

Simulação Numérica do Problema de N-Corpos Gravitacional (e um pouco mais)

Octavio Augusto Potalej

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Setembro, 2025

Motivação

- Começamos estudando um artigo sobre setas do tempo gravitacionais;
- Precisamos nos aprofundar no Problema de N-Corpos;
- Decidimos simular o PNCG numericamente para visualizar a teoria;
- Com simulações, podemos visualizar resultados teóricos e até obter ideias novas sobre o problema!

Identification of a gravitational arrow of time

Julian Barbour,¹ Tim Koslowski,² and Flavio Mercati³

¹College Farm, South Newington, Banbury, Oxon, OX15 4JG UK,
Visiting Professor in Physics at the University of Oxford, UK.

²University of New Brunswick, Fredericton, NB, E5B 5A3 Canada.
³Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North,
Waterloo, ON, N2L 2Y5 Canada.

It is widely believed that special initial conditions must be imposed on any time-symmetric law if its solutions are to exhibit behavior of any kind that defines an 'arrow of time'. We show that this is not so. The simplest non-trivial time-symmetric law that can be used to model a dynamically closed universe is the Newtonian N -body problem with vanishing total energy and angular momentum. Because of special properties of this system (likely to be shared by any law of the Universe), its typical solutions all divide at a uniquely defined point into two halves. In each a well-defined measure of shape complexity fluctuates but grows irreversibly between rising bounds from that point. Structures that store dynamical information are created as the complexity grows and act as 'records'. Each solution can be viewed as having a single past and two distinct futures emerging from it. Any internal observer must be in one half of the solution and will only be aware of the records of one branch and deduce a unique past and future direction from inspection of the available records.

Figura: Capa do artigo

PNCG

Enunciado

O PNCG é um problema com N partículas com massas m_a e posições $\mathbf{q}_a$, regidas unicamente pelo potencial newtoniano:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a\|^3} = -\frac{1}{m_a} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N.^a$$

^aAqui omitimos a constante G por facilidade, tomando $G = 1$ e ignorando suas dimensões.

Forma Hamiltoniana

Tomando o momento generalizado $\mathbf{p}_a = m_a \dot{\mathbf{q}}_a$, podemos reescrever o problema via equações de Hamilton:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{p}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \Omega \nabla H(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad H = \sum_{a=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_a\|^2}{2m_a} + V(\mathbf{q}).$$

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- ① Energia total H ;
- ② Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$;
- ③ Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- ④ Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$.

PNCG: Integrais primeiras

Integrais primeiras

O PNCG (em 3 dimensões) tem 10 integrais primeiras.

- ① Energia total H ;
- ② Momento angular total $\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a$;
- ③ Momento linear total $\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a$;
- ④ Movimento do centro de massas: $\mathbf{G} = M\mathbf{q}_{cm} - t\mathbf{P}$.

Valores padrão

- O PNCG é invariante por translações, então tomamos sempre $\mathbf{q}_{cm}(t_0) = \mathbf{0}$;
- Por outros motivos, sempre tomamos também que $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{q}_{cm}(t) = \mathbf{0}, \forall t$, e que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Escala do sistema

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Escala do sistema

Similaridade Dinâmica

O PNCG possui similaridade dinâmica, então um redimensionamento anisotrópico leva soluções em soluções:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{t}) = \alpha \mathbf{q}(t), \quad \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) = \alpha^{-1/2} \mathbf{p}_a, \quad \tilde{t} = \alpha^{3/2} t, \quad \alpha > 0.$$

Momento de inércia

Podemos medir um tamanho global de um PNCG através do *momento de inércia*:

$$I := R^2 := \sum_{a=1}^N m_a \|\mathbf{q}_a\|^2.$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle .$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle.$$

Identidade de Lagrange-Jacobi

Para um sistema com potencial V_k homogêneo de grau k e energia total E , vale:

$$\ddot{I} = 4E - 2(2 + k)V_k.$$

No PNCG, $k = -1$, então

$$\ddot{I} = 4E - 2V.$$

Evolução da escala

Momento de dilatação

A evolução da escala é caracterizada pelo *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{a=1}^N \langle \mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a \rangle.$$

Identidade de Lagrange-Jacobi

Para um sistema com potencial V_k homogêneo de grau k e energia total E , vale:

$$\ddot{I} = 4E - 2(2 + k)V_k.$$

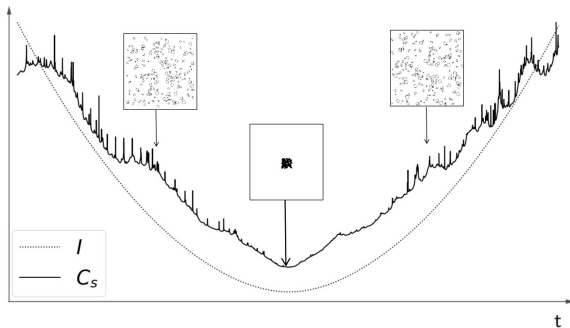
No PNCG, $k = -1$, então

$$\ddot{I} = 4E - 2V.$$

Em um problema com $k = -2$, teríamos que $\ddot{I} = 4E$ e $I(t) = 2Et^2 + bt + c$. Se $E = 0$, então D seria constante. Não é suficiente, mas é algo.

