada em variáveis reais. Solicito então ao leitor que resolva o exercício abaixo.

**Exercício básico a respeito de derivação sob o sinal de integração.** Seja  $f_n : B(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$  uma sequência de funções deriváveis e com derivadas de primeira ordem  $f'_n$  contínuas. Sejam  $f : B(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$  arbitrárias. Suponha

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre compactos, se } n \rightarrow +\infty, \\ f'_n \longrightarrow g \text{ uniformemente sobre compactos, se } n \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Prove diretamente [isto é, sem utilizar o teorema da convergência de Weierstrass e também sem utilizar que as derivadas  $f_n^{(k)}$  de ordem  $k \geq 2$  são contínuas e teoremas que dependam da fórmula integral de Cauchy] que

$$f \text{ é derivável e } f' = g.$$

**Dicas.**

- (1) Considere  $z \in B(0; 1)$ . Seja  $\gamma$  uma curva de classe  $C^1$  por partes, com imagem na bola  $B(0; 1)$ , de início 0 e final  $z$ . Mostre que a associação

$$z \mapsto \int_{\gamma} g(w)dw, \quad [\text{onde } z \in B(0; 1)]$$

está bem definida e independe de  $\gamma$

- (2) Adapte a prova do Teorema 10.6.

**Exercício.** Utilizando o exercício imediatamente acima, elabore uma prova do Teorema 10.22 (Continuidade e derivação sob o sinal de integração para integrais impróprias e dependentes de um parâmetro complexo).

**Dica.** Siga, de forma análoga (é trivial), os passos da demonstração dada no comentário imediatamente anterior.

## 10.8 - Representação de $f$ via $\operatorname{Re}(f)$ [Fórmula de Schwarz]

**Teorema 10.23 (Fórmula de Schwarz).** *Seja  $f = u+iv$  holomorfa em  $B(0; \rho)$ , com  $\rho > 0$  e  $u = \operatorname{Re}(f)$ . Seja  $r$  tal que  $0 < r < \rho$ . Então, dado  $w \in B(0; r)$  temos*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{re^{i\theta} + w}{re^{i\theta} - w} d\theta + iv(0).$$

**Prova.**

Escrevendo

$$f(z) = \sum a_n z^n, \text{ onde } |z| < \rho,$$

obtemos

$$u(z) = \frac{1}{2} \sum (a_n z^n + \overline{a_n z^n}).$$

Dado  $z = re^{i\theta}$  na circunferência de centro na origem e de raio  $r$ , temos

$$u(re^{i\theta}) = \operatorname{Re}(a_0) + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} r^m (a_m e^{im\theta} + \overline{a_m} e^{-im\theta}).$$

Multiplicando tal identidade por  $e^{-in\theta}$ , para  $n \geq 1$ , e integrando obtemos

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = r^n a_n \pi.$$

Obtivemos fórmulas para os coeficientes que dependem apenas de  $u = \operatorname{Re} f$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{1}{(re^{i\theta})^n} d\theta, \text{ se } n \geq 1.$$

Observemos que, pela fórmula do valor médio de Gauss,

$$a_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(a_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

Dado então  $w$  em  $B(0; r)$  temos (pelo Teste-M de Weierstrass, pois  $\frac{|w|}{r} < 1$ )

$$\begin{aligned} f(w) &= a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left( \frac{w}{re^{i\theta}} \right)^n d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left[ 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{w}{re^{i\theta}} \right)^n \right] d\theta + iv(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left[ 1 + 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{w}{re^{i\theta}}} - 1 \right) \right] d\theta + iv(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \left( \frac{2re^{i\theta}}{re^{i\theta} - w} - 1 \right) d\theta + iv(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{re^{i\theta} + w}{re^{i\theta} - w} d\theta + iv(0) \clubsuit \end{aligned}$$