Complexidade

- Se $E \geq 0$, então D é monótono;
- Então I tem um mínimo global e o sistema se expande para o futuro e para o passado a partir do mínimo;
- Medida de formato (Complexidade): $C_S \propto R|V|$.



Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos planar

Objetivo

Queremos descrever a dinâmica do problema de 3 corpos em termos da dinâmica dos ângulos internos do triângulo formado por $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{q}_3$.

Shape Space

Sejam $Q = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in Q$ e $SE(2)$ o grupo de movimentos rígidos no plano (não inclui reflexões). O **Shape Space** é o espaço $Q/SE(2)$.

Antes...

Sem perda de generalidade, vamos considerar que $\mathbf{q}_{cm} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Para mais detalhes, (MONTGOMERY, 2002).

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos planar

Eliminando translações

Vetores de Jacobi:

$$\xi_1 = x_2 - x_1, \quad \xi_2 = x_3 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Coordenadas de Jacobi:

$$z_1 = \sqrt{\mu_1} \xi_1, \quad z_2 = \sqrt{\mu_2} \xi_2,$$

onde

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1 + m_2}.$$

Vantagens: $I = |z_1|^2 + |z_2|^2$, $T = |\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2$

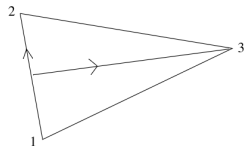


Figura: Vetores de Jacobi.

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos planar

Eliminando rotações

- Rotação: $\mathbf{z} = e^{i\theta} \mathbf{z}$;
- Então o shape space é isométrico ao quociente $\mathbb{C}^2/S^1$;
- Temos então $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$w_1 = \frac{1}{2}(|\mathbf{z}_1|^2 - |\mathbf{z}_2|^2), \quad w_2 = \mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}}_2, \quad w_3 = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2.$$

- Vantagens:
 - Invariante por ações de $SE(2)$;
 - $\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{4}I^2$.
 - O espaço restante (Shape Space) tem a topologia da esfera).

Redução da dinâmica: Problema de 3 corpos planar

Coordenadas esféricas

Podemos tomar coordenadas nessa esfera:

$$\frac{(w_1, w_2, w_3)}{\|w\|} := (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta).$$

Com isso, podemos identificar pontos interessantes nessa esfera:

- Colisão 1-2: $\phi = \pi/2, \theta = \pi$;
- Colisão 1-3: $\phi = \pi/2, \theta = -\arctan C_m$;
- Colisão 2-3: $\phi = \pi/2, \theta = \arctan C_m$;

Com massas iguais, $\theta = \pm\pi/3$, respectivamente.

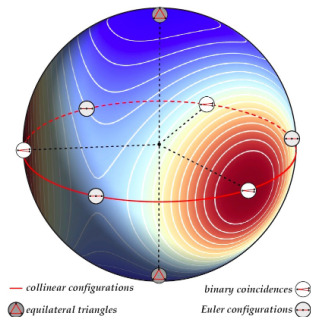


Figura: Shape sphere do problema de 3 corpos com mapa de calor de C_S .

Pensando agora em N-corpos: Hamiltoniana não-autônoma

Em N-corpos, temos (ALBOUY; CHENCINER, 1997):

$$\sigma_a = \sqrt{\mu_a} \frac{\mathbf{q}_a}{R}, \quad \pi_a = \frac{R}{\sqrt{\mu_a} D_0} \mathbf{p}_a - \frac{D}{D_0} \sigma_a.$$

Se $E \geq 0$, D é monótono, então podemos tomar $\zeta = D/D_0$ como variável temporal. Obtemos a hamiltoniana (não autônoma):

$$\mathcal{H} = \log(K_S^2 + \zeta^2) - \log C_S,$$

onde $K_S = \sum \|\pi_a\|^2$.

Pensando agora em N-corpos: A escala como fricção em S

Com uma transformação não-canônica $\lambda = \log \zeta$ e $\omega_a = \pi_a / \zeta$ (adimensional), temos:

$$H_0 = \log \left(\sum \omega_a \cdot \omega_a + 1 \right) - \log C_S,$$

ao custo de um sistema dissipativo:

$$\frac{d\sigma_a}{d\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial \omega_a}, \quad \frac{d\omega_a}{d\lambda} = -\frac{\partial H_0}{\partial \sigma_a} - \omega_a.$$

Na medida que o sistema evolui,

Referências



ALBOUY, Alain; CHENCINER, Alain. Le problème des n corps et les distances mutuelles. *Inventiones Mathematicae*, Springer Science e Business Media LLC, v. 131, n. 1, p. 151–184, dez. 1997. ISSN 1432-1297. DOI: 10.1007/s002220050200. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s002220050200>.



MONTGOMERY, Richard. Infinitely Many Syzygies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer Science e Business Media LLC, v. 164, n. 4, p. 311–340, out. 2002. ISSN 1432-0673. DOI: 10.1007/s00205-002-0211-z. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00205-002-0211-z>.